

---

# Identifiabilité structurelle et identification de systèmes interconnectés

**Safa Jedidi, Romain Bourdais, Jean Buisson,  
Marie-Anne Lefebvre**

*Equipe AUT (Automatique)  
CentraleSupélec - IETR UMR 6164, Avenue de la Boulaie  
CS 47601, F-35576 Cesson-Sévigné Cedex, France  
romain.bourdais@centralesupelec.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article s'intéresse à l'identification des systèmes de grande taille qui peuvent être décomposés en une collection de sous-systèmes couplés par les sorties. Il est d'abord montré que si le système global est structurellement identifiable, alors tous les sous-systèmes le sont également, en considérant les sorties comme de nouvelles entrées virtuelles. Cette propriété est ensuite utilisée pour proposer une procédure d'identification décentralisée. L'efficacité de l'approche proposée est illustrée sur un exemple académique.*

*ABSTRACT. This paper deals with the identification of large-scale systems that can be decomposed into a collection of subsystems that are coupled by their outputs. It is first shown that if the global system is structurally identifiable, then all the subsystems are also structurally identifiable considering the coupling outputs as new inputs. This property is then used to propose a decentralized identification procedure. The efficiency of the proposed approach is emphasized on an academical example.*

*MOTS-CLÉS : identifiabilité structurelle, identification décentralisée, systèmes de grande taille.*

*KEYWORDS: identifiability, decentralized identification, large scale systems.*

---

DOI:10.3166/JESA.50.137-155 © 2017 Lavoisier

## 1. Introduction

L'étude des systèmes de grande taille tels que les systèmes de transport, les systèmes électriques, les systèmes de bâtiments... a conduit au développement de diverses techniques pour réduire la complexité de leur analyse. Une approche possible est de considérer le grand système comme une collection de nombreux sous-systèmes plus simples : (Mesarovic *et al.*, 1970). Les premiers travaux dans ce domaine, sont surtout ceux présentés dans (Bernussou, Titli, 1982) et (Siljak, 1991).

L'identification paramétrique, point crucial pour l'élaboration d'une stratégie de contrôle basée sur un modèle (Bellman, Astrom, 1970), n'échappe pas à ce problème de taille.

Pendant de nombreuses années, l'identification des systèmes de grande taille a été considérée comme un problème difficile à résoudre pour plusieurs raisons :

- la dimension d'un grand système qui est définie par le nombre de ses paramètres, le nombre de ses entrées/sorties ou le nombre de ses variables d'états ;
- le temps d'exécution qui est défini par le nombre d'opérations élémentaires effectuées par un algorithme pour avoir un résultat. Ce temps qui ne dépend pas du calculateur employé, croît très rapidement avec la dimension du système.

Pour simplifier l'identification des systèmes de grande taille, de nombreux auteurs ont essayé d'exploiter leur structure. Les auteurs de l'article (Guinzy, Sage, 1973) profitent de la structuration hiérarchique du grand système pour développer une approche itérative d'identification. D'autres auteurs (Massioni, Verhaegen, 2008) s'intéressent aux systèmes circulants, classe particulière des systèmes dont les interconnexions sont périodiques, et où chaque sous-système a exactement 2 voisins (D'Andrea, Dullerud, 2003), et ils exploitent leurs propriétés pour réduire la complexité de leur identification. Il existe également des méthodes d'identification qui profitent des propriétés de découplage, par exemple, l'article (Van Den Hof *et al.*, 2013) présente des méthodes d'identification en boucle fermée des grands systèmes composés d'un ensemble de sous-systèmes connectés.

Dans cet article, nous nous concentrons sur une structure particulière de systèmes de grande taille : on considère un ensemble de sous-systèmes linéaires couplés par leurs sorties et qui peuvent aussi partager un certain nombre d'entrées communes. Chaque sous-système peut ne pas être identique aux autres sous-systèmes et interagir avec un ou plusieurs de ses voisins. Un exemple est représenté sur la figure 1, cette classe de processus se prête par exemple dans le cas des systèmes thermiques dans les bâtiments (Morosan *et al.*, 2010).

L'objet de cet article est de profiter de l'identifiabilité qui est une propriété structurelle du système global pour développer une procédure d'identification décentralisée permettant de réduire la complexité de l'identification globale.

L'identifiabilité structurelle est une propriété importante quand il faut évaluer les paramètres du système, car elle garantit l'unicité des paramètres (Walter, 1987). Dans

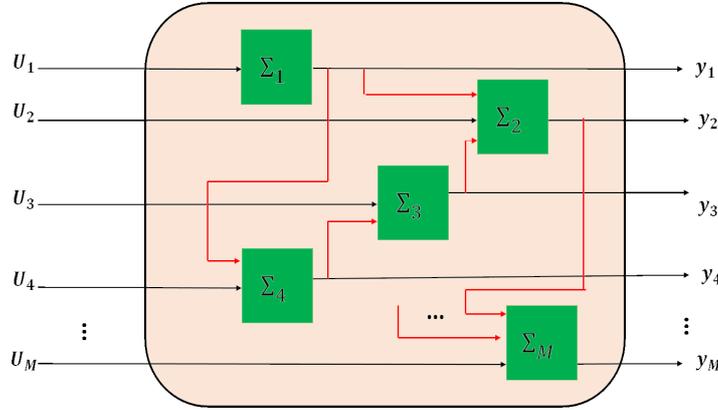


Figure 1. Exemple d'un grand système composé de  $M$  sous-systèmes couplés par les sorties

(Van Den Hof, 1998), l'auteur se concentre sur les systèmes compartimentaux pour étudier l'identifiabilité structurelle du système global, et dans (Gerdin *et al.*, 2007), l'identifiabilité pratique peut être vérifiée pour des conditions suffisantes sur les signaux d'interaction entre les sous-systèmes.

