
Entrée optimale pour l'estimation des systèmes dynamiques non linéaires à erreurs bornées

Application en aéronautique

Qiaochu Li¹, Carine Jauberthie², Lilianne Denis-Vidal¹,
Zohra Cherfi³, Moussa Maïga²

1. *Laboratoire Mathématiques Appliquées de Compiègne (LMAC)*
Université de Technologie de Compiègne
EA 2222 — 15 Rue Roger Couitolenc, 60200 Compiègne, France
qiaochu.li,lilianne.denis-vidal@utc.fr

2. *LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, UPS, Toulouse, France*
cjaubert,mmaiga@laas.fr

3. *Laboratoire Roberval*
UMR7337 - Université de Technologie de Compiègne, CNRS
15 Rue Roger Couitolenc, 60200 Compiègne, France
zohra.cherfi@utc.fr

RÉSUMÉ. Le travail proposé dans cet article concerne le développement d'une méthodologie d'obtention d'entrée optimale pour l'estimation de paramètres d'un modèle dynamique non linéaire dans un contexte à erreurs bornées. Dans ce contexte, les bruits de mesure et paramètres à estimer sont supposés varier dans des intervalles bornés, de bornes connues ; ne sont alors considérées dans les calculs que les bornes des intervalles. L'estimation des paramètres du modèle s'effectue en combinant les outils de l'intégration numérique garantie et l'inversion ensembliste. L'obtention de l'entrée optimale permettant une estimation plus précise des paramètres s'effectue en utilisant une analyse de sensibilités, ce qui est la contribution principale de notre travail. Un critère d'optimisation d'entrée est développé. La procédure d'obtention d'entrée optimale présentée dans cet article est appliquée à un modèle issu de l'aéronautique. Les résultats d'estimation de paramètres obtenus en utilisant l'entrée optimale sont comparés à ceux obtenus avec une entrée non optimale. Les résultats numériques mettent en exergue le potentiel de cette approche.

ABSTRACT. This paper deals with optimal input design for parameter estimation in a bounded error context. Interval analysis will be served as a tool in this paper. In this context, the measurement noise and parameters are considered bounded. The model parameter estimation is realized by combining the validated numeric integration tools and set-membership operations. To

improve the accuracy on parameters, the sensitivity analysis based optimal input design is thus proposed, more accurate estimation results have been obtained which is our main contribution. This process for obtaining optimal input design has been tested on an aircraft model. The estimation results on parameters by using optimal input have been compared with the case by using a non optimal input.

MOTS-CLÉS : estimation d'état, estimation de paramètres, système non linéaire, erreurs bornées, entrée optimale, analyse par intervalles.

KEYWORDS: state estimation, parameter estimation, nonlinear system, bounded error, optimal input design, interval analysis.

DOI:10.3166/JESA.50.95-115 © 2017 Lavoisier

1. Introduction

Préalablement à l'estimation des paramètres d'un modèle à partir de données expérimentales, il est important de sélectionner les conditions expérimentales les plus sensibilisantes pour cette estimation. L'information la plus pertinente est ainsi obtenue. C'est la démarche de *planification d'expériences* ou *optimisation d'essais*. Elle permet de définir les conditions d'expériences les plus intéressantes parmi un ensemble admissible, cet ensemble traduisant les diverses contraintes (comme par exemple, sur les sorties, les entrées,...) que le protocole expérimental doit vérifier afin de pouvoir être effectivement mis en œuvre. La planification d'expériences constitue une étape essentielle car une expérience mal conçue peut rendre vaine toute tentative d'interprétation des données recueillies sur le système. Afin de résoudre le problème d'optimisation d'essais, il faut définir un critère d'optimalité relié au but poursuivi qui est ici l'amélioration des mesures utilisées en estimation. Ce critère est ensuite optimisé par rapport à l'ensemble des variables disponibles à l'expérimentateur, tout en respectant l'ensemble des contraintes.

Les méthodes stochastiques classiques de planification d'expériences pour l'estimation de paramètres cherchent, intuitivement, le protocole expérimental qui permet de minimiser une certaine norme liant la *valeur exacte* des paramètres et leurs estimées. Ces méthodes sont basées sur la matrice d'information de Fisher comme, par exemple, le critère de D-optimalité qui consiste à maximiser le déterminant de cette matrice. Le travail proposé dans cet article ne se place pas dans un contexte stochastique où les bruits de mesures et perturbations sont modélisés par des variables aléatoires mais dans un contexte à erreurs bornées ; c'est-à-dire que les bruits de mesures et paramètres sont supposés varier dans des intervalles bornés et de bornes connues. Nous utilisons alors les outils de l'analyse par intervalles initiée par R.E. Moore dans (Moore, 1966). Il existe des méthodes efficaces d'estimation de paramètres dans un contexte à erreurs bornées, elles utilisent par exemple l'algorithme SIVIA (*Set Inverter Via Interval Analysis*) (Jaulin, Walter, 1993) ou encore les contracteurs (Chabert, 2014). Les résultats d'estimation obtenus sont dits *garantis* c'est-à-dire que l'ensemble de paramètres solutions du problème considéré contient toutes les so-

lutions du problème (les conditions initiales sont supposées appartenir à un produit cartésien d'intervalles bornés, l'ensemble de recherche de paramètre initial est donné sous forme de produit cartésien d'intervalles bornés, le bruit de mesures est également donné sous forme d'intervalles bornés). Il existe également des méthodes d'intégration numérique garantie d'équations différentielles ordinaires, citons par exemple, (Schweppe, 1968 ; 1973 ; Nazin, Polyak, 2005 ; Raïssi *et al.*, 2004) ou (Walter, Kieffer, 2007).

Cet article porte sur la recherche d'entrée optimale pour l'estimation de paramètres et nous proposons une approche originale de recherche d'entrée optimale pour estimer des paramètres à partir de mesures bruitées mais bornées. A notre connaissance, ce sujet a été peu traité dans la littérature de l'analyse par intervalles. Cet article se décompose de la façon suivante : la section 2 présente le problème considéré ainsi que le cas d'étude sur lequel la méthodologie développée sera appliquée. Il s'agit d'un modèle issu du domaine de l'aéronautique, il décrit le comportement d'un avion en vol longitudinal. La section 3 introduit des outils de base de l'analyse par intervalles, que ce soit pour l'estimation d'état ou de paramètres. Dans la section 4, la méthodologie d'obtention d'entrée optimale pour les systèmes dynamiques non linéaires est développée ; le critère retenu pour l'optimisation d'entrée est justifié. La section 5 concerne l'optimisation de l'entrée du cas d'étude. Dans cette section deux entrées sont considérées, l'une est celle obtenue par notre méthodologie, l'autre est une entrée non optimisée. Les résultats obtenus en termes d'estimation sont analysés. Pour finir, la conclusion et les perspectives de recherche sont présentées en section 6.

