

## Reconstruction d'objets binaires à partir de deux projections orthogonales par une technique inspirée de la théorie des graphes : la recherche du flot maximum à coût minimum

### *Reconstruction of Binary Objects From Two Orthogonal Projections by an Inspired Technique of the Graph's Theory : the Research of Maximum Flow with Minimum Cost*

par S. REBOUL\*, A. TALEB-AHMED\*, M.M ROUSSET\*\*, F. WATTRELOT\*\*\*, J.P. DUBUS\*\*\*

\* Laboratoire d'Instrumentations pour le Signal, l'Image et les Réseaux  
Université du LITTORAL site de CALAIS

\*\* Laboratoire de Morphogénèse Céphalique.  
Faculté dentaire de LILLE

\*\*\* Laboratoire de Mesures Automatiques  
Université des sciences et technologies de LILLE

#### Résumé

Dans cet article, nous présentons un algorithme de reconstruction d'objets en 3D à partir de deux projections rayons X orthogonales. La reconstruction 3D est basée sur celle d'une série de tranches parallèles. Ces tranches parallèles sont supposées binaires. Elles sont reconstruites à l'aide de leurs courbes de densité définies sur les radiographies rayons X. Cependant l'information disponible sur les radiographies n'est pas complète. Nous proposons d'utiliser un modèle comme information à priori pour reconstituer les courbes de densité et diminuer l'ambiguïté lors de la reconstruction des objets.

La reconstruction s'effectue en plusieurs étapes : le positionnement initial du modèle, la reconstitution des courbes de densité, la reconstruction des tranches de l'objet à partir des courbes de densité.

La reconstruction utilise un algorithme de flot maximum à coût minimum inspiré de la théorie des graphes et un modèle de la surface à reconstruire. Pour cette reconstruction nous proposons un nouvel algorithme de recherche du flot maximum à coût minimum, et comme modèle le squelette de la surface à reconstruire.

Les taux de conformités, obtenus entre la surface à reconstruire et la surface reconstruite, sont supérieurs à 95%. Nous présentons les résultats obtenus pour des formes types dans le cas de courbes de densité bruitées et non bruitées, et l'application de la méthode à la reconstruction d'éléments de la mâchoire.

**Mots clés :** Reconstruction 3D, théorie des graphes, méthode Heuristique.

#### Abstract

*In this article we introduce a three dimensional reconstruction algorithm from two mutually orthogonal X-ray projections. The three dimensional reconstruction is based on a series of parallel slices. These parallel slices are supposed binary. They are reconstructed with the help of their definite density curves on X-ray radiographies. However the available information on radiographies is not complete. We propose to use as a priori information a model to reconstruct curves of density and to decrease the ambiguity during the reconstruction of the objects. The reconstruction is processed through several steps : the initial positioning of the model, the reconstitution of the density curves, the object's slices reconstruction from their density curves.*

*The reconstruction uses a maximum flow of minimum cost algorithm derived from the graphs theory and a model of the object's slices. For this reconstruction we propose a new algorithm for the research of the maximum flows with a minimum cost, and as models the skeleton of the surface to reconstruct.*

*Rates of conformability, obtained between the surface to reconstruct and the result surface of the reconstruction, are greater than 95%. We present the results obtained for elements of different typical shapes in the case of unnoisy and noisy density curves, and the application of the reconstruction process to the the jaw elements.*

**Key words :** Three dimensional reconstruction, Graph, Heuristic methods.

## 1. Introduction

Le travail est lié à l'étude morphologique de la croissance de la mâchoire chez l'enfant. Cette étude est menée dans les deux

dimensions de l'espace par les odontologues à partir de radiographies X prises sous plusieurs incidences (Figure 1).