Ce document est organisé comme suit : dans la section 2, on donne quelques définitions utiles pour la suite de l'article et on présente un rappel sur l'identifiabilité structurelle. Dans la section 3 on présente le système global et sa structure. Les contributions de cet article sont expliquées dans la section 4 dans laquelle on présente une condition suffisante pour l'identifiabilité structurelle des sous-systèmes. Dans la section 5, la procédure d'identification décentralisée est définie et son efficacité est illustrée par un exemple académique inspiré des systèmes thermiques dans les bâtiments. La conclusion et les perspectives de ce travail sont présentées dans la section 6.

## 2. Définitions

Dans cette section, on présente différentes définitions et notions utiles pour le développement des résultats obtenus par la suite. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(p)x + B(p)u \\ y &= C(p)x \end{cases}, \quad x(0) = x_0(p) \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (1)$$

où,

$x \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur des états,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  est le vecteur des entrées,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur des sorties et  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_p}$  est le vecteur des paramètres du modèle étudié (où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des paramètres admissibles).

Pour souci de clarté, une matrice  $A(p)$ , paramétrée par  $p$  sera notée  $A$ , et cette même matrice  $A(\tilde{p})$  paramétrée en  $\tilde{p}$  sera notée  $\tilde{A}$ . Dans cet article, on s'intéresse à des systèmes structurés, où les sous-systèmes sont couplés par les sorties.

Un système structuré selon (Dion *et al.*, 2003) est un système dont certaines composantes des matrices  $(A, B, C)$  de sa représentation d'état, sont strictement nulles (système creux). La "structure" du système est donc définie par la disposition des coefficients qui dépendent des paramètres du système et d'autres qui sont invariablement nuls dans les 3 matrices de la représentation d'état, ainsi que des relations spécifiques entre les paramètres. Un exemple d'un système structuré est présenté ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 p_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p_6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & p_7 & 0 & p_8 \\ p_9 & 0 & p_{10} & 0 \end{pmatrix}$$

où les  $p_i$  sont les paramètres du modèle étudié.

L'intérêt d'utiliser des systèmes structurés est de donner un sens physique aux paramètres et d'explicitier des relations entre les variables d'état.

## 2.1. Propriétés structurelles

Pour un système paramétré, une propriété est dite structurelle, si elle est vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres du modèle étudié.

### 2.1.1. Observabilité structurelle

Le système (1) est structurellement observable si, pour presque tout  $p \in \mathcal{P}$ , le rang de la matrice d'observabilité est égal à l'ordre du système  $n_x$  (Willems, 1986) :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n_x$$

Pour bien comprendre cette notion, on propose deux exemples.

#### 2.1.1.1. Exemple 1

Considérons le système paramétré suivant :

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = ( p_2 \quad p_3 )$$

La matrice d'observabilité est :

$$O_{obs} = \begin{pmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2 p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a un rang structurel égal à 2, même si pour certaines valeurs de  $p$  ( $p_1 = 0$  ou  $p_2 = 0$  ou  $p_3 = 0$ ) le rang de la matrice d'observabilité est inférieur à 2. Ce système est alors structurellement observable.

### 2.1.1.2. Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = ( p_4 \quad p_5 \quad p_6 )$$

La matrice d'observabilité est :

$$O_{obs} = \begin{pmatrix} p_4 & p_5 & p_6 \\ p_5 p_1 & p_5 p_2 & p_5 p_3 \\ p_1 p_2 p_5 & p_2^2 p_5 & p_2 p_3 p_5 \end{pmatrix}$$

Le rang structurel de cette matrice est de 2, la troisième ligne étant colinéaire à la deuxième. Ce système est alors non structurellement observable.

### 2.1.2. Commandabilité structurelle

Le système (1) est structurellement commandable si, pour presque tout  $p \in \mathcal{P}$ , le rang de la matrice de commandabilité est égal à l'ordre du système  $n_x$  (Willems, 1986) :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix} = n_x$$

### 2.1.3. Identifiabilité structurelle

Tester l'identifiabilité structurelle d'un système est une étape importante dans la validation théorique d'un modèle. Intuitivement, les paramètres d'un système sont identifiables s'il est théoriquement possible de les déterminer d'une façon unique à partir de l'observation des entrées et des sorties supposées parfaitement connues, en se plaçant dans un cadre idéal non bruité, où le modèle cherché correspond à celui du système étudié.