2. Présentation du problème et cas d'étude

Cet article porte sur la recherche d'entrée optimale pour l'estimation de paramètres de systèmes dynamiques non linéaires à incertitudes bornées. Ils sont supposés être décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t, p) = f(x(t, p), p) + u(t)g(x(t, p), p), \\ y(t, p) = h(x(t, p), p), \\ x(0) \in [x_0], p \in [p_0], \end{cases} \quad (1)$$

où $x(t, p)$ et $y(t, p)$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de sortie du modèle. Ils sont tels que $x(t, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $y(t, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$. La condition initiale $x(0)$ est supposée appartenir à une *boîte* donnée $[x_0]$, de bornes finies. $u(t)$ représente l'entrée du modèle, elle appartient à un domaine \mathcal{U} . Le vecteur p représente le vecteur des paramètres à estimer et $p \in \mathbb{R}^{n_p}$. Il appartient à une boîte initiale donnée $[p_0]$ de bornes finies. Le temps t appartient à l'intervalle $[0, t_{max}]$. Les fonctions f , g , et h sont des fonctions non linéaires. f et g sont supposées analytiques sur M pour chaque $p \in [p_0]$, où M est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^{n_x} tel que $x(t, p) \in M$ pour chaque $p \in [p_0]$ et $t \in [0, t_{max}]$.

Les mesures z sont supposées données, à l'instant t_i par :

$$z(t_i) = y(t_i, p) + v(t_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

où le bruit de mesure $v(t_i)$ appartient à la boîte $[v(t_i)]$. N représente le nombre total de temps d'échantillonnage.

Le cas d'étude considéré dans cet article provient du domaine de l'aéronautique et décrit le comportement longitudinal d'un avion en mouvement. La projection des équations de la mécanique du vol sur le trièdre aérodynamique conduit au système suivant (Jauberthie, 2002) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V} = -g \sin(\theta - \alpha) - \frac{1}{2m} \rho S V^2 (C_x^0 + C_{x\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{x\delta_m}(\delta_m - \delta_{m_0})), \\ \dot{\alpha} = \frac{2}{2mV + \rho S l V C_{z\dot{\alpha}}} \left\{ mVq + mg \cos(\theta - \alpha) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_z^0 + C_{z\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{zq} \frac{ql}{V} + C_{z\delta_m}(\delta_m - \delta_{m_0})) \right\}, \\ \dot{q} = \frac{1}{2B} \rho S l V^2 \left\{ C_m^0 + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{mq} \frac{ql}{V} \right. \\ \quad \left. + C_{m\dot{\alpha}} \frac{2l}{2mV^2 + \rho S l V^2 C_{z\dot{\alpha}}} \left[mVq + mg \cos(\theta - \alpha) \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \rho S V^2 (C_z^0 + C_{z\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{zq} \frac{ql}{V} + C_{z\delta_m}(\delta_m - \delta_{m_0})) \right] \right. \\ \quad \left. + C_{m\delta_m}(\delta_m - \delta_{m_0}) \right\}, \\ \dot{\theta} = q. \end{array} \right. \quad (3)$$

Dans ce système, le vecteur d'état est donné par $(V, \alpha, q, \theta)^T$. Tout l'état est mesuré (Coton *et al.*, 2001). L'entrée u est δ_m . Les paramètres à estimer sont $C_{z\dot{\alpha}}$, C_{zq} . Les autres coefficients sont supposés connus. Une description plus précise de ce modèle est donnée dans (Jauberthie, 2002) et (Coton *et al.*, 2001).

3. Estimation d'état et de paramètres en utilisant l'analyse par intervalles

3.1. Analyse par intervalles

L'idée clé de l'analyse par intervalles est de raisonner sur des intervalles au lieu de nombres réels et sur des boîtes au lieu de vecteurs réels. La motivation première de cette approche était d'obtenir des résultats garantis à partir du calcul en nombres flottants des ordinateurs (Moore, 1966).

Les résultats présentés ci-dessous sont principalement tirés de (Jaulin *et al.*, 2001).

DÉFINITION 1. — *Un intervalle réel $[u] = [\underline{u}, \bar{u}]$ est un sous ensemble fermé et connexe de \mathbb{R} où \underline{u} et \bar{u} représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de $[u]$.*

L'ensemble des intervalles réels de \mathbb{R} est noté \mathbb{IR} .

DÉFINITION 2. — *La longueur d'un intervalle $[u]$ est définie par $w([u]) = \bar{u} - \underline{u}$.*

DÉFINITION 3. — *Le milieu d'un intervalle $[u]$ est défini par $m([u]) = (\bar{u} + \underline{u})/2$.*

DÉFINITION 4. — *La mignitude d'un intervalle est définie par $\text{mig}([u]) = \min(|\underline{u}|, |\bar{u}|)$ si $0 \notin [u]$, sinon $\text{mig}([u]) = 0$.*

DÉFINITION 5. — *La magnitude d'un intervalle est définie par $\text{mag}([u]) = \max(|\underline{u}|, |\bar{u}|)$.*

Deux intervalles sont égaux si et seulement si $\underline{u} = \underline{v}$ et $\bar{u} = \bar{v}$. Les opérations sur les réels sont étendues aux intervalles (Moore, 1966).

Etant donnés deux intervalles $[u]$ et $[v]$, on définit les opérations de la manière suivante :

$$\circ \in \{+, -, *, /\}, \quad [u] \circ [v] = \{x \circ y \mid x \in [u], y \in [v]\}.$$

DÉFINITION 6. — *Un vecteur intervalle (boîte) $[x]$ est un vecteur dont les composantes sont des intervalles et peut être considéré comme le produit cartésien d'intervalles :*

$$[x] = [x_1] \times [x_2] \dots \times [x_n].$$

\mathbb{IR}^n représente l'ensemble des vecteurs intervalles de dimension n .

DÉFINITION 7. — *Une matrice intervalle est une matrice dont les coefficients sont des intervalles et l'ensemble des matrices intervalles réelles de dimension $n \times m$ est noté $\mathbb{IR}^{n \times m}$.*

DÉFINITION 8. — *La longueur d'un vecteur intervalle (ou une matrice intervalle) est la longueur maximale de ses éléments. Le milieu d'un vecteur intervalle (resp. une matrice intervalle) est un vecteur (resp. une matrice) composé des milieux de ses composantes intervalles (resp. coefficients intervalles).*

Les opérations classiques sur les vecteurs intervalles (resp. matrices intervalles) sont des extensions directes des opérations sur les vecteurs ponctuels (resp. matrices ponctuelles) (Moore, 1966). Ainsi les notions de mignitude et magnitude définies pour les intervalles peuvent s'étendre aux vecteurs et matrices intervalles composantes par composantes.

DÉFINITION 9. — *Soit une fonction f telle que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, l'image d'un vecteur intervalle $[u]$ par f est définie par :*

$$f([u]) = \{f(x) \mid x \in [u]\}.$$

Une fonction d'inclusion $[f]$ de f est une fonction de \mathbb{IR}^n à valeurs dans \mathbb{IR}^m telle que :

$$\forall [u] \in \mathbb{IR}^n, \quad f([u]) \subseteq [f]([u]). \quad (4)$$

Une fonction d'inclusion de f peut être obtenue en remplaçant chaque occurrence d'une variable réelle par l'intervalle correspondant ainsi que chaque fonction standard par son évaluation intervalle. Une telle fonction est appelée *fonction d'inclusion naturelle*. En pratique, une fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la syntaxe avec laquelle f est écrite.