Actuellement, la croissance est quantifiée à partir d'une radiographie sélectionnée à partir de trois radios, suivant la pièce anatomique à étudier. Nous proposons un outil d'étude de la crois-

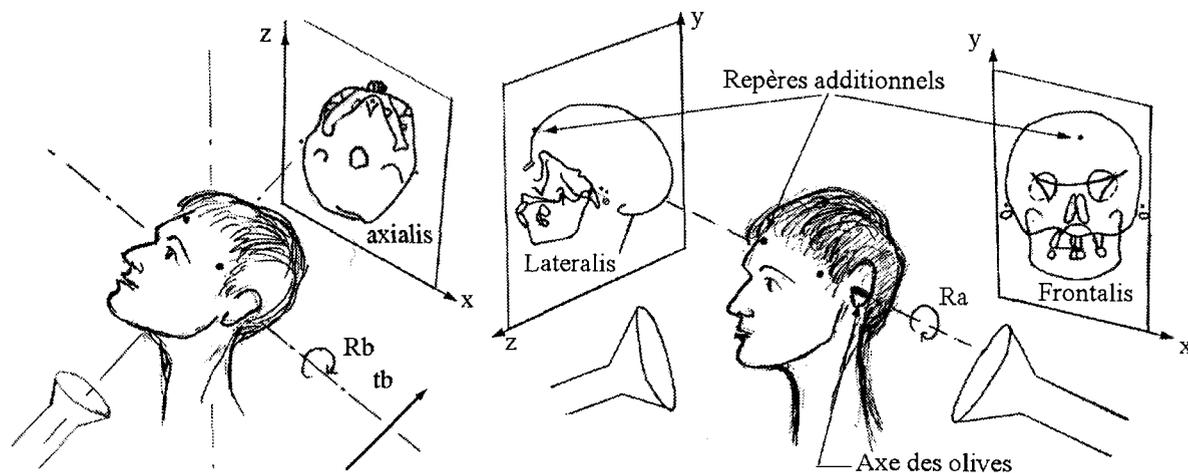


Figure 1. – Les conditions d'acquisition des radiographies.

sance dans les trois dimensions de l'espace basé sur le recadrage des radiographies X prises sous trois incidences différentes et orthogonales. Cet outil permet au praticien de quantifier l'évolution de la forme, de la position et de l'inclinaison des pièces osseuses dans les trois dimensions de l'espace. Les pièces osseuses sont repérées, sur deux vues parmi les trois, par rapport à des points anatomiques fixes au cours de la croissance (le compas ptérygo-clivien). Cependant, l'analyse qualitative de la déformation des organes et de leur évolution les uns par rapport aux autres reste encore difficile pour le médecin qui ne dispose alors que de projections du volume étudié.

Pour pallier ce problème, nous proposons une méthode de reconstruction tridimensionnelle des éléments de la face à partir de deux radiographies orthogonales. Nous présentons dans cet article la mise en oeuvre d'une reconstruction à partir de deux vues orthogonalisées parmi les trois, basée sur la déformation d'un modèle par une technique inspirée de la théorie des graphes.

## 2. Position du problème

Nous disposons de radiographies rayons X de la tête du patient prises sous incidences orthogonales (Figure 1). Une distance de 5 m est maintenue entre la tête du patient et la source rayons X. Elle permet d'obtenir des images en grandeur réelle sans déformation. Pour la reconstruction des éléments de la face, nous utilisons deux contours du volume à reconstruire segmentés manuellement par le praticien sur deux vues parmi les trois. La reconstruction d'objets en 3D à partir de leurs projections passe par la connaissance des

profils de densité. Dans notre cas, pour les radiographies X, les objets sont tels que l'information densité n'est plus disponible, soit parce que le rayonnement X est fortement atténué par la teneur en calcaire des dents, soit parce que les objets se superposent. Le principe de la reconstruction consiste à obtenir un objet ayant le même contour que l'objet réel et les mêmes formes de profils de densité que celles d'un objet modèle. La démarche est similaire à celle du prothésiste qui scelle une dent de forme standard sur une prothèse (profils de densité du modèle), mais de taille adaptée à la cavité buccale du patient (objet réel) ou de valeur analogue à celle des dents naturelles.

