
Identification fréquentielle de systèmes par modèle non entier en utilisant la méthode des sous-espaces

Elena Ivanova, Rachid Malti, Xavier Moreau

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système, IMS UMR 5218
Université de Bordeaux, 351 Cours de la Libération
F-33405 Talence cedex, France
prénom.nom@ims-bordeaux.fr

RÉSUMÉ. Dans cet article, un algorithme basé sur la méthode des sous-espaces est présenté pour l'identification de systèmes par modèle non entier à partir de données fréquentielles. Les matrices de la pseudo-représentation d'état sont d'abord estimées par la méthode des sous-espaces utilisant les décompositions QR et en valeurs singulières. Ensuite, l'ordre de dérivation commensurable est estimé en choisissant celui qui minimise le critère dans l'intervalle $]0, 2[$. C'est la première méthode développée pour l'identification de systèmes multi-entrées multi-sorties par modèle non entier dans le domaine fréquentiel.

ABSTRACT. In this paper, an algorithm based on subspace method from the MOESP (MIMO Output-Error State sPace) family is presented, for state-space identification of continuous-time fractional commensurate models, using samples of frequency data. As compared to the rational state-space representation, the commensurate differentiation order must be estimated besides the state-space matrices, estimated with conventional subspace-based techniques using QR and singular value decomposition. This is the first method developed for multi-input multi-output system identification of fractional models in the frequency domain.

MOTS-CLÉS : pseudo-représentation d'état non entière, méthode des sous-espaces, identification fréquentielle, contexte déterministe, contexte stochastique.

KEYWORDS: fractional state-space representation, subspace method, identification in frequency domain : deterministic and stochastic contexts.

DOI:10.3166/JESA.50.117-135 © 2017 Lavoisier

1. Introduction

De multiples algorithmes à temps discret (TD) basés sur la méthode des sous-espaces ont été développés dans la littérature (voir (Van Overschee, De Moor, 1996)) dont l'algorithme MOESP (*Multivariable Output Error State sPace algorithm*) utilisé par la suite.

L'identification de systèmes dans le domaine fréquentiel en utilisant la méthode des sous-espaces à partir de données discrètes est traitée dans (Liu, Miller, 1994; McKelvey, Ljung, 1996). Dans (Liu, Miller, 1994), un algorithme basé sur l'extraction de la plage fréquentielle d'observabilité (FORSE) est décrit et appliqué à l'identification d'un système ayant des données distribuées de manière non uniforme en présence d'un bruit blanc. Dans (McKelvey, Ljung, 1996), deux algorithmes basés sur la méthode des sous-espaces sont proposés pour l'identification de systèmes à partir de données échantillonnées uniformément et non uniformément. Dans ce dernier cas et en présence d'un bruit complexe, l'algorithme fournit une estimation biaisée en absence d'information sur la fonction de co-variance du bruit. Le cas de modèles à temps-continu (TC) y est également traité. Par ailleurs, dans (Akçay, Turkay, 2004 ; 2011) une amélioration est proposée pour traiter des données distribuées de manière uniforme et non uniforme dans le cas stochastique.

L'identification des systèmes à TC en utilisant la méthode des sous-espaces (4SID) est décrite dans (Mensler, Sanada, 2000), (Katayama, 2005), où le filtrage des données d'entrée-sortie est nécessaire pour le calcul des dérivées temporelles des signaux d'entrées-sorties. Dans (Haverkamp, 2001) et (Wang, Mokhtar, 2007) l'opérateur w (filtre passe-tout) est utilisé à la place de l'opérateur de Laplace et les données sont filtrées par un filtre de Laguerre.

Les algorithmes 4SID dans le domaine fréquentiel, en particulier l'algorithme MOESP, utilisant le filtre de Laguerre sont présentés dans (Overschee, Moor, 1996; Wang, Mokhtar, 2009; Yang, Sanada, 2000). Dans (Overschee, Moor, 1996) la méthode est appliquée à la fois dans le cas déterministe et dans le cas stochastique avec un spectre de bruit connu. Dans (Wang, Mokhtar, 2009), un exemple est traité dans le cas stochastique utilisant une approche basée sur les filtres FSF (*Frequency sampling filters*), détaillés dans (Wang, Cluet, 1997). L'identification de systèmes par la méthode des sous-espaces est comparée à l'algorithme d'estimation proposé dans (Neumayer R., Weigel, 2003). Les algorithmes 4SID sont développés dans le domaine fréquentiel pour les systèmes à TC et à TD avec des spectres de bruit inconnus dans (Pintelon, 2002).

Dans cet article, les méthodes de sous-espace sont appliquées pour l'identification de systèmes non entiers (Oustaloup, 1995) à partir de données fréquentielles. Les modèles non entiers ont présenté un intérêt croissant pendant les trois dernières décennies. En effet, de nombreux phénomènes de diffusion ont été modélisés par des fonctions de transfert non entières. En électrochimie, par exemple, la diffusion de charges dans les batteries acides est régie par des modèles de Randles (Sabatier *et al.*, 2006; Wang *et al.*, 2015) qui utilisent l'impédance de Warburg ayant un intégrateur d'ordre 0.5. Les

modèles non entiers sont utilisés pour décrire la diffusion thermique dans (Battaglia *et al.*, 2013 ; Datsko *et al.*, 2012 ; Gabano, Poinot, 2011 ; Maachou *et al.*, 2014 ; Siero-ciuk, 2015 ; Victor *et al.*, 2013). Dans la diffusion thermique des milieux semi-infinis homogènes, Battaglia (Battaglia *et al.*, 2001) rappelle que la solution exacte de l'équation de la chaleur lie le flux thermique à une dérivée d'ordre 0.5 de la température de la surface sur laquelle le flux est appliqué.

L'identification des systèmes dans le domaine fréquentiel en utilisant des modèles non entiers a été initiée par (Mathieu *et al.*, 1995). Récemment, Valério, Costa (2007) ont appliqué la méthode d'identification fréquentielle de Levy (1959), et ses améliorations (Sanathanan, Koerner, 1963 ; Lawrence, G.J., 1979), aux systèmes non entiers. La plupart des méthodes d'identification proposées sont basées sur la minimisation de la norme ℓ_2 (pondérée ou non) de l'erreur d'approximation. De plus, toutes ces méthodes utilisent une connaissance préalable pour fixer les ordres de dérivation. L'optimisation des ordres de dérivation est plus complexe car les modèles non entiers sont non linéaires par rapport à ces paramètres. La norme ℓ_2 de l'erreur d'approximation peut être non-convexe et des algorithmes à base de gradient pourraient converger vers un minimum local s'ils sont initialisés à son voisinage (Malti *et al.*, 2008). Dans (Malti *et al.*, 2010 ; Khemane *et al.*, 2012) une approche ensembliste est utilisée pour l'identification de systèmes en utilisant des modèles non entiers à partir de données fréquentielles.