Une forme plus pertinente pour l'obtention d'une fonction d'inclusion est la forme centrée, qui conduit à des résultats moins pessimistes que ceux obtenus avec la forme naturelle.

DÉFINITION 10. — *Supposons que f soit différentiable sur $[u]$, la forme centrée de f , notée $[f]_c$ est donnée par :*

$$[f]_c([x]) = [f](a) + [J]([x])([x] - a), \quad \forall [x] \subseteq [u], \quad (5)$$

où $a = m([x])$ et $[J]$ est une fonction d'inclusion de la matrice Jacobienne de f .

3.2. Inversion ensembliste

Considérons le problème qui consiste à déterminer l'ensemble de solution S défini par :

$$S = \{u \in U \mid \Phi(u) \in [y]\} = \Phi^{-1}([y]) \cap U, \quad (6)$$

où $[y]$ est connu a priori, U est le domaine initial de recherche pour u et Φ une fonction non linéaire, non nécessairement inversible dans le sens classique. Déterminer S consiste à calculer l'image réciproque de Φ . Ceci est un problème d'inversion ensembliste qui peut être résolu en utilisant l'algorithme *Set Inversion Via Interval Analysis* (noté SIVIA). L'algorithme SIVIA, proposé dans (Jaulin, Walter, 1993), est un algorithme récursif qui explore tout l'espace de recherche sans perdre de solution. Il permet d'encadrer l'ensemble S de manière garantie :

$$\underline{S} \subseteq S \subseteq \bar{S}.$$

L'ensemble intérieur \underline{S} est composé des boîtes considérées comme admissibles (acceptables). Pour prouver qu'une boîte $[u]$ est admissible (acceptable), il suffit de prouver que $\Phi([u]) \subseteq [y]$. Inversement, si la relation suivante $\Phi([u]) \cap [y] = \emptyset$ est établie, alors la boîte $[u]$ est rejetée (inacceptable). Dans les autres cas, la boîte $[u]$ est dite indéterminée (incertaine). Cette dernière est alors coupée en deux et testée à nouveau jusqu'à ce que sa taille atteigne une précision spécifique donnée par l'utilisateur $\eta > 0$. Un tel critère d'arrêt assure la terminaison de l'algorithme SIVIA en un nombre fini d'itérations.

3.3. Intégration numérique garantie en utilisant les développements en séries de Taylor

Considérons le système dynamique *incertain* décrit par (1) avec $x(0)$ la condition initiale. On considère une grille temporelle $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, avec un pas de temps non nécessairement constant. L'intégration numérique garantie par les méthodes de Taylor intervalle calcule des vecteurs intervalle $[x_j], j = 1, \dots, n$ qui contiennent de manière garantie l'ensemble solution de (1) à l'instant $t_j, j = 1, \dots, n$.

Ces méthodes se déroulent généralement en deux étapes :

– existence et unicité : cette étape consiste à vérifier l'existence et l'unicité de la solution pour chaque condition initiale $x_j \in [x_j]$ en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'opérateur de Picard-Lindelöf (Moore, 1966 ; Nedialkov *et al.*, 1999) et à calculer la solution a priori $[\tilde{x}_j]$ (Nedialkov, 1999 ; Berz *et al.*, 1998).

– Contraction : cette étape consiste à fournir un encadrement garanti de l'ensemble solution $[x_{j+1}]$ de (1) à t_{j+1} en utilisant un développement en série de Taylor à un ordre donné ou des contracteurs à point fixe et la solution à t_j . $[\tilde{x}_j]$ est utilisée pour encadrer le reste du développement en série de Taylor.

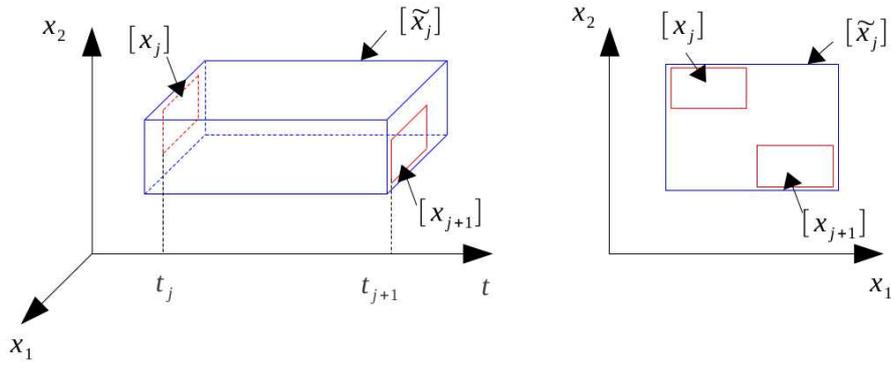


Figure 1. Illustration du tube de trajectoires (boîte en bleu) entre deux pas de temps t_j, t_{j+1} ; $[\tilde{x}_j]$ représente la solution a priori, $[x_j]$ représente la solution à l'instant t_j , et $[x_{j+1}]$ représente la solution à l'instant t_{j+1}

Les auteurs (Moore, 1966 ; Eijgenraam, 1981 ; Rihm, 1992 ; Lohner, 1987 ; Nedialkov *et al.*, 1999) ont proposé plusieurs algorithmes et méthodes pour rendre la méthode de Taylor applicable en pratique, car il y a bien évidemment des problèmes de sur-approximation.

(Ramdani, Nedialkov, 2011 ; Maïga *et al.*, 2015 ; 2014) ont fait une extension de la méthode Taylor afin d'avoir une expression analytique de la solution du tube de trajectoires (7) sur tout l'horizon temporel $[t_j, t_{j+1}]$. A partir d'un point courant t_j de la grille temporelle, on a la solution $[x_j]$, on peut calculer la solution garantie $[x_{j+1}]$ (voir figure 1) au pas de temps suivant t_{j+1} , en utilisant le développement en série de Taylor (7) dans lequel le reste ($[\tilde{x}_j]$) est encadré dans une boîte contenant de manière garantie toute la trajectoire entre le début et la fin du pas d'intégration $[t_j, t_{j+1}]$. La solution analytique du tube de trajectoires pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ est donc donnée par :

$$[x](t; t_j, [x_j]) = [x_j] + \sum_{i=1}^{k-1} (t - t_j)^i f_q^{[i]}([x_j]) + (t - t_j)^k f_q^{[k]}([\tilde{x}_j]), \quad (7)$$

L'équation (7) est une expression analytique du tube de trajectoires de (1). Les coefficients $f_q^{[i]}$ de Taylor sont obtenus par différentiation automatique (Bendtsen, Stauning, 1996) avec :

$$\begin{cases} f_q^{[1]} = f, \\ f_q^{[i]} = \frac{1}{i} \frac{\partial f_q^{[i-1]}}{\partial z} f. \end{cases} \quad (8)$$

L'utilisation de l'analyse par intervalles permet de calculer un encadrement "sûr" de la solution du système (1). Parmi les méthodes d'intégration numérique garantie, nous utilisons celle basée sur les développements en séries de Taylor (Rihm, 1994), (Berz, Makino, 1998) ou (Nedialkov *et al.*, 2001). L'approche basée sur les développements en série de Taylor se décompose en deux étapes : la première vérifie l'existence et l'unicité de la solution du système (1) en utilisant le théorème du point fixe et l'opérateur de Picard-Lindelöf. Pour cela, à l'instant t_{j+1} , une première boîte $[\tilde{x}_j]$ est calculée. Elle contient toutes les solutions correspondant à toutes les trajectoires possibles entre t_j et t_{j+1} . Ensuite la boîte solution à l'instant t_{j+1} est obtenue en utilisant un développement de la série de Taylor à un ordre donné, où le reste est $[\tilde{x}_j]$.