La littérature sur l'identifiabilité est vaste (Chappell *et al.*, 1990), (Ljung, Glad, 1994), ... Le lecteur peut se référer à (Walter, 1982) et (Walter, 1987) qui traitent le sujet en détail. Sa définition formelle est rappelée ci-dessous :

DÉFINITION 1. — *Identifiabilité structurelle globale (Walter, 1982)*

*Considérons le système linéaire (1) paramétré en  $p$ .*

*Le paramètre  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}$  est dit structurellement globalement identifiable (s.g.i.) si et seulement si, pour presque tout  $\tilde{p} \in \mathcal{P}$  et pour une classe d'entrée  $\mathcal{U}$  :*

$$y(\tilde{p}, t) \equiv y(p, t), \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathcal{U}, \implies \tilde{p} = p \quad (2)$$

*Le système global (1) est s.g.i. si et seulement si, tous ses paramètres sont s.g.i..*

## 2.2. Méthodes pour vérifier l'identifiabilité structurelle

Il existe plusieurs méthodes pour vérifier l'identifiabilité structurelle comme l'approche par transformation de Laplace, décrite dans (Perasso, 2009), la méthode des paramètres de Markov expliquée dans (Profos, Delgado, 1995) qui est basée sur la représentation Bond Graph du système, ou le développement en série de Taylor des sorties étudié dans (Norton, 1982) par exemple.

Dans cet article, nous allons utiliser la méthode des similarités (similarity transformation approach) décrite dans (Van Den Hof, 1998) pour vérifier l'identifiabilité structurelle d'un modèle représenté par sa représentation d'état.

Les résultats de notre article sont basés sur le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — (Van Den Hof, 1998) *Le système (1), structurellement commandable et observable, est structurellement globalement identifiable si et seulement si, pour toute paramétrisation  $p$  et  $\tilde{p}$  et une matrice non singulière  $T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , telles que :*

$$\begin{cases} TA(p) &= A(\tilde{p})T \\ TB(p) &= B(\tilde{p}) \\ C(\tilde{p})T &= C(p) \end{cases} \quad (3)$$

alors  $T = \text{Id}$  et  $p = \tilde{p}$ .

## 3. Formalisation du problème étudié

Dans cet article, on considère un système global structuré en une collection de  $M$  sous-systèmes dynamiques couplés par les sorties et ayant un ensemble d'entrées communes. Chaque sous-système est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$(\Sigma_i) : \begin{cases} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + B_{ic} u_c + \sum_{j \neq i} K_{ij} y_j \\ y_i &= C_i x_i \end{cases} \quad (4)$$

dans laquelle les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $B_{ic}$ ,  $C_i$  et  $K_{ij}$  sont paramétrées par le vecteur  $p_i \in \mathbb{R}^{n_{p_i}}$  ( $i = 1 \dots M$ ),  $u_i$  représente les entrées propres à chaque sous-système et  $u_c$  représente le vecteur des entrées communes à tous les sous-systèmes.

A partir de cette description locale, une réalisation possible du système global est la suivante :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (5)$$

avec :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ u_c \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_M \end{pmatrix}$$

Le vecteur des paramètres du grand système résulte de la concaténation des paramètres locaux  $p_i$  (les paramètres des sous-systèmes).

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  dépendent du vecteur  $p$ .

$$A(p) = \begin{pmatrix} A_1(p_1) & K_{12}(p_1)C_2(p_2) & \dots & K_{1M}(p_1)C_M(p_M) \\ K_{21}(p_2)C_1(p_1) & A_2(p_2) & \dots & K_{2M}(p_2)C_M(p_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{M1}(p_M)C_1(p_1) & K_{M2}(p_M)C_2(p_2) & \dots & A_M(p_M) \end{pmatrix}$$

$$B(p) = \begin{pmatrix} B_1(p_1) & 0 & \dots & \dots & B_{1c}(p_1) \\ 0 & B_2(p_2) & \dots & \dots & B_{2c}(p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_M(p_M) & B_{Mc}(p_M) \end{pmatrix}$$

$$C(p) = \text{diag}(C_i)_{i=1,M}$$

On suppose que le système global est structurellement commandable et observable. Dans ce cas on peut montrer que les sous-systèmes sont également structurellement commandables et observables. Les preuves de ces propriétés sont développées dans la section suivante.

#### 4. Condition suffisante pour l'identifiabilité structurelle des systèmes locaux

Pour décomposer ce grand système, l'idée est de considérer chaque sous-système comme indépendant des autres mais possédant comme entrées virtuelles certaines des sorties de ses voisins. On définit ainsi le sous-système virtuel suivant :

$$\left( \widehat{\Sigma}_i \right) : \begin{cases} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + B_{ic} u_c + \sum_{j \neq i} K_{ij} \widehat{u}_{ij} \\ y_i &= C_i x_i \end{cases} \quad (6)$$

#### 4.1. Observabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

L'observabilité est une condition nécessaire pour appliquer la méthode des similarités. On peut prouver en développant les matrices d'observabilité la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Le système  $(\Sigma)$  est structurellement observable si et seulement si tous les sous-systèmes virtuels  $(\hat{\Sigma}_i)$  sont structurellement observables.*

La preuve est donnée ci-dessous.

PREUVE. — *On suppose que le grand système est structurellement observable. On se propose de montrer que tous les sous-systèmes virtuels sont structurellement observables, par un raisonnement par l'absurde. La preuve sera faite sur un exemple de grand système composé de 2 sous-systèmes. La généralisation est basée sur les mêmes principes.*

*On suppose que le sous-système 1 n'est pas structurellement observable. La matrice canonique d'observabilité de ce sous-système est :*

$$A_1 = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,no} & A_{1,12} \\ \hline 0 & A_{1,o} \end{array} \right), \quad C_1 = ( 0 \mid C_{1,o} )$$

où, 'no' représente la partie non observable et 'o' représente la partie observable.