Dans le domaine temporel, l'identification de systèmes par modèle non entier et par les méthodes de sous-espace a été traitée dans le contexte déterministe dans (Thomassin, Malti, 2009a) et dans le contexte stochastique dans (Thomassin, Malti, 2009b) et (Malti, Thomassin, 2013).

La pseudo-représentation d'état non entière introduit un paramètre supplémentaire qui est l'ordre commensurable (Oustaloup, 1995). Dans (Thomassin, Malti, 2009a) et (Thomassin, Malti, 2009b), la dimension de la matrice de transition est supposée connue et un algorithme de programmation non linéaire est proposé pour l'optimisation de l'ordre commensurable. Cependant, lorsque ni la dimension de la matrice de transition ni l'ordre commensurable ne sont connus, il devient plus difficile d'appliquer les algorithmes de sous-espace. On montre dans ce document, qu'une pseudo-représentation d'état ayant une dimension surestimée peut avoir plusieurs minima globaux. A cet effet, le nouveau concept de *transformation de similarité différentielle* pour des pseudo-représentations d'état est utilisé (Malti, Thomassin, 2013). En effet, une représentation d'état ayant un ordre de dérivation commensurable α et une dimension de la matrice de transition N peut être similaire à une représentation d'état ayant un ordre de dérivation α/k et une dimension de la matrice de transition kN , où k est un nombre entier.

Dans cet article, l'identification des systèmes à partir de données fréquentielles en utilisant la méthode des sous-espaces est considérée dans un contexte déterministe, puis stochastique. Dans la première section, la transformation de similarité différentielle est rappelée. Dans la deuxième partie, un système décrit par des modèles non entiers est traité dans le domaine fréquentiel selon la méthode MOESP ordinaire dans

un contexte déterministe pour un ordre de dérivation fixe. Les exemples montrent la similitude de plusieurs pseudo-représentations d'état. Un exemple avec simulations de Monte Carlo permet d'évaluer statistiquement les propriétés des estimateurs.

2. Systèmes non entiers

2.1. Du calcul non entier à la pseudo-représentation d'état non entière

Le concept de dérivation d'ordre arbitraire (non entier), $\mathcal{D}^\alpha = \left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ¹ a été défini au cours du 19e siècle. L'une des principales contributions à l'établissement de cette définition est due à Grünwald et Letnikov qui étendent la dérivation en utilisant des ordres non entiers réels ou complexes. La dérivée d'ordre non entier quand $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, ou l'intégrale quand $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$, de $x(t)$ est définie par (Podlubny, 1999) :

$$\mathcal{D}^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh)}{h^\alpha}.$$

où $\binom{\alpha}{k}$ désigne les coefficients du binôme de Newton. La transformée de Laplace, notée \mathcal{L} , est un outil algébrique plus concis qui permet d'écrire, en cas de conditions initiales nulles, (Podlubny, 1999) :

$$\mathcal{L}\{\mathcal{D}^\alpha x(t)\} = s^\alpha X(s), \text{ avec } X(s) \triangleq \mathcal{L}\{x(t)\},$$

où s est la variable de Laplace. Un système SISO non entier est régi par une équation différentielle non entière :

$$y(t) + a_1 \mathcal{D}^{\alpha_1} y(t) + \dots + a_{m_A} \mathcal{D}^{\alpha_{m_A}} y(t) = b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t) + b_1 \mathcal{D}^{\beta_1} u(t) + \dots + b_{m_B} \mathcal{D}^{\beta_{m_B}} u(t),$$

où $(a_j, b_i) \in \mathbb{R}^2$, et les ordres de dérivation $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m_A}, \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{m_B}$ sont des nombres réels positifs. La pseudo-représentation d'état d'un système MIMO non entier commensurable s'écrit (Oustaloup, 1995) :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad (2)$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur du pseudo-état, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont

1. $\mathbb{R}_{>0}$ est un ensemble des nombres réels positifs privé de 0.

des matrices constantes. Les conditions initiales nulles sont considérées tout au long du papier : $\mathbf{x}(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Matignon (Matignon, 1998) prouve que le système non entier (1)-(2) est stable si et seulement si :

$$0 < \alpha < 2 \quad \text{and} \quad \alpha \frac{\pi}{2} < |\arg(\lambda_k)| \leq \pi \quad \forall k = 1, \dots, n$$

où λ_k est la $k^{\text{ème}}$ valeur propre de A . La conversion de (1)-(2) vers la fonction de transfert MIMO est obtenue de la même façon que pour des systèmes rationnels par :

$$G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D.$$

2.2. Transformation de similarité différentielle

THÉORÈME 1. — *La pseudo-représentation d'état non entière (1)-(2), ayant un ordre commensurable α et $\dim(A) = n$, est équivalente à la pseudo-représentation d'état non entière :*

$$\mathcal{D}^{\left(\frac{\alpha}{k}\right)} \mathbf{x}(t) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} & A \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & I_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & \dots & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0_{n \times m} \\ 0_{n \times m} \\ \vdots \\ 0_{n \times m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \mathbf{u}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{(0_{p \times n} \quad 0_{p \times n} \quad \dots \quad 0_{p \times n} \quad C)}_{\mathbb{C}} \mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad (4)$$

ayant un ordre commensurable α/k et $\dim(A) = kn$, où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{kn}$ est un nouveau vecteur d'état, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{kn \times kn}$, $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{kn \times m}$, $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{p \times kn}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Démonstration voir (Malti, Thomassin, 2013).