3.4. Estimation de paramètres

Comme rappelé dans l'introduction, dans le contexte à erreurs bornées, les bruits de mesures et les paramètres à estimer sont supposés inconnus mais ils appartiennent à des intervalles (ou boîtes) de bornes connues.

L'équation (2) lie les sorties du modèle et les mesures, elle fait intervenir le bruit de mesures $v(t_i)$ à l'instant t_i . Ce bruit de mesure appartient à la boîte $[v(t_i)]$ pour tout i de 1 à N .

L'erreur v est supposée appartenir à un intervalle de borne inférieure \underline{v} et de borne supérieure \bar{v} . Un ensemble d'erreurs acceptables \mathbb{E} peut alors être défini comme un ensemble de contraintes :

$$\mathbb{E} = \{v(t_i) \mid \underline{v}(t_i) \leq v(t_i) \leq \bar{v}(t_i), i = 1, \dots, N\}. \quad (9)$$

Ces bornes peuvent être considérées constantes par rapport au temps ou variables. Elles peuvent être déterminées par exemple à partir de données fournies par les constructeurs de pièces électroniques.

Une boîte de paramètres est alors acceptable si et seulement si, à chaque instant, l'erreur entre les mesures z et la sortie du modèle y appartient à \mathbb{E} .

Afin d'estimer les paramètres du modèle (1), l'ensemble \mathbb{P} de paramètres p doit être calculé de telle sorte que les erreurs entre les mesures et les sorties du modèle appartiennent à \mathbb{E} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \{p \in [p_0] \mid z(t_i) - y(t_i, p) \in [\underline{v}_i, \bar{v}_i], \forall i = 1, \dots, N\}, \\ &= \{p \in [p_0] \mid [v(t_i)] \subseteq \mathbb{E}, \forall i = 1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (10)$$

La caractérisation de l'ensemble \mathbb{P} peut être considérée comme un problème d'inversion ensembliste (6). Pour simplifier les notations, notons l'ensemble :

$$\mathbb{P} = [v]^{-1}(\mathbb{E}) \cap [p_0]. \quad (11)$$

La section suivante est consacrée à l'obtention d'une entrée optimale.

4. Entrée optimale via le critère MIGMAG

Dans cette section nous considérons la planification d'entrée optimale. Les entrées u considérées ici dépendent d'un nombre fini de paramètres, ces paramètres seront notés Ξ . Nous supposons que ces paramètres appartiennent à un sous-ensemble admissible \mathcal{E} qui dans notre cas sera une boîte de paramètres qui caractérisent les entrées dites admissibles.

Dans un premier temps, nous mettons en évidence un critère permettant l'obtention d'une telle entrée optimale. Ensuite, nous l'appliquons dans le cadre de la programmation dynamique. La programmation dynamique admet que des contraintes pratiques puissent être imposées aux variables de sorties et d'entrées.

Dans un contexte à erreurs bornées, les éléments du vecteur de paramètres $[p] \in \mathbb{P}$ doivent satisfaire à l'instant t :

$$[y]([p], u) \subset [z] = [z, \bar{z}], \quad (12)$$

où $[z] = [z(t) - \bar{v}(t), z(t) - \underline{v}(t)]$ avec $z(t)$ le vecteur de mesures à l'instant t et $v(t)$ le bruit de mesures à l'instant t . $[z_k]$ représente la $k^{ième}$ composante de $[z]$ et $[y]([p], u)$ représente la sortie du modèle à l'instant t évaluée en $[p]$ et $u(t)$.

A partir de la relation (12), la fonction d'observation $[y]$ n'a pas d'expression explicite. Il est possible de développer la fonction $[y]([p], u)$ via une fonction d'inclusion de forme centrée. Pour la $k^{ième}$ composante $[y_k]$ de $[y]([p], u)$, pour tout $[p] \in \mathbb{P} \subset [p_0]$ et $m = mid([p])$ (où $mid([p])$ représente le vecteur formé des milieux des composantes du vecteur intervalle $[p]$), on a à un instant t , après allègement des notations :

$$[y_k](m, u) + \sum_{j=1}^{n_p} ([p_j] - m_j) \left[\frac{\partial y_k}{\partial p_j} \right]([p], u) \subset [z_k].$$

De cette inclusion, il est possible de tirer $[p_i] - m_i$ (Kieffer, Walter, 2011) où $[p_i]$ et m_i représentent respectivement les $i^{ième}$ composantes de $[p]$ et m .

Si $0 \notin \left[\frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right]([p], u)$ nous avons :

$$[p_i] - m_i \subset \left(\frac{[z_k] - [y_k](m, u) - \sum_{j \neq i} ([p_j] - m_j) \left[\frac{\partial y_k}{\partial p_j} \right]([p], u)}{\left[\frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right]([p], u)} \right). \quad (13)$$

Nous supposons dans la suite qu'il existe des indices $i = 1, \dots, n_p, k = 1, \dots, n_y$ et des instants de mesures tels que $0 \notin [\frac{\partial y_k}{\partial p_i}](p, u)$.

Nous voulons trouver une entrée u qui minimise la largeur de l'intervalle du deuxième membre de la relation (13) afin de réduire le domaine de paramètres. Afin de trouver un critère adéquat, les deux propositions suivantes sont utilisées :

PROPOSITION 11. — *Le produit de deux intervalles $[u]$ et $[w]$ dont l'un est symétrique $[u] = -[u]$ et l'autre quelconque est donné par :*

$$[u] \times [w] = [u] \times \text{mag}([w]). \quad (14)$$

On rappelle que : $\text{mig}([x]) = \min(|\underline{x}|, |\bar{x}|)$, si $0 \notin [x]$, sinon $\text{mig}([x]) = 0$, quand $[x]$ devient une matrice, cette opération sera effectuée composantes par composantes et $\text{mag}([x]) = \max(|\underline{x}|, |\bar{x}|)$.