La reconstruction d'un objet par la méthode du flot maximum à coût minimum utilise les courbes de densité définies sur la vue de face et la vue de côté. Ces courbes de densité vont servir pour la reconstruction et pour le positionnement initial du modèle (utilisation des centres de gravité définis sur chaque tranche du modèle et sur les courbes de densité de l'objet réel). Pour relier le problème pratique qui fournit les données au concept de la méthode de reconstruction, nous faisons une brève description des techniques utilisées pour conditionner ces données. En pratique on dispose uniquement des contours des projections. Pour obtenir des courbes de densité exploitables sur la vue de face et la vue de côté, lors de la reconstruction, nous les reconstituons à partir du modèle. Cependant la reconstitution des courbes de densité nécessite au préalable le positionnement initial du modèle par rapport aux contours des projections.

Les différentes étapes de la reconstruction qui conduisent à la représentation 3D sont : le positionnement initial du modèle support de la reconstruction, la reconstruction 3D par déformation du modèle en utilisant une méthode inspirée de la théorie des graphes.

### 3. Positionnement initial du modèle et extrapolation des courbes de densité

Dans notre cas, les données de départ sont constituées d'un objet modèle et des contours des deux projections de l'objet réel à reconstruire. Le problème peut être simplifié par une réduction de la dimension de l'objet à reconstruire. En effet, celui-ci peut être découpé en tranches parallèles. Chacune des tranches sera reconstruite à partir des deux profils de densité reconstitués à partir de l'objet modèle. La reconstruction tridimensionnelle est alors réduite à une suite de reconstructions bidimensionnelles.

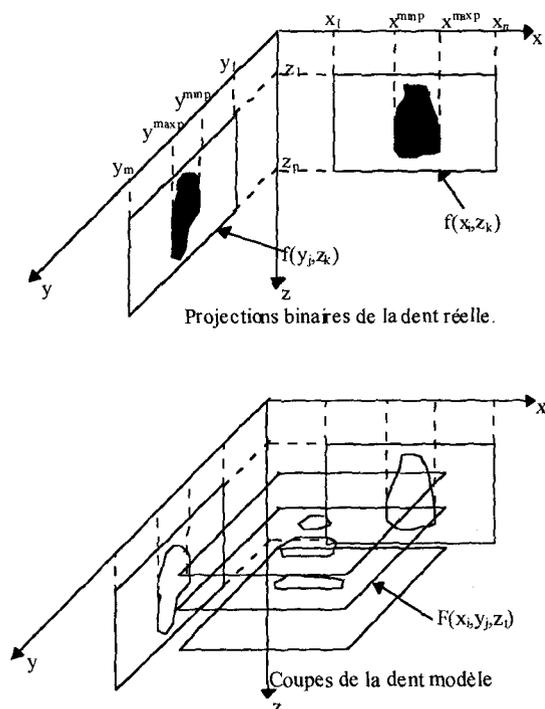


Figure 2. – Données initiales.

Le modèle fournit pour chaque coupe deux profils de densité, et l'idée est de modéliser pour une coupe donnée ces profils de densité afin qu'ils coïncident avec les contours de l'objet réel de la coupe correspondante. Nous avons appelé cette méthode : méthode d'extrapolation. Cependant, l'extrapolation des courbes de densité du modèle vers l'objet réel nécessite au préalable de positionner le modèle par rapport aux contours de l'objet réel définis sur les radiographies.

#### 3.1. POSITIONNEMENT INITIAL DU MODÈLE

Pour la reconstruction, on dispose de l'ensemble des points du modèle (sous forme de coupes) et des contours de l'objet réel à reconstruire définis respectivement sur la vue de face et sur la

vue de côté. Le positionnement initial se résume en une mise à l'échelle et en un positionnement du modèle par rapport à l'objet réel. Cette transformation s'effectue en plusieurs étapes.

Après pré-positionnement de l'objet modèle par l'utilisateur, on recherche les axes tridimensionnels du modèle et de l'objet réel. Les projections de l'objet modèle et de l'objet réel sont découpées suivant leur plus grand axe. Pour chaque découpe on définit le point milieu. L'ensemble des points milieu définit un nuage de points sur lequel on ajuste une droite par régression linéaire.