*On considère le second sous-système représenté par les matrices  $A_2$  and  $C_2$ . Puisque les deux sous-systèmes sont couplés par leurs sorties, alors l'interaction  $K_{21}C_1$  du sous-système 1 sur le sous-système 2 a la structure suivante :*

$$K_{21}C_1 = ( 0 \mid K_{21}C_{1,o} )$$

Alors le système global possède les matrices  $A$  and  $C$  suivantes :

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} A_{1,no} & A_{1,12} & \star \\ \hline 0 & A_{1,o} & \star \\ \hline 0 & K_{21}C_{1,o} & A_2 \end{array} \right), \quad C = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & C_{1,o} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_2 \end{array} \right)$$

*Ainsi, la matrice d'observabilité du système global ne peut pas être de rang plein, ce qui entraîne une contradiction avec l'hypothèse d'observabilité du grand système. D'où tous les sous-systèmes doivent être structurellement observables.*

*Pour prouver que cette condition est aussi suffisante, on considère comme précédemment le cas de 2 sous-systèmes. La généralisation est basée sur les mêmes principes. On suppose que les couples  $(A_1, C_1)$  et  $(A_2, C_2)$  sont des systèmes observables. Les premières lignes de la matrice d'observabilité du grand système sont :*

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} &= \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} C_1 \\ 0 \\ C_1A_1 \\ C_2K_{21}C_1 \\ C_1A_1^2 + C_1K_{12}C_2K_{21}C_1 \\ C_2K_{21}C_1A_1 + C_2A_2K_{21}C_1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ C_2 \\ C_1K_{12}C_2 \\ C_2A_2 \\ C_1A_1K_{12}C_2 + C_1K_{12}C_2A_2 \\ C_2K_{21}C_1K_{12}C_2 + C_2A_2^2 \\ \vdots \end{matrix} \end{array} \right) \\
 &= \Gamma \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1A_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2 \\ C_1A_1^2 & 0 \\ 0 & C_2A_2^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (7)
 \end{aligned}$$

où  $\Gamma$  est une matrice triangulaire avec l'identité  $I_d$  sur sa diagonale.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I_d & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & I_d & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & C_1K_{12} & I_d & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ C_2K_{21} & 0 & 0 & I_d & 0 & \dots & \dots & 0 \\ C_1K_{12}C_2K_{21} & C_1A_1K_{12} & 0 & C_1K_{12} & I_d & 0 & \dots & 0 \\ C_2A_2K_{21} & C_2K_{21}C_1K_{12} & C_2K_{21} & 0 & 0 & I_d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & I_d \end{pmatrix} \quad (8)$$

Alors, on obtient :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1A_1 & 0 \\ 0 & C_2A_2 \\ C_1A_1^2 & 0 \\ 0 & C_2A_2^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Et comme par hypothèse, la matrice d'observabilité pour chaque sous système est de rang plein, alors la matrice d'observabilité du système global est aussi de rang plein.

#### 4.2. Commandabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

Contrairement à l'observabilité, la condition de commandabilité n'est pas équivalente. On peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — Si le système  $(\Sigma)$  est structurellement commandable alors tous les sous-systèmes virtuels  $(\hat{\Sigma}_i)$  sont structurellement commandables.

La preuve est donnée ci-dessous.

PREUVE. — Comme pour l'observabilité, on fait un raisonnement par l'absurde et on considère le cas de 2 sous-systèmes.

On suppose que le grand système est structurellement commandable, et que le premier sous-système virtuel  $(\widehat{\Sigma}_1)$  n'est pas structurellement commandable.

La matrice canonique de commandabilité de ce sous-système est :

$$A_1 = \left( \begin{array}{c|c} A_{1,nc} & 0 \\ \hline A_{1,12} & A_{1,c} \end{array} \right), \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{1,c} \end{pmatrix}$$

$$B_{1c} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{1c,c} \end{pmatrix}, \quad K_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ K_{12,c} \end{pmatrix}$$

où, 'nc' représente la partie non commandable et 'c' représente la partie commandable.

L'interaction de  $(\widehat{\Sigma}_2)$  sur  $(\widehat{\Sigma}_1)$  est représentée par :

$$K_{12}C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ K_{12,c}C_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global a les matrices  $A$  and  $B$  suivantes :

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c} A_{1,nc} & 0 & 0 \\ \hline A_{1,12} & A_{1,c} & K_{12,c}C_2 \\ \hline \star & \star & A_2 \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline B_{1,c} & 0 & B_{1c,c} \\ \hline 0 & B_2 & \star \end{array} \right)$$

Ces deux matrices montrent que l'état non commandable du  $(\widehat{\Sigma}_1)$  reste non commandable dans le grand système. Ainsi, la matrice de commandabilité du système global ne peut pas être une matrice de rang plein, cela conduit à une contradiction avec l'hypothèse de commandabilité du grand système. Donc, tous les sous-systèmes virtuels doivent être structurellement commandables.

### 4.3. Identifiabilité structurelle des systèmes locaux virtuels

Le théorème présenté dans cette partie est la contribution principale de cet article.

THÉORÈME 5. —

Si le système global  $(\Sigma)$ , structurellement commandable et observable, est structurellement globalement identifiable, alors tous les sous-systèmes  $(\widehat{\Sigma}_i)$  sont aussi structurellement globalement identifiables.