DÉMONSTRATION. — *Supposons que a, b, c sont des nombres positifs tels que $a \leq b \leq c$. Supposons que $[u] = [-a, a]$.*

Considérons $[w] = [b, c]$, alors :

$$[-a, a] \times [b, c] = [-ac, ac] = [-a, a] \times \text{mag}([b, c]).$$

Considérons $[w] = [-c, -b]$, alors :

$$[-a, a] \times [-c, -b] = [-ac, ac] = [-a, a] \times \text{mag}([-c, -b]).$$

Considérons $[w] = [-b, c]$, alors :

$$[-a, a] \times [-b, c] = [-ac, ac] = [-a, a] \times \text{mag}([-b, c]).$$

Considérons $[w] = [-c, b]$, alors :

$$[-a, a] \times [-c, b] = [-ac, ac] = [-a, a] \times \text{mag}([-c, b]).$$

D'où la proposition annoncée. \square

PROPOSITION 12. — *Le produit de deux intervalles $[u]$ et $[w]$ dont l'un est non symétrique, mais tel que $0 \in [u]$ et $0 \notin [w]$ est donné par :*

$$[u] \times [w] = \pm [u] \times \text{mag}([w]). \quad (15)$$

DÉMONSTRATION. — *Supposons que a, b, c, d sont des nombres positifs que $a \leq b \leq c \leq d$. Soit $[u] = [-a, b]$ qui contient 0.*

Considérons $[w] = [c, d]$, alors :

$$[-a, b] \times [c, d] = [-ad, bd] = [-a, b] \times \text{mag}([c, d]),$$

ceci est encore vrai pour $a \geq b$.

Considérons $[w] = [-d, -c]$, alors :

$$[-a, b] \times [-d, -c] = [-bd, ad] = -[-a, b] \times \text{mag}([-d, -c]),$$

ceci est encore vrai pour $a \geq b$.

D'où la proposition annoncée. \square

Dans la suite nous posons :

$$I_{k,i}^t = \frac{[z_k] - [y_k](m, u) - \sum_{j \neq i} ([p_j] - m_j) \left[\frac{\partial y_k}{\partial p_j} \right]([p], u)}{\left[\frac{\partial y_k}{\partial p_i} \right]([p], u)} \text{ et } S_{k,j}^t = \frac{\partial y_k}{\partial p_j}([p], u)$$

à l'instant t pour tout $j = 1, \dots, n_p$.

Notons :

$$[S_{k,i}^t] = [\underline{S}_{k,i}^t, \overline{S}_{k,i}^t]. \quad (16)$$

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 13. —

$$I_{k,i}^t = \frac{\pm([z_k] - [y_k](m, u)) + \sum_{j \neq i} ([p_j] - m_j) \text{mag}([S_{k,j}^t])}{\text{mig}([S_{k,i}^t])}$$

DÉMONSTRATION. — Puisque $[p_j] - m_j$ est symétrique pour tout $j \in \{1, \dots, n_p\}$ avec la proposition 11, nous avons :

$$[p_i] - m_i \subset \left(\frac{[z_k] - [y_k](m, u) + \sum_{j \neq i} ([p_j] - m_j) \text{mag}([S_{k,j}^t])}{[S_{k,i}^t]} \right), \quad (17)$$

Si $0 \notin [\underline{S}_{k,i}^t, \overline{S}_{k,i}^t]$, nous avons :

$$[\underline{S}_{k,i}^t, \overline{S}_{k,i}^t]^{-1} = \left[\frac{1}{\overline{S}_{k,i}^t}, \frac{1}{\underline{S}_{k,i}^t} \right]. \quad (18)$$

Si $\underline{S}_{k,i}^t > 0$ nous avons $\text{mig}([S_{k,i}^t]) = |\underline{S}_{k,i}^t|$ et $\frac{1}{\text{mig}([S_{k,i}^t])} = \text{mag}\left(\frac{1}{[S_{k,i}^t]}\right)$.

Si $\overline{S}_{k,i}^t < 0$ nous avons $\text{mig}([S_{k,i}^t]) = |\overline{S}_{k,i}^t|$ et $\frac{1}{\text{mig}([S_{k,i}^t])} = \text{mag}\left(\frac{1}{[S_{k,i}^t]}\right)$.

Si $0 \in [\underline{S}_{k,i}^t, \overline{S}_{k,i}^t]$, on a $\text{mig}([S_{k,i}^t]) = 0$.

Puisque $0 \in [z_k] - y_k(m, u)$ et $0 \notin \frac{1}{[S_{k,i}^t]}$ nous avons, en utilisant la proposition 12 :

$$([z_k] - y_k(m, u)) \frac{1}{[S_{k,i}^t]} = \pm([z_k] - y_k(m, u)) \text{mag}\left(\frac{1}{[S_{k,i}^t]}\right).$$

De plus l'intervalle $\sum_{j \neq i} ([p_j] - m_j) \text{mag}([S_{k,j}^t])$ est symétrique, d'où le résultat annoncé par la proposition. \square

En fait nous pouvons préciser la longueur de $I_{k,i}^t$, notée $w(I_{k,i}^t)$.

Nous avons :

$$w(I_{k,i}^t) = \frac{w([z_k] - y_k(m, u))}{\text{mig}([S_{k,i}^t])} + \frac{\sum_{j \neq i} w([p_j]) \text{mag}([S_{k,j}^t])}{\text{mig}([S_{k,i}^t])}.$$

Compte tenu de cette longueur, pour réduire la longueur de l'intervalle $I_{k,i}^t$, l'une des solutions est de maximiser $mag([S_{k,i}^t])$ et de minimiser les $mag([S_{k,j}])$ pour tous $j \neq i$, ce qui peut se faire en minimisant $\sum_{j \neq i} mag([S_{k,j}^t])$. Ce sont les facteurs sur lesquels nous pouvons influencer. Ceci doit être fait pour tous les instants de mesure t , les indices $i = 1, \dots, n_p$ et les indices $k = 1, \dots, n_y$ (tels que $[S_{k,i}^t]$ vérifie bien les conditions de départ). Pour cela, nous pouvons minimiser :

$$\sum_{t=0}^{t_{max}} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{j \neq i, j=1}^{n_p} mag([S_{k,j}^t])$$

et maximiser :

$$\sum_{t=0}^{t_{max}} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_y} mag([S_{k,i}^t]).$$

Ceci peut se faire en minimisant le rapport de ces deux quantités. Cela nous conduit à la fonction coût MIGMAG proposée ci-dessous :

THÉORÈME 14. — *Un critère pour trouver une entrée optimale est le suivant :*

$$j(\Xi) = \frac{\sum_{t=0}^{t_{max}} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{j \neq i, j=1}^{n_p} mag([S_{k,j}^t])}{\sum_{t=0}^{t_{max}} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{k=1}^{n_y} mag([S_{k,i}^t])}, \quad (19)$$

où Ξ représente les paramètres caractérisant une entrée u prise en compte dans notre démarche. Le théorème précédent entraîne les définitions suivantes :