Les droites obtenues pour l'objet réel et pour l'objet modèle sont les projections de leurs axes tridimensionnels. On superpose les axes tridimensionnels, puis on met l'objet modèle et l'objet réel à la même échelle.

Soit  $f_x(x_i, z_k)$  et  $f_y(y_j, z_k)$  les projections binaires de la dent réelle provenant des radiographies prises de face et de côté.  $I$  est l'ensemble des valeurs de  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $J$  l'ensemble des valeurs de  $j \in \{1, \dots, m\}$  et  $K$  l'ensemble des valeurs de  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

$F(x_i, y_j, z_t)$  représente les coupes de la dent modèle, les valeurs de  $t \in T$  sont un sous ensemble de  $K$ . Les trois fonctions précédentes :  $f_x(x_i, z_k)$ ,  $f_y(y_j, z_k)$  et  $F(x_i, y_j, z_t)$  sont des fonctions binaires qui prennent la valeur 1 ou 0 suivant que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de l'objet (figure 2).

On définit  $x^{\min p} = \min(x_i)$  et  $x^{\max p} = \max(x_i)$  tel que  $f_x(x_i, z_k) = 1$  pour tout  $i \in I$  et  $k \in K$ . Il en est de même pour  $y^{\min p}$ ,  $y^{\max p}$ ,  $z^{\min p}$ ,  $z^{\max p}$ .

On définit  $x^{\min m} = \min(x_i)$  et  $x^{\max m} = \max(x_i)$  tel que  $F(x_i, y_j, z_t) = 1$  pour tout  $i \in I$ ,  $j \in J$  et  $t \in T$ . Il en est de même pour  $y^{\min m}$ ,  $y^{\max m}$ ,  $z^{\min m}$ ,  $z^{\max m}$ .

On effectue la mise à l'échelle du modèle avec la dent réelle à partir du calcul des facteurs d'échelles  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  suivant les trois directions de l'espace :

$$S_x = \frac{x^{\max m} - x^{\min m}}{x^{\max p} - x^{\min p}}, S_y = \frac{y^{\max m} - y^{\min m}}{y^{\max p} - y^{\min p}}, S_z = \frac{z^{\max m} - z^{\min m}}{z^{\max p} - z^{\min p}} \quad (1)$$

Cependant, il reste à déterminer l'orientation du modèle autour de son axe tridimensionnel par rapport aux contours de l'objet réel. On recherche pour cela la valeur minimale du facteur de vraisemblance (Figure 3) noté *diff*.

Pour chaque coupe de coordonnées  $z_t$ ,  $t \in T$ , on détermine :  $x_t^{\min p} = \min(x_i)$  et  $x_t^{\max p} = \max(x_i)$  telles que  $f_x(x_i, z_t) = 1$  pour tout  $i \in I$ . Il en est de même pour  $y_t^{\min p}$ ,  $y_t^{\max p}$  calculées à partir de  $f_y(y_j, z_t)$ .

$x_t^{\min m} = \min(x_i)$  et  $x_t^{\max m} = \max(x_i)$  telles que  $F(x_i, y_j, z_t) = 1$  pour tout  $i \in I$ ,  $j \in J$ . Il en est de même pour le calcul de  $y_t^{\min m}$  et  $y_t^{\max m}$ .

On a alors :

$$\text{diff} = \sum \left\{ \frac{x_t^{\max p} - x_t^{\min p}}{y_t^{\max p} - y_t^{\min p}} - \frac{x_t^{\max m} - x_t^{\min m}}{y_t^{\max m} - y_t^{\min m}} \right\} \quad (2)$$

La procédure de recherche de la valeur minimale de diff pour des angles de rotation du modèle autour de son axe tridimensionnel compris entre 0 et 90°, est la suivante :

- 1) Rotation de l'objet modèle.
- 2) Recherche de son axe tridimensionnel et superposition avec l'axe de l'objet réel.
- 3) Calcul du facteur de vraisemblance.
- 4) retour en 1)