2.3. Observabilité et contrôlabilité des pseudos-états

Dans (Matignon, Novel, 1996b ; 1997 ; Hotzel, Fliess, 1998 ; Sabatier *et al.*, 2012) l'observabilité et la contrôlabilité des systèmes non entiers sont traitées. Dans (Sabatier *et al.*, 2012), les auteurs traitent le problème de l'observabilité des véritables états (pas des pseudo-états) des systèmes non entiers, c. à d. (1)-(2) avec $\alpha = 1$, et ils concluent sur la non-observabilité des véritables états. Uniquement l'observabilité et la contrôlabilité des pseudo-états (1)-(2) sont nécessaires pour le développement des méthodes d'identification des systèmes non entiers par sous-espaces. Les conditions d'observa-

bilité et de contrôlabilité des pseudo-états sont similaires au cas rationnel avec des matrices d'observabilité et de contrôlabilité de plein rang :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]. \quad (6)$$

Malti et Thomassin montrent dans (Malti, Thomassin, 2013) que si le système (1)-(2) est observable et contrôlable, alors le système (3)-(4) est également observable et contrôlable.

3. Identification fréquentielle des systèmes non entiers par la méthode des sous-espaces

3.1. Contexte déterministe (algorithme MOESP)

Le problème d'identification est formulé comme l'estimation des matrices A , B , C , D de la pseudo-représentation d'état à TC (1)-(2), à partir de données échantillonnées dans le domaine fréquentiel $\{u(j\omega_l)\}_{l=1}^{l=N}$ et $\{y(j\omega_l)\}_{l=1}^{l=N}$. L'ordre commensurable α est supposé connu. La réponse de (1)-(2) dans le domaine fréquentiel est donnée par :

$$(j\omega)^\alpha X(j\omega) = AX(j\omega) + BU(j\omega), \quad (7)$$

$$Y(j\omega) = CX(j\omega) + DU(j\omega). \quad (8)$$

En calculant les réponses successives dans le domaine fréquentiel, un modèle linéaire étendu est obtenu :

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \Gamma_i \mathcal{X}(j\omega) + \Psi_i \mathcal{U}(j\omega), \quad (9)$$

dont les entrées et sorties sont données, grâce aux matrices de Hankel, par :

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega)^0 Y(j\omega) \\ (j\omega)^\alpha Y(j\omega) \\ \vdots \\ (j\omega)^{(i-2)\alpha} Y(j\omega) \\ (j\omega)^{(i-1)\alpha} Y(j\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}(j\omega) = \begin{bmatrix} (j\omega)^0 U(j\omega) \\ (j\omega)^\alpha U(j\omega) \\ \vdots \\ (j\omega)^{(i-2)\alpha} U(j\omega) \\ (j\omega)^{(i-1)\alpha} U(j\omega) \end{bmatrix}.$$

La matrice d'observabilité étendue Γ_i et la matrice bloc Toeplitz Ψ_i sont respectivement données par :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times n},$$

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ip \times im},$$

où i est un indice défini par l'utilisateur et qui est supérieur à l'ordre du système : $i > n$.

Supposons les données d'entrées/sorties disponibles pour N fréquences distinctes $\omega_l, l = 1, \dots, N$, le modèle linéaire étendu (9) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathcal{Y}_N = \Gamma_i \mathcal{X}_N + \Psi_i \mathcal{U}_N, \quad (10)$$

où $\mathcal{U}_N \in \mathbb{C}^{im \times N}$ est défini ci-dessous :

$$\mathcal{U}_N = \begin{bmatrix} (j\omega_1)^0 U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^0 U(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^\alpha U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^\alpha U(j\omega_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (j\omega_1)^{(i-2)\alpha} U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-2)\alpha} U(j\omega_N) \\ (j\omega_1)^{(i-1)\alpha} U(j\omega_1) & \cdots & (j\omega_N)^{(i-1)\alpha} U(j\omega_N) \end{bmatrix},$$

$\mathcal{Y}_N \in \mathbb{C}^{ip \times N}$ est défini de manière similaire à \mathcal{U}_N , et $\mathcal{X}_N \in \mathbb{C}^{n \times N}$:

$$\mathcal{X}_N = [X(j\omega_1) \quad X(j\omega_2) \quad \cdots \quad X(j\omega_N)].$$

L'équation (10) à valeurs complexes est décomposée en parties réelle et imaginaire :

$$\mathcal{Y}_N^{re} = \Gamma_i \mathcal{X}_N^{re} + \Psi_i \mathcal{U}_N^{re}, \quad (11)$$

où

$$\mathcal{Y}_N^{re} = [\Re \{ \mathcal{Y}_N \} \quad \Im \{ \mathcal{Y}_N \}] \in \mathbb{R}^{ip \times 2N}, \quad (12)$$

$$\mathcal{U}_N^{re} = [\Re \{ \mathcal{U}_N \} \quad \Im \{ \mathcal{U}_N \}] \in \mathbb{R}^{im \times 2N}, \quad (13)$$

$$\mathcal{X}_N^{re} = [\Re \{ \mathcal{X}_N \} \quad \Im \{ \mathcal{X}_N \}] \in \mathbb{R}^{n \times 2N}. \quad (14)$$

L'équation (11) permet d'utiliser l'identification de systèmes non entiers par la méthode des sous-espaces de la même façon que pour les systèmes rationnels à TD. L'algorithme MOESP ordinaire (Katayama, 2005) peut être appliqué, et son principe est le suivant :

- calculer une décomposition LQ de la matrice de données :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_N^{re} \\ \mathcal{Y}_N^{re} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}, \quad (15)$$

où $L_{11} \in \mathbb{R}^{im \times im}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{ip \times im}$, $L_{22} \in \mathbb{R}^{ip \times ip}$ avec les matrices L_{11} , L_{22} triangulaire inférieure, et $Q_1 \in \mathbb{R}^{2mN \times im}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{2mN \times ip}$ qui sont orthogonales ;

– décomposer en valeurs singulières (SVD) la matrice L_{22} par une approximation de l'espace de colonne de Γ_i :

$$L_{22} = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (16)$$

où $U_1 \in \mathbb{R}^{ip \times n}$ et $U_2 \in \mathbb{R}^{ip \times (ip-n)}$. Le nombre d'états n peut être estimé à partir de la SVD tel que $n = \dim \Sigma_1$ en absence de bruit ;

– estimer la matrice d'observabilité étendue :

$$\hat{\Gamma}_i = U_1 \Sigma_1^{1/2}; \quad (17)$$

– estimer la matrice \hat{C} : $\hat{C} = \hat{\Gamma}_i(1 : p, 1 : n)$;