DÉFINITION 15. — *Le critère $j(\Xi)$ est appelé critère de MIGMAG optimalité.*

DÉFINITION 16. — *Une entrée \hat{u} est appelée MIGMAG optimale si :*

$$\hat{u} = \arg \min_{\Xi \in \mathcal{E}} j(\Xi).$$

5. Application

Dans cette section, nous nous intéressons tout d'abord à l'obtention de l'entrée optimale via le critère MIGMAG pour le modèle donné en (3). Ensuite, nous estimons les deux paramètres $C_{z\hat{\alpha}}$ et C_{zq} de ce modèle en utilisant cette entrée. Les résultats d'estimation sont comparés à ceux obtenus avec une entrée non-optimale, proposée dans (Jaubertie, Chanthery, 2013). Tous les résultats sont obtenus en simulation. Les mesures sont simulées avec des valeurs de paramètres données respectivement par $-1, 8$ et 5 , les conditions initiales sont données par $[x_0]$:

$$[x_0] = \begin{bmatrix} 28.48, & 28.52 \\ 6.27, & 6.73 \\ -0.23, & 0.23 \\ 2.20, & 2.66 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Le domaine de recherche initial des paramètres est donné par :

$$[p_0] = \begin{bmatrix} 1.71, & 1.89 \\ 4.75, & 5.25 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

ce qui correspond à 5 % d'incertitudes sur la valeur exacte des paramètres. Les bruits de mesures sont bornés par :

$$[v] = \begin{bmatrix} -0.04, & 0.04 \\ -0.25, & 0.25 \\ -0.25, & 0.25 \\ -0.25, & 0.25 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

De plus amples informations sur ces bornes peuvent être trouvées dans (Coton *et al.*, 2001).

La durée de l'essai est fixée à une seconde. La condition d'arrêt pour SIVIA est, dans un premier test, donnée par $\eta = (0.01, 0.05)$ où la première valeur correspond au seuil sur le premier paramètre à estimer et la seconde valeur correspond au seuil sur le second paramètre à estimer. De la même manière, dans un deuxième test, la condition d'arrêt pour SIVIA sera donnée par $\eta = (0.002, 0.01)$. Le nombre total de temps d'échantillonnage est $N = 120$.

5.1. Détermination de l'entrée optimale

Afin d'appliquer notre méthode, l'entrée admissible a été limitée aux entrées de type "créneaux". Des travaux analytiques démontrent que les entrées sous forme de créneaux donnent de meilleurs résultats que les entrées sinusoïdales pour l'estimation des paramètres (Chen, 1975). Notre méthode basée sur la programmation dynamique découpe l'intervalle de temps en étapes discrètes appelées horizons. Sur chaque horizon, le critère associé et les sorties sont calculés (pour plus de détails, voir (Dreyfus, 1965)). Cette technique permet d'écarter toute entrée dont la trajectoire de sortie ne satisfait pas les contraintes.

Afin de simplifier les notations, nous supposons que l'entrée $u - u_0$ peut prendre 3 valeurs a , $-a$ et 0 où a est une constante positive et u_0 est une valeur constante (valeur d'équilibre de l'entrée par exemple, éventuellement nulle). Dans notre exemple, $u_0 = \delta_{m_0}$ (Coton *et al.*, 2001). Les entrées testées par notre procédure sont alors données par :

$$u(t) = u_0 + \sum_{i=1}^r (a\varepsilon_i - a\varepsilon_{i-1})H(t - \tau_{i-1}), \quad \varepsilon_0 = 0, \quad (23)$$

où H est la fonction Heaviside. La variable τ_i est l'instant de changement de consigne pour l'entrée et $\varepsilon_i \in \{-1, 0, +1\}$ pour i de 1 à $r - 1$. Les variables τ_i satisfont $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{r-1}$. r est le nombre d'horizons.

L'optimisation de l'entrée consiste, dans notre exemple, à optimiser Ξ donné par les variables ε_i pour i de 1 à r . L'entrée optimale est alors de la forme :

$$\hat{u}(t) = u_0 + \sum_{i=1}^r (a\hat{\varepsilon}_i - a\hat{\varepsilon}_{i-1})H(t - \tau_{i-1}), \quad \hat{\varepsilon}_0 = 0. \quad (24)$$

Un exemple d'entrée de type (24) est donné en figure 1b.

Dans la section suivante, le critère $j(\Xi)$ est calculé pour un nombre d'horizons allant de 2 à 6. L'estimation de paramètres est effectuée en utilisant l'entrée optimale (minimisant $j(\Xi)$). Ces résultats d'estimation sont comparés à ceux obtenus avec l'entrée non-optimale donnée en figure 1a.

L'algorithme permettant d'obtenir l'entrée optimisant le critère $j(\Xi)$ est donné par l'Algorithme 1.

Dans cet algorithme, t_r décrit le nombre total de temps d'échantillonnage par horizons. Les fonctions *eval – EDO* et *eval – sensibilite* permettent respectivement de calculer les solutions numériques garanties du système (1) et les sensibilités. La fonction *eval – critere* permet de calculer le mipmap pour chaque entrée testée.

Algorithme 1 Recherche d'entrée optimale (u_{opt})

Require: $f, [x](0), r$;

Ensure: u_{opt} ;

- 1: initialization: $[x](0) := [x](0), \mathbb{L} := [x](0)$;
 - 2: **for** $i=1:r$ **do**
 - 3: $u(i) = \text{consigne} - \text{entree}(i)$;
 - 4: $[x](i) := \text{Pop}(\mathbb{L})$;
 - 5: **for** $j=1:t_r-1$ **do**
 - 6: $[x](j) = \text{eval} - \text{EDO}([x](j-1), u(i))$;
 - 7: $\mathbb{L} := \mathbb{L} \cup [x](j)$;
 - 8: $\text{sensibility} := \text{eval} - \text{sensibilite}([x](j), u(i))$;
 - 9: $\text{cout-intermediaire} := \text{eval} - \text{critere}(\text{sensibility})$;
 - 10: $\text{cout} := \text{cout} \cup (\text{cout-intermediaire}, u(i))$;
 - 11: $j := j + 1$;
 - 12: **end for**
 - 13: $i := i + 1$;
 - 14: **parcours-cout**(cout);
 - 15: **return**(u_{opt})
 - 16: **end for**
-

En utilisant le critère donné par l'équation (19), le tableau 1 a été obtenu :

La dernière colonne de ce tableau représente les valeurs obtenues sur chaque horizon.

La valeur de $j(\Xi)$ la plus petite est obtenue avec six horizons. Elle est de la forme :

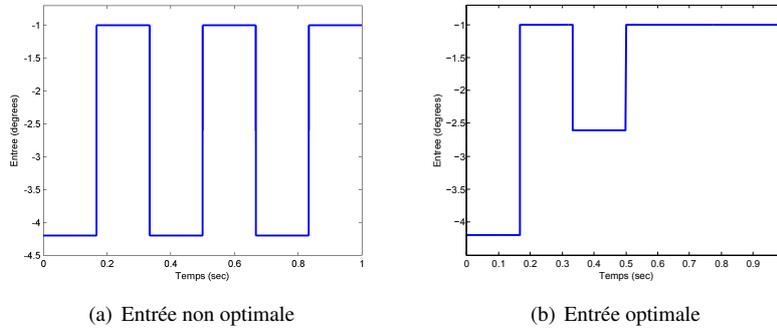
$$\hat{u}(t) = \delta_{m0} - aH(t - \tau_0) + 2aH(t - \tau_1) - aH(t - \tau_2) + aH(t - \tau_3), \quad (25)$$

Tableau 1. Valeur de la fonction coût $j(\Xi)$

Nombre d'horizons	$j(\Xi)$	Entrée (degrés)
2	2.864	[-4.2 -4.2]
3	2.828	[-4.2 -2.6 -1]
4	2.809	[-4.2 -4.2 -2.6 -1]
5	2.791	[-4.2 -2.6 -2.6 -1 -1]
6	2.787	[-4.2 -1 -2.6 -1 -1 -1]

avec $a = 1,6$ degrés, $\tau_0 = 0$ s, $\tau_1 = 0,1667$ s, $\tau_2 = 0,3334$ s, $\tau_3 = 0,5001$ s, $\tau_4 = 0,6668$ s et $\tau_5 = 0,8335$ s.