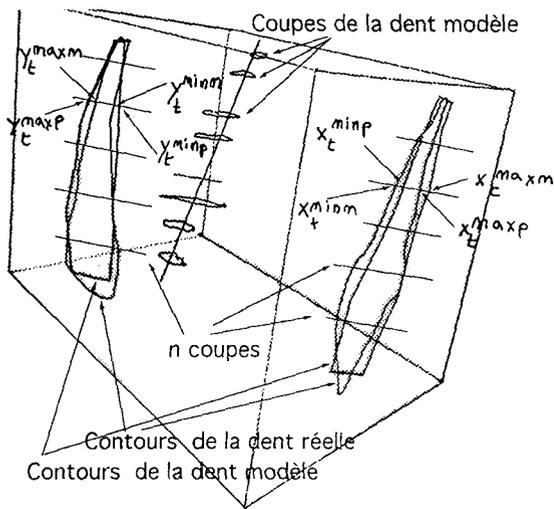


Figure 3. – Recherche de l'orientation du modèle.

Toutes les étapes de positionnement du modèle sont effectuées automatiquement à partir d'un pré-positionnement par l'utilisateur. Cependant on remarque que le recadrage sera d'autant meilleur que la ressemblance entre les contours de la projection de l'objet modèle et ceux de l'objet réel sera plus importante.

### 3.2. EXTRAPOLATION DES COURBES DE DENSITÉ

Soit une dent connue que l'on appelle modèle. On effectue une découpe de ce modèle en un ensemble de tranches parallèles. Chacune des coupes du modèle fournit deux profils de densité. Soit  $f'_x(x_i, z_t)$  et  $f'_y(y_j, z_t)$  les courbes de densité sur la vue de face et la vue de côté associées à chaque coupe du modèle. On a :

$$f'_x(x_i, z_t) = \sum_{j=1}^m F(x_i, y_j, z_t) \quad \text{pour tout } i \in I \quad (3)$$

$$f'_y(y_j, z_t) = \sum_{i=1}^n F(x_i, y_j, z_t) \quad \text{pour tout } j \in J \quad (4)$$

Pour reconstruire la dent réelle, il est nécessaire de disposer des courbes de densité sur la vue de face et la vue de côté des coupes à

reconstruire. Ces courbes de densité ne peuvent pas être extraites des radiographies. Nous allons les reconstruire à partir des courbes de densité de la dent modèle. Cette opération dite extrapolation des courbes de densité est réalisée par une interpolation ou une décimation des courbes de densité  $f'_x(x_i, z_t)$  et  $f'_y(y_j, z_t)$  du modèle vers les courbes de densité  $f_x(x_i, z_t)$  et  $f_y(y_j, z_t)$  de la dent réelle (Figure 4).

On suppose en première approximation que la densité de probabilité de ressemblance, entre la forme du modèle et celle de l'objet réel, décroît depuis le barycentre vers l'extrémité. Pour cette raison, on choisit les échantillons à enlever ou à ajouter en les répartissant symétriquement sur l'ensemble des valeurs comprises entre  $x_t^{\min p}, x_t^{\max p}$  et  $y_t^{\min p}, y_t^{\max p}$  en partant des extrémités et en allant vers le centre. On peut envisager aussi d'autres lois, par exemple on peut supposer une loi linéaire croissante des bords vers le centre, ou une loi gaussienne centrée sur le barycentre. On pondère alors le pas entre les raies à enlever ou à ajouter proportionnellement à cette loi de probabilité.

L'opération d'extrapolation comporte deux étapes. L'étape de modification du nombre d'échantillons et l'étape de modification de l'amplitude de ces échantillons. En effet, lorsque l'on modifie le nombre de raies de la courbe de densité en largeur (augmentation ou réduction du nombre d'échantillons), la modification sur l'amplitude ne suit pas forcément la même loi. Il faut donc aussi réajuster l'amplitude des raies pour garder une certaine homogénéité entre la largeur et la hauteur. Nous avons donc défini un facteur multiplicatif correctif  $Mx$ . Ce facteur va, de la même manière, augmenter ou réduire l'amplitude des raies en s'appuyant toujours sur le modèle.