– estimer la matrice \hat{A} en résolvant l'équation linéaire :

$$\hat{\Gamma}_i(1 : p(i-1), 1 : n) \hat{A} = \hat{\Gamma}_i(p+1 : ip, 1 : n); \quad (18)$$

– estimer les matrices \hat{B} et \hat{D} . A cet effet, on peut montrer que :

$$U_2^T \Psi_i = U_2^T L_{21} L_{11}^{-1}. \quad (19)$$

Définissons :

$$U_2^T \triangleq [\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{L}_i], \quad (20)$$

$$U_2^T L_{21} L_{11}^{-1} \triangleq [\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{M}_i], \quad (21)$$

avec $\mathcal{L}_k \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times p}$ et $\mathcal{M}_k \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times m}$ for $k = 1, \dots, i$. Ainsi, à partir de (19) :

$$\mathcal{L}_1 \hat{D} + \mathcal{L}_2 \hat{C} \hat{B} + \cdots + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{A}^{i-2} \hat{B} = \mathcal{M}_1,$$

$$\mathcal{L}_2 \hat{D} + \mathcal{L}_3 \hat{C} \hat{B} + \cdots + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{A}^{i-3} \hat{B} = \mathcal{M}_3,$$

⋮

$$\mathcal{L}_{i-1} \hat{D} + \mathcal{L}_i \hat{C} \hat{B} = \mathcal{M}_{i-1},$$

$$\mathcal{L}_i \hat{D} = \mathcal{M}_i.$$

Définissons $\bar{\mathcal{L}}_k = [\mathcal{L}_k \quad \cdots \quad \mathcal{L}_i] \in \mathbb{R}^{(ip-n) \times (i+1-k)p}$, $k = 2, \dots, i$, et obtenons un système surdéterminé d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \bar{\mathcal{L}}_2 \hat{\Gamma}_{i-1} \\ \mathcal{L}_2 & \bar{\mathcal{L}}_3 \hat{\Gamma}_{i-2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{i-1} & \bar{\mathcal{L}}_i \hat{\Gamma}_1 \\ \mathcal{L}_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i-1} \\ \mathcal{M}_i \end{bmatrix}, \quad (22)$$

où la matrice bloc de coefficients à gauche est de dimension $i(ip-n) \times (p+n)$. Les matrices \hat{B} et \hat{D} sont estimées en trouvant la solution par moindres carrés de (22).

3.2. Contexte stochastique (algorithme MOESP combiné aux filtres passe-bas)

Supposons maintenant que la sortie du système (1)-(2) est perturbée par un bruit blanc. La transformée de Laplace de (1)-(2) en présence d'un bruit additif $v(t)$ en sortie donne :

$$s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (23)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) + V(s). \quad (24)$$

Pour améliorer les résultats de l'estimation, il est nécessaire de filtrer la sortie du système perturbé. Haverkamp (Haverkamp, 2001) propose d'utiliser un filtre passe-tout $w = (s - a) / (s + a)$ et de remplacer l'opérateur de Laplace s par son équivalent en w : $s = a(1 + w) / (1 - w)$. Pour un modèle non entier avec un ordre de dérivation α , le même principe peut être appliqué, en remplaçant le filtre passe-tout précédent par : $w = (s^\alpha - a) / (s^\alpha + a)$. De ce fait, $s^\alpha = a(1 + w) / (1 - w)$. Le filtre obtenu permet de réduire l'effet du bruit de sortie :

$$L_0(s) = (1 - w) = 1 - \frac{s^\alpha - a}{s^\alpha + a} = \frac{2a}{s^\alpha + a}, \quad (25)$$

$$L_i(s) = (1 - w) w^i = 2a \frac{(s^\alpha - a)^i}{(s^\alpha + a)^{i+1}}, \quad (26)$$

L'équation (23) se transforme en :

$$a \frac{1 + w}{1 - w} X(s) = AX(s) + BU(s), \quad (27)$$

$$wX(s) = A_w X(s) + B_w (1 - w) U(s), \quad (28)$$

où

$$A_w = (A + aI)^{-1} (A - aI), \quad (29)$$

$$B_w = (A + aI)^{-1} B. \quad (30)$$

Pour l'équation de sortie (24) :

$$(1 - w) Y(s) = C(1 - w) X(s) + D(1 - w) U(s) + (1 - w) V(s), \quad (31)$$

$$(1 - w) Y(s) = C_w X(s) + D_w (1 - w) U(s) + (1 - w) V(s), \quad (32)$$

où

$$C_w = 2aC(A + aI)^{-1}, \quad (33)$$

$$D_w = D - C(A + aI)^{-1} B. \quad (34)$$

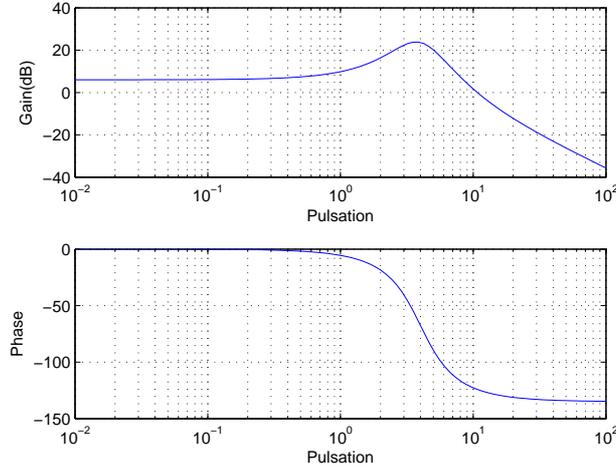


Figure 1. Diagrammes de Bode du filtre $L_2(s)$ eq.(26) avec $\alpha = 1.5$ et $a = 8$

Le filtre passe-bas (26) appliqué au système perturbé réduit le bruit en haute fréquence. Les diagrammes de Bode du filtre (26) avec $i = 2$ sont tracés sur la figure 1.