L'entrée optimale est représentée en figure 2b :


 Figure 2. Entrée non optimale u (a) et entrée optimale \hat{u} (b)

5.2. Estimation de paramètres

Les entrées présentées dans la figure 2 ont été utilisées pour l'estimation des deux paramètres.

Les résultats d'estimation sont donnés dans les tableaux 2 et 3, suivant la valeur donnée au critère d'arrêt de l'algorithme SIVIA. Le premier est obtenu avec $\eta = (0.01, 0.05)$ (noté η_1), le second avec $\eta = (0.002, 0.01)$ (noté η_2).

 Tableau 2. Estimation de paramètres avec $\eta_1 = (0.01, 0.05)$

Paramètre	u	\hat{u}
$C_{z\dot{\alpha}}$	[1.71, 1.89]	[1.77047, 1.82109]
C_{zq}	[4.94531, 5.05469]	[4.96875, 5.00781]

Quelle que soit la valeur de η , les intervalles estimés sont plus petits avec l'entrée optimale que ceux obtenus avec l'entrée non-optimale.

Tableau 3. Estimation de paramètres avec $\eta_2 = (0.002, 0.01)$

Paramètre	u	\hat{u}
$C_{z\hat{\alpha}}$	[1.71, 1.89]	[1.78875, 1.81125]
C_{zq}	[4.96875, 5.03125]	[4.96875, 5]

Les intervalles estimés avec η_2 sont naturellement plus petits que ceux obtenus avec η_1 . La taille des intervalles estimés pour les paramètres $C_{z\hat{\alpha}}$ et C_{zq} via l'entrée u est respectivement de 0,18 et 0,0625 ; celle via l'entrée optimale \hat{u} est 0,0225 et 0,03125. Avec l'entrée optimale, la réduction de longueur des intervalles estimés sur $C_{z\hat{\alpha}}$ est de l'ordre $|(w_{\hat{u}} - w_u)/l_u| = 87,5 \%$ et celle sur C_{zq} est de l'ordre $|(w_{\hat{u}} - w_u)/w_u| = 50 \%$, le domaine de paramètres $C_{z\alpha}$ et C_{zq} a été largement réduit.

La figure 3a représente le domaine des paramètres estimés avec l'entrée non optimale, le calcul dure 390 s. La figure 3b représente le domaine des paramètres estimés avec l'entrée optimale, le calcul dure 357 s. Dans ces figures, les boîtes acceptables sont représentées par des blocs rouges et les boîtes incertaines sont représentées par des blocs jaunes. Le contour est la boîte initiale $[p_0]$, le critère d'arrêt pour le découpage est $\eta = (0.01, 0.05)$.

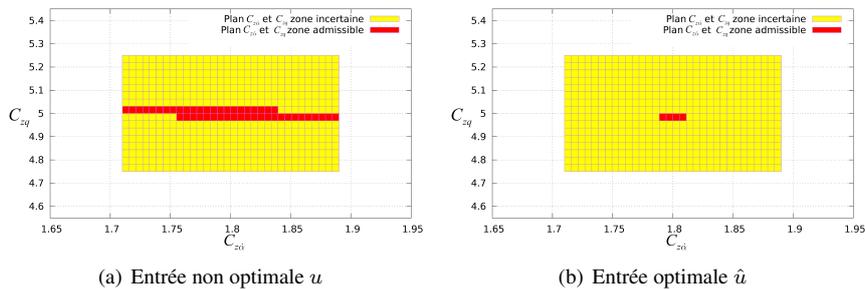


Figure 3. Boîtes acceptables et boîtes incertaines avec les entrées u et \hat{u} , $\eta = (0.01, 0.05)$

La figure 4 représente les résultats d'estimation avec $\eta = (0.002, 0.01)$.

Nous pouvons remarquer qu'il n'y a pas de zone inacceptable dans la zone initialement donnée. Cela est notamment dû au fait que la zone initiale de paramètre n'est pas très grande. Des tests complémentaires avec un domaine initial donné par :

$$[p_0] = \begin{bmatrix} -10, & 10 \\ -55, & 55 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

et $\eta = 0,5$ ont conduit aux résultats d'estimation suivants (figure 5), dans lesquels il y a des zones rejetées, admissibles et incertaines.

Les résultats ont été obtenus en 2 567 s pour l'entrée non-optimale et 816 s pour l'entrée optimale.

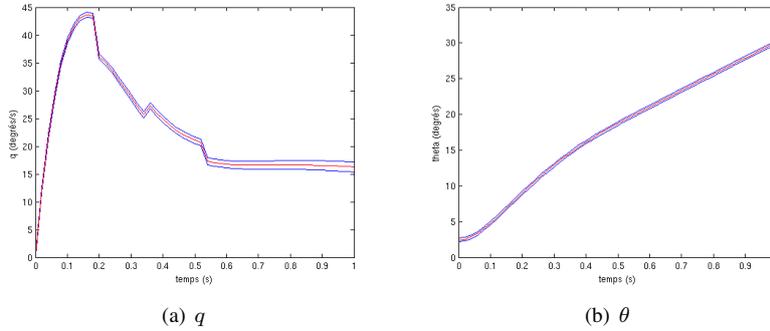


Figure 7. Reconstruction de q (a) et θ (b)

La figure 8 représente la reconstruction de la vitesse V avec la boîte incertaine $[-3, 3] \times [-10, 10]$ et l'entrée non optimale d'une part puis l'entrée optimale d'autre part.