PREUVE. —

Pour tout  $i = 1, \dots, M$ , on suppose qu'on a deux paramétrisations  $p_i$  et  $\tilde{p}_i$  et une matrice  $T_i$  telles que :

$$T_i A_i = \tilde{A}_i T_i \quad (9)$$

$$T_i B_i = \tilde{B}_i \quad (10)$$

$$T_i B_{ic} = \tilde{B}_{ic} \quad (11)$$

$$\forall j \neq i, \quad T_i K_{ij} = \tilde{K}_{ij} \quad (12)$$

$$\tilde{C}_i T_i = C_i \quad (13)$$

En introduisant  $T = \text{diag}(T_i)_{i=1,M}$  on a alors :

$$\begin{aligned} TA &= \begin{pmatrix} T_1 A_1 & T_1 K_{12} C_2 & \dots & T_1 K_{1M} C_M \\ T_2 K_{21} C_1 & T_2 A_2 & \dots & T_2 K_{2M} C_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_M K_{M1} C_1 & T_M K_{M2} C_2 & \dots & T_M A_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 T_1 & \tilde{K}_{12} C_2 & \dots & \tilde{K}_{1M} C_M \\ \tilde{K}_{21} C_1 & \tilde{A}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{2M} C_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{K}_{M1} C_1 & \tilde{K}_{M2} C_2 & \dots & \tilde{A}_M T_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 T_1 & \tilde{K}_{12} \tilde{C}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{1M} \tilde{C}_M T_M \\ \tilde{K}_{21} \tilde{C}_1 T_1 & \tilde{A}_2 T_2 & \dots & \tilde{K}_{2M} \tilde{C}_M T_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{K}_{M1} \tilde{C}_1 T_1 & \tilde{K}_{M2} \tilde{C}_2 T_2 & \dots & \tilde{A}_M T_M \end{pmatrix} \\ &= \tilde{A} T \end{aligned} \quad (14)$$

et

$$\begin{aligned}
TB &= \begin{pmatrix} T_1 B_1 & 0 & \dots & \dots & T_1 B_{1c} \\ 0 & T_2 B_2 & \dots & \dots & T_2 B_{2c} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_M B_M & T_M B_{Mc} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & 0 & \dots & \dots & \tilde{B}_{1c} \\ 0 & \tilde{B}_2 & \dots & \dots & \tilde{B}_{2c} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{B}_M & \tilde{B}_{Mc} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{B} \tag{15}
\end{aligned}$$

Comme  $C$  et  $T$  sont des matrices diagonales par bloc alors  $\tilde{C}T = C$ . Et puisque le système global est par hypothèse globalement identifiable, alors en utilisant le théorème 2, on peut déduire que  $T = \text{Id}$  et  $p = \tilde{p}$ . Par conséquent, pour tout  $i = 1, \dots, M$  on a  $T_i = \text{Id}$  et  $p_i = \tilde{p}_i$ . D'où, par le théorème 2, on déduit que tous les sous-systèmes virtuels  $(\hat{\Sigma}_i)$  sont structurellement identifiables. Ceci conclut la preuve.

Le théorème 5 sera utilisé pour élaborer une procédure d'identification décentralisée. Ce point est expliqué dans la section suivante.

## 5. Procédure de l'identification décentralisée

### 5.1. Principe de la procédure d'identification décentralisée

L'intérêt du théorème 5 est de simplifier l'identification du système global en estimant les paramètres de chaque sous-système. On vérifie d'abord que le grand système est structurellement globalement identifiable. Dans ce cas, en utilisant le théorème 5, on peut déduire que les sous-systèmes sont aussi structurellement globalement identifiables. On va donc, sous-système par sous-système, identifier les paramètres associés. Pour ce faire, il faut récupérer le jeu d'entrée/sortie du sous-système considéré, ainsi que les données des sorties des sous-systèmes qui sont en couplage avec lui. On procède ensuite à l'identification de ses paramètres. Les paramètres globaux sont alors la réunion de tous les paramètres ainsi identifiés.

Cette procédure d'identification est testée sur un exemple académique.

### 5.2. Application : exemple académique

Pour montrer l'intérêt du théorème 5, l'étude sera faite en premier lieu sur un système global simple et structurellement globalement identifiable composé de  $M$  sous-systèmes couplés par les sorties et dont les paramètres sont connus.

### 5.2.1. Description du système

L'exemple choisi pour illustrer la démarche provient du domaine de la thermique des bâtiments. On considère un grand système représentant un bâtiment (ou une maison) composé de  $M$  pièces juxtaposées dont le modèle de couplage choisi est un couplage par les sorties entre les pièces voisines, de sorte que chaque sous-système (pièce) est couplé avec au plus deux sous-systèmes (voisins) seulement (figures 2 et 3).

On peut prouver en utilisant la méthode des similarités que le grand système est globalement identifiable quelle que soit sa taille  $M$ . On peut prouver également que les sous-systèmes sont globalement identifiables (Jedidi, 2016).