Ainsi, le système (23)-(24) est équivalent à :

$$wX(s) = A_w X(s) + B_w (1 - w) U(s), \quad (35)$$

$$L_0 Y(s) = C_w X(s) + D_w L_0 U(s) + L_0 V(s). \quad (36)$$

Les matrices de Hankel sont construites à partir de données filtrées :

$$\mathcal{Y}(j\omega) = \begin{bmatrix} L_0(j\omega) Y(j\omega) \\ L_1(j\omega) Y(j\omega) \\ \vdots \\ L_{i-1}(j\omega) Y(j\omega) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}(j\omega) = \begin{bmatrix} L_0(j\omega) U(j\omega) \\ L_1(j\omega) U(j\omega) \\ \vdots \\ L_{i-1}(j\omega) U(j\omega) \end{bmatrix}.$$

Après l'application du filtrage des données, l'algorithme MOESP est utilisé pour estimer les matrices A_w , B_w , C_w et D_w . Ensuite, les matrices A , B , C et D sont calculées par transformations inverses :

$$A = a(I + A_w)(I - A_w)^{-1}, \quad (37)$$

$$B = 2a(I - A_w)^{-1}B_w, \quad (38)$$

$$C = C_w(I - A_w)^{-1}, \quad (39)$$

$$D = D_w + C_w(I - A_w)^{-1}B_w. \quad (40)$$

4. Exemples d'illustration

4.1. Contexte déterministe

Dans cette section, un exemple simple est présenté pour illustrer la propriété de transformation différentielle (*Théorème 1*) des systèmes non entiers. A cet effet, l'algorithme MOESP ordinaire est appliqué dans le contexte déterministe. Considérons un système ayant 2 entrées, 2 sorties décrit par (1)-(2) et un ordre commensurable $\alpha = 1,5$. La dimension de la matrice d'état est $\dim(A) = n = 2$. Les données d'entrées/sorties sont générées dans le domaine fréquentiel. Le système est décrit par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0.1 \\ 0.5 & -2.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Les paramètres de l'algorithme sont fixés à $N = 100$ fréquences log-équidistantes dans la plage $\omega_i \in [10^{-3} \ 10^1]$ rad/s, les signaux d'entrée sont fixés respectivement à $U_1(j\omega_i) = 1$ ce qui correspondent dans le domaine temporel à une impulsion idéale de Dirac et $U_2(j\omega_i) = \exp(-t_0 j\omega_i)$ ce qui correspond dans le domaine temporel à une impulsion retardée de $t_0 = 3$ s.

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable $\alpha \in]0, 2[$ supposés inconnus et pour les quatre dimensions différentes de la matrice de transition $n = \dim(A)$: $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ et $n = 6$ (figure 2a, b, c et d respectivement).

L'ordre de dérivation commensurable est estimé par minimisation de la norme ℓ_2 de l'erreur de sortie, évaluée pour les 4 dimensions de la matrice de transition :

$$J = \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^p \left(\frac{\sum_{i=1}^N (Y_\ell(j\omega_i) - \hat{Y}_\ell(j\omega_i))^* (Y_\ell(j\omega_i) - \hat{Y}_\ell(j\omega_i))}{\sum_{i=1}^N (Y_\ell(j\omega_i))^* (Y_\ell(j\omega_i))} \right), \quad (42)$$

où Y_ℓ et \hat{Y}_ℓ sont respectivement la ℓ -ième sortie du système et du modèle.

Dans le premier cas, lorsque la dimension du modèle identifié correspond à la dimension réelle du système, l'optimum se trouve comme prévu à $\alpha = 1,5$ (figure 2). Lorsque $\dim(A) = 3$, l'optimum se trouve à la vraie valeur de l'ordre commensurable, $\alpha = 1,5$, et la matrice A est singulière, voire mal conditionnée, à cause de la chute de rang de $n = 3$ à $n = 2$ correspondant à la vraie dimension du système. Lorsque $\dim(A) = 4$ (respectivement $\dim(A) = 6$) deux (respectivement trois) optima globaux sont présents à 1,5 et à 0,75 (respectivement 1,5, 0,75 et 0,5), comme prévu par le *théorème 1*.

Lorsqu'à la fois la dimension du système n et l'ordre de dérivation α sont inconnus, il est préconisé de mettre en place une procédure itérative à partir d'une faible valeur de n (typiquement $n = 1$ ou 2) et d'évaluer l'ordre optimal α pour ce n .

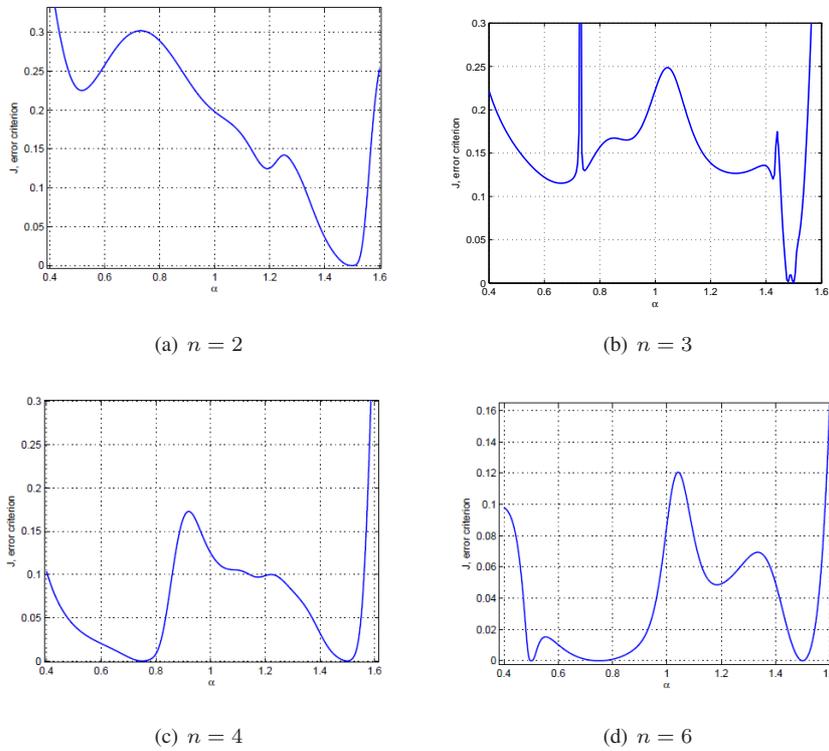


Figure 2. Critère d'erreur J en fonction de l'ordre commensurable α pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$

Si l'identification n'est pas jugée acceptable, n est incrémenté et de nouveau α est recalculé jusqu'à ce que le couple (n, α) soit jugé acceptable ou que la procédure d'identification soit jugée inefficace.