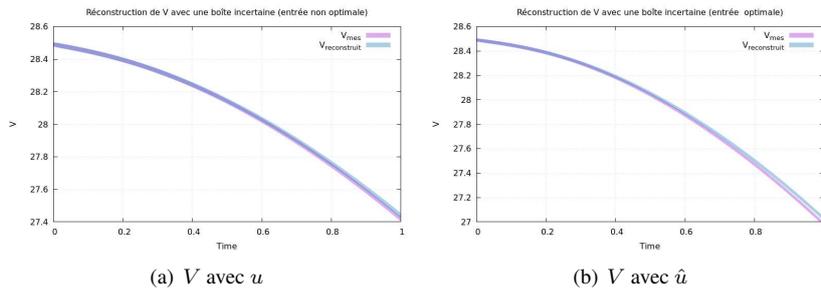


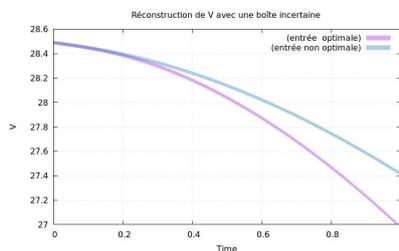
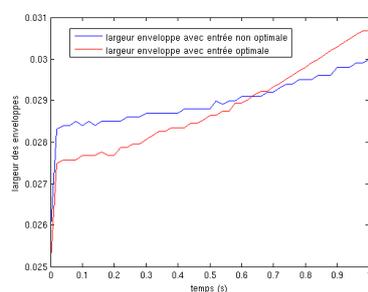
Figure 8. Reconstruction de V avec u (a) et \hat{u} (b)

Nous pouvons remarquer que l'entrée optimale conduit à une intersection vide entre la reconstruction de la vitesse et la mesure de cette vitesse, à partir de l'instant $t = 0,8$ s, ce qui n'est pas le cas de la reconstruction avec l'entrée non optimale.

La figure 9 représente la reconstruction de la vitesse V avec la petite boîte incertaine $[1.5, 2] \times [-10, -9.5]$ et l'entrée non optimale optimale d'une part puis l'entrée optimale d'autre part :

La figure 10 représente les largeurs des enveloppes pour les deux reconstructions précédentes de V .

Nous pouvons remarquer que l'enveloppe de la vitesse V reconstruite avec l'entrée non optimale est plus large que celle obtenue avec l'entrée optimale jusqu'à l'instant $t = 0,64$ s puis l'enveloppe reconstruite avec l'entrée optimale devient plus large. Cependant la différence entre les largeurs est de l'ordre de 10^{-3} (sur V) au maximum.

Figure 9. Reconstruction de V avec u et \hat{u} Figure 10. Reconstruction de V avec u et \hat{u}

6. Conclusion

Dans ce travail, nous avons mis en évidence l'impact du choix d'une entrée sur l'estimation de paramètres. Nous avons proposé une procédure complète d'estimation de paramètres incluant une étape d'optimisation d'entrée dans le contexte à erreurs bornées. Le critère MIGMAG mis en évidence a été testé sur un modèle complexe non linéaire d'avion et les résultats sont prometteurs.

Par ailleurs d'autres critères d'optimisation d'entrées peuvent être utilisés dans le contexte à erreurs bornées. C'est un point que nous considérons actuellement. Nous travaillons également à l'optimisation des instants de mesures, ce qui permettrait de réduire le nombre de mesures considérées.

Cette méthode peut être aussi utilisée pour le diagnostic actif sur un système à temps continu ou un système hybride.

Bibliographie

- Bendtsen C., Stauning O. (1996, aug). *FADBAD, a flexible C++ package for automatic differentiation*. Technical Report n° IMM-REP-1996-17. Lyngby, Denmark, Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark.
- Berz M., Hoffstätter G., Atter G. H. (1998). Computation and application of Taylor polynomials with interval remainder bounds. *Reliable Computing*, vol. 4, p. 83-97.

- Berz M., Makino K. (1998). Verified integration of odes and flows using differential algebraic methods on high-order Taylor models. *Reliable Computing*, vol. 4, n° 4, p. 361-369.
- Chabert G. (2014). *Ibex : C++ library for constraint processing over real numbers*. <https://github.com/ibex-team/ibex-lib/>.
- Chen R. (1975). Input design for aircraft parameter identification: using time optimal control formulation. In *Methods for Aircraft State and Parameter Identification*, AGARD-CP-172, paper 13.
- Coton P., Bucharles A., Jauberthie C., Le Moing T., Planckaert L. et. (2001). *Caire - identification des dérivées de stabilité dynamique*. Rapport technique. ph.2. Rapport technique 1/05650, ONERA.
- Dreyfus S. (1965). *Dynamic programming and the calculus of variations*. Santa monica, CA, RAND Corporation.
- Eijgenraam P. (1981). *The solution of initial value problems using interval arithmetic*. Amsterdam, Stichting Mathematisch Centrum.
- Jauberthie C. (2002). *Méthodologies de planification d'expériences pour systèmes dynamiques*. Université de Technologies de Compiègne.
- Jauberthie C., Chanthery E. (2013). Optimal input design for a nonlinear dynamical uncertain aerospace system. In *Proceedings of IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, p. 469–474. Toulouse, France.
- Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Waletr E. (2001). *Applied interval analysis: with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics* (vol. 1). Springer.
- Jaulin L., Walter E. (1993). Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, vol. 29, p. 1053 - 1064.
- Kieffer M., Walter E. (2011). Guaranteed estimation of the parameters of nonlinear continuous-time models: Contributions of interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 25, n° 3, p. 191–207.
- Lohner R. J. (1987). Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. In E. W. Kaucher, U. W. Kulisch, C. Ullrich (Eds.), *Computer arithmetic: Scientific computation and programming languages*, p. 255–286. Stuttgart, Wiley-Teubner Series in Computer Science.
- Maïga M., Ramdani N., Travé-Massuyès. (2014). A CSP versus a zonotope-based method for solving guard set intersection in nonlinear hybrid reachability. *Mathematics in Computer Science*, vol. 8, n° 3-4.
- Maïga M., Ramdani N., Travé-Massuyès L., Combastel C. (2015). A comprehensive method for reachability analysis of uncertain nonlinear hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. PP, n° 99, p. 1-1.
- Moore R. E. (1966). *Interval analysis*. New Jersey, Prentice Hall, 1st edition.
- Nazin S., Polyak B. (2005). Interval parameter estimation under model uncertainty. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 11, n° 2, p. 225–237.
- Nedialkov N. S. (1999). *Computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation*. Rapport technique.

- Nedialkov N. S., Jackson K. R., Corliss G. F. (1999). Validated solutions of initial value problems for ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 105, p. 21–68.
- Nedialkov N. S., Jackson K. R., Pryce J. D. (2001). An effective high-order interval method for validating existence and uniqueness of the solution of an ivp for an ode. *Reliable Computing*, vol. 7, n° 6, p. 449–465.
- Raïssi T., Ramdani N., Candau Y. (2004). Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, vol. 40, n° 10, p. 1771–1777.
- Ramdani N., Nedialkov N. S. (2011). Computing reachable sets for uncertain nonlinear hybrid systems using interval constraint-propagation techniques. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 5, n° 2, p. 149 - 162.
- Rihm R. (1992). Enclosing solutions with switching points in ordinary differential equations. In L. Atanassova, J. Herzberger (Eds.), *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*, p. 419–425. Amsterdam, North-Holland.
- Rihm R. (1994). Interval methods for initial value problems in odes. In *Imacs-gamm international workshop on validated computations*. Amsterdam, Elsevier.
- Schweppe F. (1968). Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, n° 1, p. 22–28.
- Schweppe F. (1973). *Uncertain dynamic systems*. New Jersey, Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- Walter E., Kieffer M. (2007). Guaranteed nonlinear parameter estimation in knowledge-based models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 199, n° 2, p. 277–285.

Article soumis le 14/09/2015

Article accepté le 27/06/2016