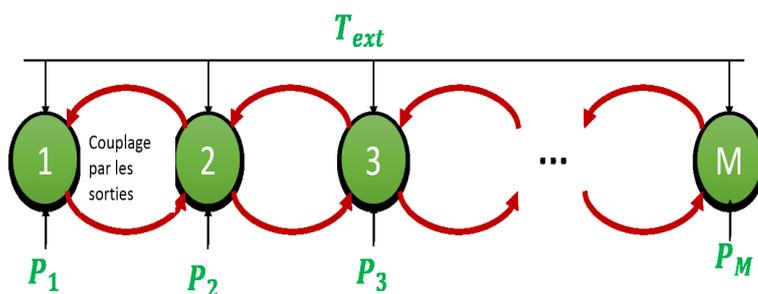


Figure 2. Couplage par les sorties entre les voisins (sous-systèmes) les plus proches seulement

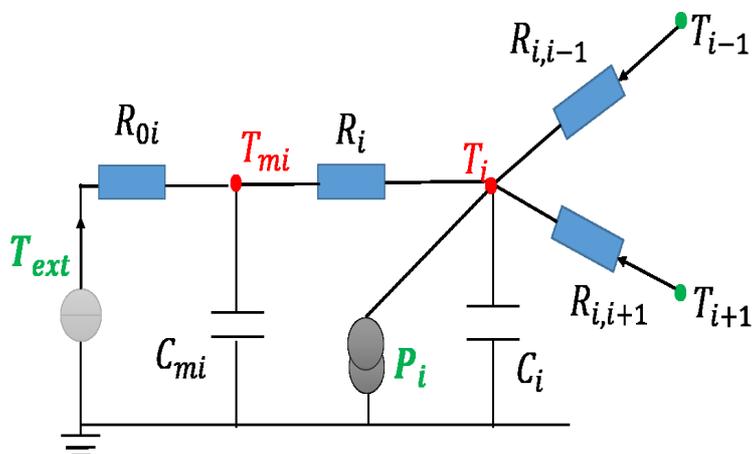


Figure 3. Schéma électrique équivalent du sous-système(i)

Chaque sous-système correspond à une pièce dont les entrées sont les flux de chauffage  $P_i$ , la température extérieure  $T_{ext}$  qui est commune à tous les sous-systèmes, et la (les) température(s) de l'air de la (les) pièce(s) voisine(s). La sortie est la température de l'air de la pièce  $T_i$ . La température du mur d'une pièce est notée  $T_{mi}$ . Le couplage représente l'influence thermique entre les pièces voisines, il se traduit par les

résistances de couplage  $R_{i,i-1}$  et  $R_{i,i+1}$  sur le modèle électrique équivalent donné en figure 3.

Les paramètres inconnus (à estimer) sont les résistances et les capacités pour chaque sous-système :  $C_{mi}$ ,  $C_i$ ,  $R_i$ ,  $R_{0i}$  et  $R_{ij}$  avec ( $j = i \pm 1$ ). Les valeurs de ces paramètres ont été choisies différentes d'une pièce à l'autre mais restent proches des valeurs données dans le tableau 1.

Tableau 1. Valeurs moyennes des paramètres

$p_i$	$C_{mi}$	$C_i$	$R_i$	$R_{0i}$	$R_{ij}$
valeur réelle	10	8	4	3.5	2.5

Chaque sous-système est décrit par la représentation d'état (4) avec :

$$A_i = \begin{pmatrix} \frac{-1}{C_{mi}} \left( \frac{1}{R_{0i}} + \frac{1}{R_i} \right) & \frac{1}{C_{mi} R_i} \\ \frac{1}{C_i R_i} & \frac{-1}{C_i} \left( \frac{1}{R_i} + \sum_{j=i\pm 1} \frac{1}{R_{ij}} \right) \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C_{mi} R_{0i}} \\ \frac{1}{C_i} & 0 \end{pmatrix} \quad K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_i R_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$C_i = ( 0 \quad 1 )$$

$$x_i = \begin{pmatrix} T_{mi} \\ T_i \end{pmatrix} \quad U_i = \begin{pmatrix} P_i \\ T_{ext} \end{pmatrix}$$

### 5.2.2. Conditions expérimentales

Pour procéder à l'identification, on a choisi des conditions idéales. Le même modèle a été utilisé pour la génération des données (simulation) et pour l'identification et des signaux d'entrée riches en fréquence de type PRBS (*Pseudo Random binary sequence*), RGS (*Random Gaussian Signal*) et RBS (*Random Binary Signal*). On a étudié deux cas : le premier cas où les sorties sont bruitées et le second dans lequel les sorties ne sont pas bruitées. Les paramètres ont été initialisés à 20 % des vraies valeurs.

### 5.2.3. Identification

On étudiera l'influence de 3 indicateurs pour comparer les résultats :

– **l'erreur paramétrique maximale (EPM)** de l'approche utilisée (globale ou décentralisée) correspond au maximum des erreurs calculées sur chacun des paramètres. Chaque erreur est définie par la formule suivante :

$$(EP)_i = 100 \left| \frac{\text{valeur estimée } (p_i) - \text{valeur réelle } (p_i)}{\text{valeur réelle } (p_i)} \right|$$

où  $p_i$  est un paramètre du système étudié.

– **l'ajustement (ou le fit) minimal (Am)** correspond au minimum des ajustements calculés sur les différentes sorties. Ces ajustements indiquent la ressemblance entre les sorties réelles et les sorties mesurées.

– **le temps d'identification** calculé comme la somme des temps d'identification de tous les sous-systèmes qui composent le grand système (calcul non parallélisé).

Les deux premiers indicateurs concernent la qualité du résultat de l'identification. Le troisième indicateur est intéressant pour analyser le gain éventuel en temps de calcul.

Pour analyser les résultats de l'identification, on a traité deux cas : le premier cas est l'identification dans un cadre idéal non bruité et pour le deuxième cas, on a ajouté des bruits sur les sorties.

#### 5.2.3.1. Identification : cas idéal

Les résultats des calculs des indicateurs pour un système global composé de  $M$  sous-systèmes sont les suivants : le tableau 2 donne les ajustements minimaux (Am) et le tableau 3 fournit les résultats d'erreur paramétrique maximale, dans les cas d'identification globale (IG) et décentralisée (ID).