4.2. Contexte stochastique

Considérons le même système que celui de l'exemple précédent, avec une sortie perturbée par un bruit blanc complexe ayant un rapport signal sur bruit (RSB) de 30 et 50 dB :

$$RSB = 10 \log_{10} \left(\frac{Y^*(j\omega) Y(j\omega)}{V^*(j\omega) V(j\omega)} \right), \quad (43)$$

où V est un bruit blanc à valeurs complexes avec des contributions équivalentes des parties réelles et imaginaires.

Pour vérifier l'influence du paramètre de réglage a du filtre (26), la norme ℓ_2 (42) de l'erreur de sortie est tracée en fonction de a et de α sur la figure 3. Différentes

valeurs de a sont acceptables dans l'intervalle $[6, 14]$. Cette valeur est fixée à 8 pour la suite de l'article.

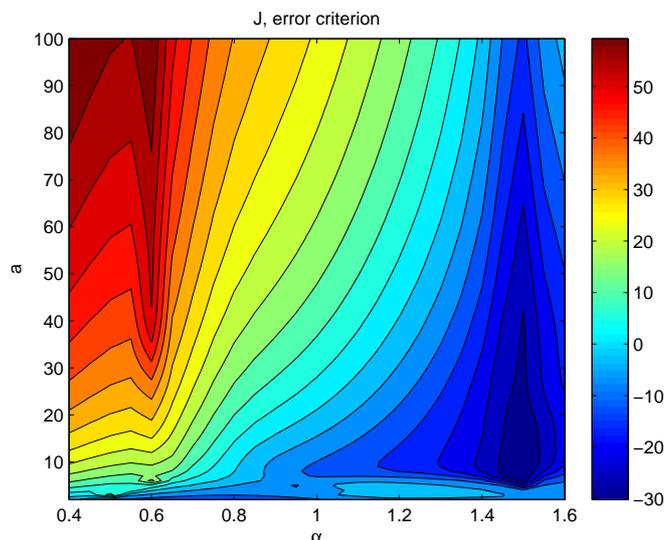


Figure 3. Critère d'erreur J (42) en dB en fonction de l'ordre de dérivation du système α et du paramètre a du filtre (26) avec $RSB=30$ dB

Le système est identifié pour différentes valeurs de l'ordre commensurable $\alpha \in]0, 2[$ supposés inconnus et pour différentes dimensions de la matrice de transition. Les résultats sont présentés sur la figure 4.

Lorsque $n = 2$ et $n = 3$, le minimum du critère J se trouve à $\alpha = 1.5$. Lorsque $n = 4$, le minimum est à $\alpha = 0,75$. Enfin, pour $n = 6$, le critère est très irrégulier dû au nombre important de paramètres. En conclusion, la transformation de similarité différentielle ne s'applique pas, en présence de bruit.

Maintenant le nombre de variables d'état est réglé à $\hat{n} = 2$ et l'ordre commensurable est réglé à la valeur réelle $\hat{\alpha} = 1,5$.

Les valeurs propres obtenues de la matrice estimée \hat{A} sont représentées en bleu sur la figure 5 et les vraies valeurs propres de la matrice A sont représentées en rouge. Comme le montre la figure 5 l'algorithme MOESP ordinaire ne présente pas de bonnes performances en présence de données bruitées avec un $RSB = 30$ dB, ce qui est généralement considéré comme un faible niveau de bruit.

Les moyennes des valeurs propres ainsi que leur écart type, présentés au tableau 1, indiquent que l'algorithme est très peu (voir non-) biaisé.

Maintenant l'algorithme MOESP combiné avec le filtre de Laguerre ayant $a = 8$ est appliqué en utilisant les mêmes paramètres de simulation et des niveaux de bruit

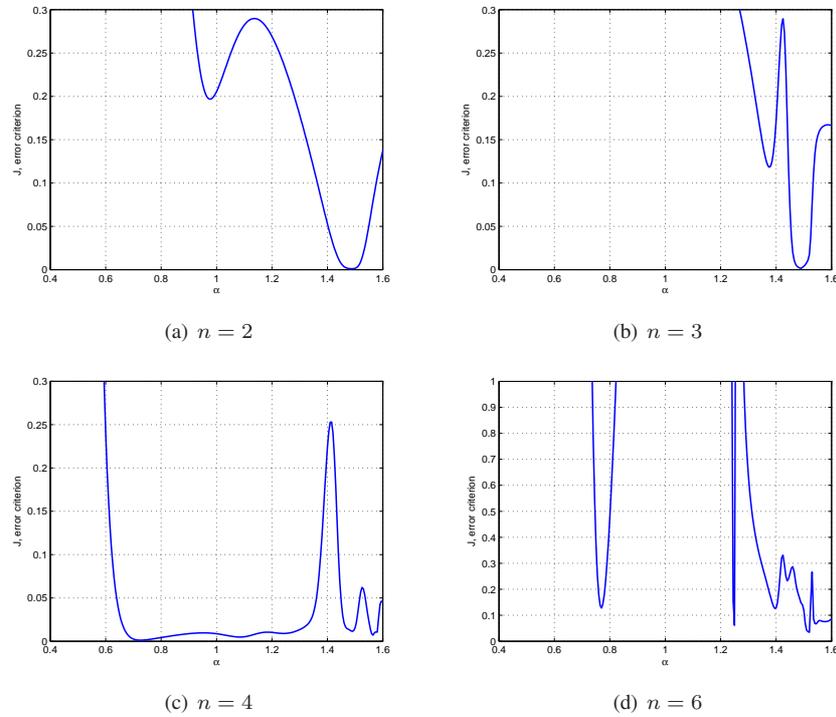


Figure 4. Critère d'erreur J en fonction de l'ordre commensurable α pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$, dans le contexte stochastique avec $RSB=30$ dB

plus importants avec $RSB = 30$ et 20 dB. La figure 6 montre que cet algorithme fonctionne mieux dans le contexte stochastique car les valeurs propres estimées de la matrice de transition sont moins dispersées.