Dans le cas où le contour de l'objet réel est supérieur au modèle, le facteur  $Mx$  est donné par  $Mx = \frac{x_t^{\min p} - x_t^{\max p}}{x_t^{\min m} - x_t^{\max m}}$ .

Dans le cas où le contour est inférieur au modèle,  $Mx$  est donné par  $Mx = \frac{x_t^{\min m} - x_t^{\max m}}{x_t^{\min p} - x_t^{\max p}}$ .

### 3.3. CONSIDÉRATION SUR LE BRUIT

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de la présence du bruit. Généralement le bruit sur les radiographies est dû, en majorité, au faible contraste entre les différents objets et à leur superposition, à la qualité de la numérisation, aux erreurs de quantification, à la segmentation etc.. Toutes ces erreurs vont se répercuter dans la phase de segmentation, qui est encore à l'heure actuelle manuelle, et les contours seront détectés avec une erreur  $\varepsilon$ . Cette erreur permet d'encadrer le contour réel par deux sous contours distants de  $\varepsilon$  (Figure 5).

On peut alors associer à cet encadrement une infinité de contours, obtenus lors de la phase de segmentation manuelle, qui vont donner une infinité de courbes de densité possibles. De la même façon, la méthode d'extrapolation proposée engendre des

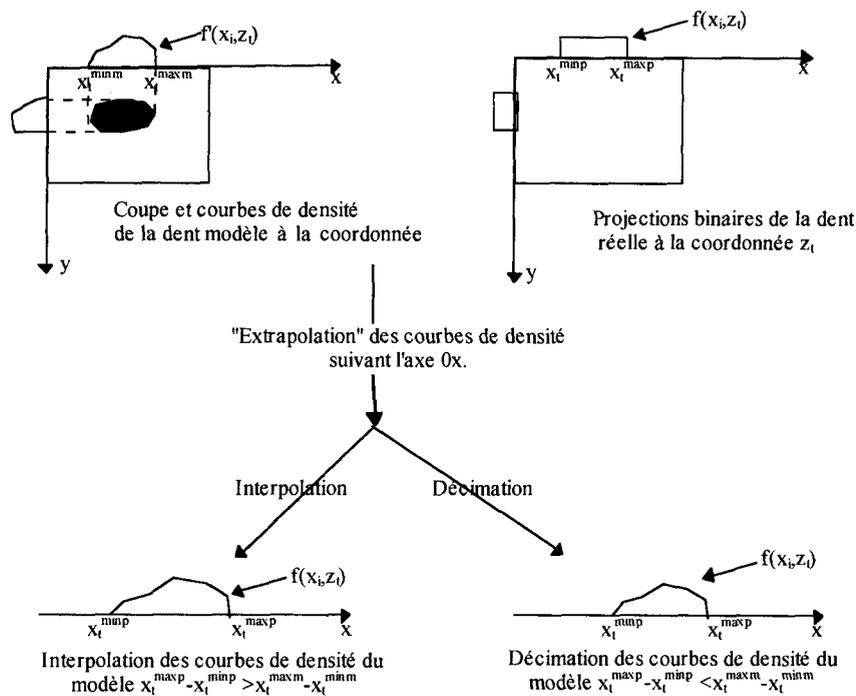


Figure 4. – Procédé d'«extrapolation».