Tableau 2. Influence de  $M$  sur l'ajustement

$M$	Am(IG)(%)	Am(ID)(%)
$M=2$	100	100
$M=3$	100	100
$M=4$	100	100
$M=5$	99.76	100
$M=6$	99.54	100
$M=7$	98.24	100
$M=10$	N/A	100

Tableau 3. Influence de  $M$  sur l'EPM

$M$	EPM (IG)(%)	EPM (ID)(%)
$M=2$	0	0
$M=3$	0	0
$M=4$	0	0
$M=5$	0.64	0
$M=6$	0.98	0
$M=7$	1.2	0
$M=10$	N/A	0

A partir de ces résultats, on peut remarquer que plus le nombre des sous-systèmes est grand, et plus l'identification du grand système devient compliquée : par exemple pour  $M = 10$  (on a 20 états et 49 paramètres) la procédure d'identification échoue à

donner un résultat. On note aussi, dans le cas global, que le pourcentage des erreurs paramétriques augmente si la taille du système augmente, et la valeur minimale des fits des sorties diminue progressivement, ce qui montre la dégradation de la qualité de l'identification. Par contre, en utilisant l'approche décentralisée (identification de chaque sous-système) on obtient des bons résultats d'identification avec un ajustement de 100 % et une erreur paramétrique nulle.

On a fait aussi une comparaison du temps d'identification entre les deux approches. Le tableau 4 compare le temps d'identification pour le système global (IG) et le temps d'identification décentralisée (ID).

Tableau 4. Influence de  $M$  sur le temps d'identification

$M$	temps (IG) (min)	temps (ID) (min)
$M=2$	2.65	1.75
$M=3$	5.77	2.57
$M=4$	7.10	4.20
$M=5$	9.15	5.14
$M=6$	14.20	6.28
$M=7$	19.30	7.16
$M=10$	N/A	11.25

Les résultats montrent un autre intérêt du théorème 5 qui est la réduction du temps d'identification dans l'approche décentralisée par rapport à celui de l'approche globale.

Cet exemple académique simple met en avant l'intérêt du théorème 5 et de la procédure d'identification qui en découle.

### 5.2.3.2. Identification : cas bruité (bruit sur les sorties)

Dans le cadre d'une validité de l'approche utilisée, il est intéressant de regarder comment les résultats d'identification sont sensibles aux bruits. Pour étudier ce point, on a ajouté des bruits gaussiens sur toutes les sorties pour un système global composé de 6 sous-systèmes (figure 4). On a augmenté progressivement le rapport signal sur bruit (SNR) et on a calculé la moyenne des fits minimaux pour 20 tirages de Monte Carlo, pour l'approche globale et l'approche décentralisée comme le montre la figure 5. On a remarqué aussi qu'avec l'approche décentralisée on a une réduction de 60 % sur la moyenne du temps de calcul d'identification par rapport à l'approche globale.

Cette expérience semble montrer que la démarche proposée est moins sensible aux bruits de mesure. Cet aspect sera exploité dans des travaux futurs, où une étude de sensibilité sera menée.

Dans le tableau 5, on présente les moyennes et les variances des paramètres estimés du sous système 1 dans le cas d'un SNR de 40 dB et pour 20 tirages de Monte Carlo.

Les bonnes valeurs de variances et de moyennes des paramètres qui sont proches des vraies valeurs montrent bien la bonne qualité de l'identification.

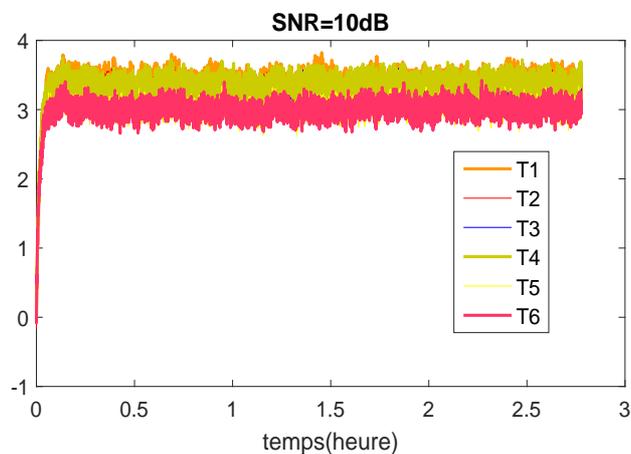


Figure 4. Les 6 sorties bruitées pour un  $SNR = 10dB$

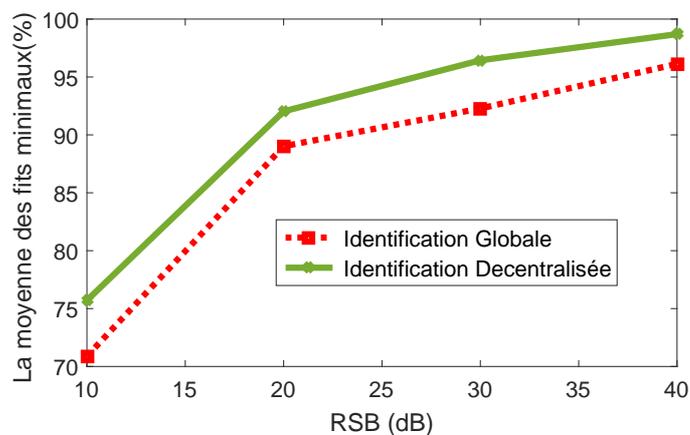


Figure 5. Comparaison des ajustements minimaux

Tableau 5. Paramètres du sous-système 1

Paramètre	$C_1$	$R_{01}$	$R_{12}$	$Cm_1$	$R_1$
Valeur réelle	8	3.5	2.5	10	4
Moyenne estimée	7.94	3.51	2.51	9.92	3.98
Variance	$3.8610^{-4}$	$4.5610^{-4}$	$4.3510^{-5}$	$7.110^{-3}$	$5.6810^{-4}$