Tableau 1. Moyennes des valeurs propres $p_{1,2} = \text{eig}(A)$ et leur écart type (σ_{p_1} et σ_{p_2}) pour trois simulations de Monte Carlo à différents niveaux de bruit

Vrais paramètres ou niveau de bruit (RSB)	\bar{p}_1	σ_{p_1}	\bar{p}_2	σ_{p_2}
Vrais paramètres	-3,058		-2,142	
30 dB	-3,058	0,016	-2,141	0,010
20 dB	-3,047	0,035	-2,151	0,027
10 dB	-2,99	0,12	-2,21	0,08

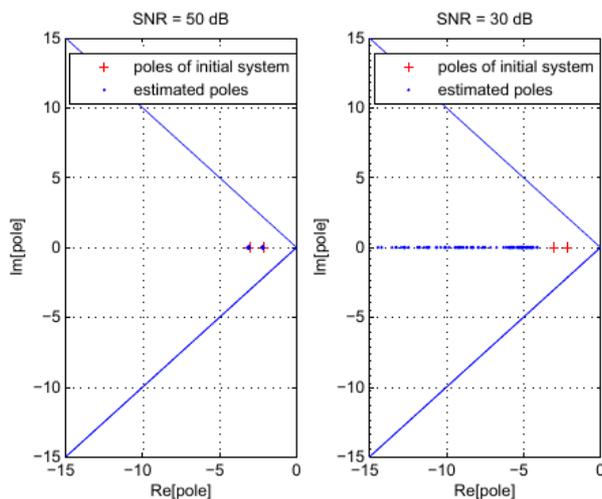


Figure 5. Valeurs propres estimées de la matrice A pour 50 réalisations pour différents RSBs sans utilisation du filtre (26)

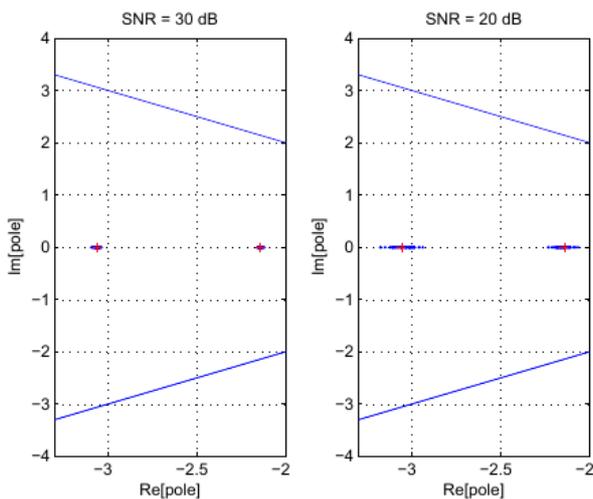


Figure 6. Valeurs propres estimées de la matrice \hat{A} pour 50 réalisations pour différents RSBs en utilisant le filtre (26)

4.3. Lorsque n et α sont inconnus

L'exemple décrit en section 4.1 est repris ici dans un contexte stochastique avec un niveau de bruit de $RSB = 30$ dB. Lorsqu'à la fois la dimension du système n et l'ordre de dérivation α sont inconnus, une procédure itérative est mise en place. La dimension de la matrice de transition est d'abord fixée à $n = 1$, et la norme ℓ_2 de l'erreur de sortie (42) est tracée en fonction de l'ordre commensurable sur la figure 7a qui montre que le minimum du critère, $\min(J) = 0,18$, se trouve à $\alpha = 1,1$. Ce critère étant jugé insatisfaisant, n est augmenté à 2 et la procédure est réitérée. Comme le montre la figure 7b, le minimum, $\min(J) = 0,001$, se trouve à $\alpha = 1,5$. Pour $n = 3$, la figure 7c montre que l'optimum du critère, $\min(J) = 0,002$, se trouve à $\alpha = 1,51$. Dans la mesure où l'évolution de l'erreur n'est pas significative, entre $n = 2$ et $n = 3$, la dimension $n = 2$ est retenue pour le système.

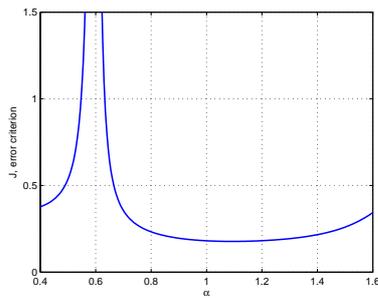
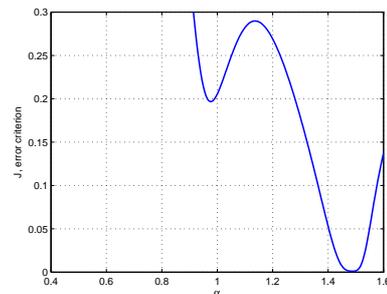
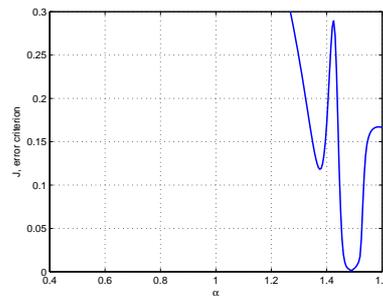
(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$

Figure 7. Critère d'erreur J en fonction de l'ordre commensurable α pour des dimensions différentes de la matrice de transition, $\dim(A) = n$, dans le contexte stochastique avec $RSB = 30$ dB

5. Conclusion

Dans cet article, un algorithme d'identification de systèmes non entiers utilisant la méthode des sous-espaces dans le domaine fréquentiel est présenté. Il illustre une caractéristique typique aux modèles non entiers : la transformation de similarité différentielle. Elle permet d'obtenir des minima globaux multiples dans un cas déterministe quand la dimension de la matrice d'état est surdimensionnée. Dans le cas stochastique, en présence d'un bruit blanc, l'algorithme MOESP combiné avec des filtres de Laguerre permet d'avoir une meilleure estimation. Il introduit cependant un paramètre supplémentaire a qui doit être réglé. En guise de perspective, il est prévu d'étudier l'influence du paramètre a en présence d'un bruit blanc et d'un bruit coloré.