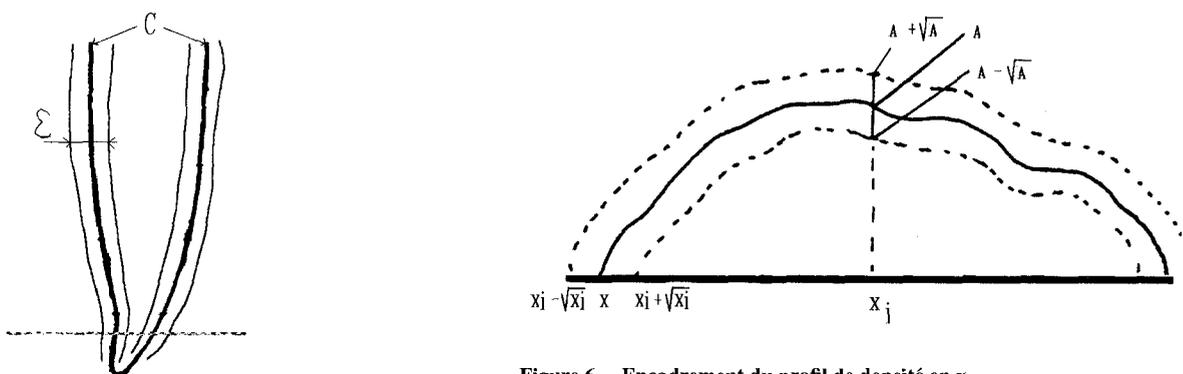


Figure 5. – Contour réel.

Figure 6. – Encadrement du profil de densité en x.

erreurs sur les courbes de densité résultantes (erreurs dues à l'ajout ou à la substitution de raies, à la modification de l'amplitude des raies par le facteur M). Ces courbes de densité peuvent donc être considérées comme une solution possible parmi l'ensemble des solutions qui correspondent aux contours appartenant à l'intervalle  $[C - \varepsilon/2, C + \varepsilon/2]$ . Comme pour l'ensemble des travaux effectués dans ce domaine [CHAN 71] [CHAN 73] [ONNA 76] [SLUM 82] [DBAI 86] [YANG 89] on suppose que le bruit rencontré est un bruit de type poissonnien. On peut alors considérer que chaque point des deux profils de densité obtenus est encadré par une limite inférieure et une limite supérieure. On peut délimi-

ter chaque profil de densité reconstruit par deux courbes (Figure 6) d'amplitudes  $A + \sqrt{A}$  et  $A - \sqrt{A}$ .

Les courbes de densité extrapolées conviendront à la reconstruction si elles sont comprises dans l'intervalle défini par la limite inférieure et la limite supérieure. Pour cette reconstruction le contour réel est inconnu, donc on ne connaît pas l'excursion maximale et minimale des courbes de densité réelles. Mais nous avons utilisé un autre critère pour valider les profils de densité extrapolés. En effet, pour que la reconstruction soit possible, il faut qu'il existe entre les deux courbes de densité extrapolées suivant x et suivant y une différence de surface relative inférieure à 20%. Lorsque les deux courbes de densité ont des surfaces égales, on dit qu'elles sont compatibles. Nous avons choisi une méthode qui permet de reconstruire des profils de densité bruités (non compatibles).

## 4. Reconstruction

### 4.1. INTRODUCTION

En général pour avoir une bonne reconstruction, il faut disposer d'un grand nombre de projections. Les algorithmes sont alors très complexes et les coûts de calculs très importants. Il est montré [HITC] que si l'on s'intéresse aux objets sous leur aspect binaire, le problème de la reconstruction peut alors être simplifié et seules quelques projections orthogonales sont suffisantes pour obtenir une bonne reconstruction approximative.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & b_1 & b_2 & & & & & b_n \\
 a_1 & \left[ \begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & & & & & & n
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ \\ \\ \\ m \end{array}
 \end{array}$$

Figure 7. – Représentation sous forme matricielle.