## 6. Conclusion

L'identification des systèmes de grande taille est toujours considérée comme un problème compliqué. Dans cet article, on a montré que la prise en compte de la structure d'un modèle (couplage des sous-systèmes par les sorties) peut simplifier et réduire la complexité de l'identification des systèmes de grande taille. On a illustré cette technique sur un exemple inspiré des systèmes thermiques des bâtiments.

On a supposé que le système à identifier pouvait être représenté sous forme de plusieurs sous-systèmes couplés par les sorties. Dans des travaux futurs, il serait intéressant d'étudier l'extension de cette démarche à d'autres types de couplage (couplage par les entrées, par les états...).

De plus, d'un point de vue pratique, identifier les paramètres d'un système requiert des signaux d'entrée suffisamment riches. Or dans notre approche, les signaux associés aux entrées virtuelles des sous-systèmes ( $\hat{u}_{ij}$ ) sont en réalité des sorties du processus étudié qui peut filtrer certaines fréquences. L'impact de cette perte potentielle en richesse sera aussi étudié prochainement.

Enfin, les entrées virtuelles des sous-systèmes dépendent de l'état du système, ainsi ils peuvent construire des boucles de retour. Il sera alors intéressant d'étudier les techniques de l'identification en boucle fermée pour améliorer la qualité de l'identification.

## Bibliographie

- Bellman R., Astrom K. (1970). On structural identifiability. *Mathematical Biosciences*, vol. 7, n° 34, p. 329 - 339.
- Bernussou J., Titli A. (1982). Interconnected dynamical systems: Stability, decomposition and decentralization. *North-Holland, New York*, vol. 5.
- Chappell M., Godfrey K., Vajda S. (1990). Global identifiability of the parameters of nonlinear systems with specified inputs: A comparison of methods. *Mathematical Biosciences*, vol. 102, n° 1, p. 41 - 73.
- D'Andrea R., Dullerud G. (2003). Distributed control design for spatially interconnected systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, vol. 48, p. 1478-1495.
- Dion J.-M., Commault C., Van Der Woude J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems: a survey. *Automatica*, vol. 39, n° 7, p. 1125 - 1144.
- Gerdin M., Glad T., Ljung L. (2007). *Global identifiability of complex models, constructed from simple submodels*. Rapport technique. Automatic Control at Linkopings universitet(Sweden).
- Guinzy N., Sage A. (1973). System identification in large scale systems with hierarchical structures. *Computers and Electrical Engineering*, vol. 1, n° 1, p. 23 - 42.

- Jedidi S. (2016). *Preuve de l'identifiabilité structurelle d'un grand système de taille M*. Rapport technique. CentraleSupélec. Consulté sur [www.rennes.supelec.fr/ren/perso/rbourdai/Safa/RapportInterneJedidi.pdf](http://www.rennes.supelec.fr/ren/perso/rbourdai/Safa/RapportInterneJedidi.pdf)
- Ljung L., Glad T. (1994). On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica*, vol. 30, n° 2, p. 265 - 276.
- Massioni P., Verhaegen M. (2008). Subspace identification of circulant systems. *Automatica*, vol. 44, n° 11, p. 2825 - 2833.
- Mesarovic M., Macko D., Takahara Y. (1970). Theory of hierarchical multi-level systems. *Academic Press*.
- Morosan P., Bourdais R., Dumur D., Buisson J. (2010). Building temperature regulation using a distributed model predictive control. *Energy and Buildings*, vol. 42, n° 9, p. 1445 - 1452.
- Norton J. (1982). An investigation of the sources of nonuniqueness in deterministic identifiability. *Math Biosciences*, vol. 60, p. 89-108.
- Perasso A. (2009). *Identifiabilité de paramètres pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles : Application à la dynamique des populations*. Thèse de doctorat non publiée, Université Paris-Sud XI.
- Profos G., Delgado M. (1995). Identifiability of linear systems represented by Bond Graphs. In *Proceedings of bond Graph modeling and simulation*.
- Siljak D. (1991). *Decentralized control of complex system* (vol. 184; G. I. o. T. William F. Ames, Ed.). Georgia Institute of Technology.
- Van Den Hof P. M., Dankers A., Heuberger P. S., Bombois X. (2013). Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods. *Automatica*, vol. 49, n° 10, p. 2994 - 3006.
- Van Den Hof J. M. (1998). Structural identifiability of linear compartmental systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n° 6, p. 800-818.
- Walter E. (1982). *Identification of state space models*. Springer Verlag.
- Walter E. (1987). *Identifiability of state space models*. Springer Verlag.
- Willems J. L. (1986). Structural controllability and observability. *System and Control Letters*, vol. 8, n° 1, p. 5-12.

Article soumis le 10/09/2015

Accepté le 27/06/2016