Article soumis le 18/04/2016

Accepté le 27/06/2016

Bibliographie

- Akçay H., Turkay S. (2004). Frequency domain subspace-based identification of discrete-time power spectra from nonuniformly spaced measurements. *Automatica*, vol. 40, n° 8, p. 1333-1347.
- Akçay H., Turkay S. (2011). Frequency domain subspace-based identification of discrete-time power spectra from uniformly spaced measurements. *Automatica*, vol. 47, n° 2, p. 363-367.
- Battaglia J.-L., Cois O., Puigsegur L., Oustaloup A. (2001). Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, n° 14, p. 2671-2680.
- Battaglia J.-L., Maachou A., Malti R., Melchior P. (2013). Nonlinear heat diffusion simulation using volterra series expansion. *International journal of thermal sciences*, vol. 71, p. 80-87.
- Datsko B. (2012). Mathematical modeling of nonlinear dynamics in bistable reaction-diffusion systems with fractional derivatives. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, n° 2, p. 196-207.
- Gabano J., Poinot T. (2011). Estimation of thermal parameters using fractional modelling. *Signal Processing*, vol. 91, n° 4, p. 938-948.
- Haverkamp L. R. J. (2001). State space identification. theory and practice. *PhD thesis*.
- Hotzel R., Fliess M. (1998). On linear systems with a fractional derivation: Introductory theory and examples. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 45, p. 385-395.
- Katayama T. (2005). *Subspace methods for system identification*. Springer.
- Khemane F., Malti R., Raïssi T., Moreau X. (2012). Robust estimation of fractional models in the frequency domain using set membership methods. *Signal Processing*, vol. 92, p. 1591-1601.
- Lawrence P., G.J. R. (1979). Recursive identification for system models of transfer function type. *Proc. Instn Elec. Engrs.*, vol. 126, p. 283-288.

- Levy E. (1959). Complex curve fitting. *IRE Trans. Autom. Control*, vol. 4, p. 37-43.
- Liu K., Jacques R. N., Miller D. W. (1994). Frequency domain structural system identification by observability range space extraction. *Proc. Amer. Control Conf.*, vol. 1, p. 107-111.
- Maachou A., Malti R., Melchior P., Battaglia J.-L., Oustaloup A., Hay B. (2014). Nonlinear thermal system identification using fractional Volterra series. *Control Engineering Practice*, vol. 29, p. 50 - 60.
- Malti R., Raïssi T., Thomassin M., Khemane F. (2010). Set membership parameter estimation of fractional models based on bounded frequency domain data. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, n° 4, p. 927 - 938. (IF: 2.697, SNIP: 2.055)
- Malti R., Thomassin M. (2013). Differentiation similarities in fractional pseudo-state space representations and the subspace-based methods. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 16, p. 273-287. Consulté sur <http://dx.doi.org/10.2478/s13540-013-0017-8>
- Malti R., Victor S., Oustaloup A. (2008). Advances in system identification using fractional models. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 3, n° 2, p. 021401,1-7. (IF: 0.571, SNIP: 1.500)
- Mathieu B., Oustaloup A., Levron F. (1995). Transfer function parameter estimation by interpolation in the frequency domain. In *European control conference (ecc)*. Rome, Italie.
- Matignon D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems. In *Esaim : Proceedings, fractional differential systems: Models, methods and applications*, vol. 5, p. 145–158.
- Matignon D., Novel B. d'Andréa. (1996b, July). Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In *Imacs*, vol. 2, p. 952-956. Lille, France.
- Matignon D., Novel B. d'Andréa. (1997, December). Observer-based controllers for fractional differential systems. In *36th IEEE conference on decision and control*, p. 4967-4972.
- McKelvey T., Ljung L. (1996). Subspace-based multivariable system identification from frequency response data. *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 41, n° 7.
- Mensler M., Sanada K. W. (2000). Subspace method for continuous-time system identification. *Proc ISCIE Int Symp Stoch Syst Theory Appl (Inst Syst Control Inf Eng)*, vol. 32, p. 21-26.
- Neumayer R., Stelzer A., Weigel R. (2003). A comparison of complex curve fitting and subspace identification algorithm for circuit modeling using frequency domain data. *33rd European Microwave Conference, Munich*, vol. 3, p. 1007-1010.
- Oustaloup A. (1995). *La dérivation non-entière: théorie, synthèse et applications*. Hermès - Paris.
- Overschee P. V., Moor B. D. (1996). Continuous-time frequency domain subspace system identification. *Signal Processing*, vol. 52, p. 179-194.
- Pintelon R. (2002). Frequency domain subspace system identification using non-parametric noise models. *Automatica*, vol. 38, p. 1295-1311.
- Podlubny I. (1999). *Fractional differential equations*. San Diego, Academic Press.
- Sabatier J., Aoun M., Oustaloup A., Grégoire G., Ragot F., Roy P. (2006). Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation. *Signal Processing*, vol. 86, n° 10, p. 2645-2657.

- Sabatier J., Farges C., Merveillaut M., Feneteau L. (2012). On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European Journal of Control*, vol. 18, n° 3, p. 260-271.
- Sanathanan C., Koerner J. (1963). Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials. *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-8, p. 56-58.
- Sierociuk D., Skovranek T., Macias M., Podlubny I., Petras I., Dzielinski A., Ziubinski P. (2015). Diffusion process modeling by using fractional-order models. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 257, p. 2-11.
- Thomassin M., Malti R. (2009). Multivariable identification of continuous-time fractional system. In *ASME IDETC/CIE Conferences*, p. DETC2009-86984. San Diego CA USA.
- Thomassin M., Malti R. (2009). Subspace method for continuous-time fractional system identification. In *Proc. of the 15th ifac symp. on system identification (sysid 2009)*. Saint-Malo, France.
- Valério D., Sabatier J., Agrawal O. P., Tenreiro Machado J. A. (2007). Advances in fractional calculus theoretical developments and applications in physics and engineering. Springer.
- Van Overschee P., De Moor B. (1996). *Subspace identification for linear systems: theory, implementation, applications*. Springer.
- Victor S., Malti R., Garnier H., Oustaloup A. (2013). Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*, vol. 49, n° 4, p. 926-935.
- Wang B., Li S.-E., Peng H., Liu Z. (2015). Fractional-order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. *Journal of Power Sources*, vol. 293, p. 151 - 161.
- Wang L., Cluet W. R. (1997). Frequency sampling filters: an improved model structure for step-response identification. *Automatica*, vol. 33, p. 939-944.
- Wang L., Mokhtar R. M. (2007). Continuous-time system identification using subspace methods. *Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal (AN-ZIAM)*, vol. 47, p. 712-732.
- Wang L., Mokhtar R. M. (2009). 2-stage identification based on frequency sampling filters and subspace frequency response. *Elektrika*, vol. 11, p. 27-33.
- Yang Z.-J., Sanada S. (2000). Frequency domain subspace identification with the aid of the w-operator. *Electrical Engineering in Japan*, vol. 132, n° 1, p. 326-334.