Considérons un objet découpé en tranches parallèles. La section  $Sz_t$  est décrite par une fonction  $F(x_i, y_j, z_t)$ . Cette fonction prend la valeur 1 ou 0 selon que le point de coordonnées  $(x_i, y_j)$  se trouve ou non à l'intérieur de l'objet. La projection de  $F(x_i, y_j, z_t)$  selon l'axe  $Ox$  s'écrit  $fx(x_i, z_t)$  et la projection selon l'axe  $Oy$  s'écrit  $fy(y_j, z_t)$ . Considérons une matrice  $X$  de type  $M \times N$  (Figure 7) composée des éléments  $x(i, j)$  appartenant à  $\{0, 1\}$ . La somme des éléments de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de  $X$  est représentée respectivement par  $a_i$  et  $b_j$ . Les relations entre les éléments  $x(i, j)$  de la matrice  $X$  et  $a_i$  et  $b_j$  sont données par :

$$a_i = \sum_{j=1}^n x(i, j) \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$b_j = \sum_{i=1}^m x(i, j) \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F(x_i, y_j, z_t) \quad (7)$$

L'ensemble des éléments  $a_i$  définis sur l'ensemble des lignes ( $b_j$  sur l'ensemble des colonnes) de la matrice  $X(m, n)$  représente le profil de densité  $fx(x_i, z_t)$  (le profil de densité  $fy(y_j, z_t)$ ).

Dans notre cas, les données dont nous disposons sont les deux seules projections  $fx(x_i, z_t)$ ,  $fy(y_j, z_t)$ . On désire estimer de façon unique la fonction  $F(x_i, y_j, z_t)$ . Du point de vue matriciel le problème de la reconstruction consiste à estimer les éléments  $x(i, j)$  de  $X$  à partir des équations (5) et (6).

On peut montrer que les équations (5) et (6) ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème de l'ambiguïté sur la solution [YANG 89]. En effet, il est montré dans les ouvrages de mathématique combinatoire que  $m + n$  équations pour  $m \times n$  inconnues binaires ne sont pas toujours suffisantes.

Il peut y avoir une solution, plusieurs solutions ou aucune pour  $X$  satisfaisant les deux projections. C'est pourquoi, différents auteurs ont introduit certaines hypothèses pour réduire l'ambiguïté apportée par le modèle binaire. Suivant le type d'hypothèse utilisé, les méthodes de reconstruction sont divisées en deux classes.

1) Les méthodes de reconstruction directes utilisant les hypothèses sur la forme de la section elle-même [CHAN 73] [DBAI 86] [YANG 89] [PELL 90].

2) Les méthodes de reconstruction indirectes faisant appel aux informations supposées connues *a priori* ou aux modèles prédéterminés en considérant les bases physiologiques [ONNA 76] [SLUM 82] [YANG 89] [TALE 92].

Dans notre cas les hypothèses de départ sont :

- Nous possédons des courbes de densité bruitées.
- Il n'y a pas de symétrie particulière de l'objet à reconstruire.
- On utilise un modèle pour la reconstruction.

Pour ces raisons nous avons employé une méthode de type indirecte. Le principe utilisé est inspiré des travaux de [SLUM 82] repris par Yang [YANG 89] et par [TALE 92]. L'intérêt de ce principe et des algorithmes qui en découlent réside dans la procédure d'optimisation. La procédure d'optimisation se décompose classiquement [SLUM 82] [YANG 89] [TALE 92] en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on effectue une reconstruction approximative à partir des courbes de densité réelles et du modèle par un algorithme itératif. Dans un deuxième temps, on recherche à partir de cette pré-reconstruction une solution ayant les mêmes courbes de densité que la surface réelle. Enfin, dans un dernier temps on modifie la solution pour obtenir la ressemblance maximum avec le modèle. Nous proposons un algorithme de reconstruction inspiré de la théorie des graphes qui intègre l'ensemble des étapes au cours de la reconstruction.

L'originalité de notre approche réside :

*Dans l'application à des clichés radiographiques.*

*Dans l'utilisation d'un modèle vrai (contrairement à [SLUM 82] et [YANG 89] qui utilisent pour modèle la section précédente ou la section appartenant à une autre phase cardiaque).*

*Dans la proposition d'un algorithme de reconstruction robuste (Elimination des problèmes de convergence liés à la présence de circuit de coût négatif).*

*Dans l'utilisation du squelette de la matrice à reconstruire pour le calcul de la fonction de coût.*

Nous allons rappeler certains concepts de la théorie des graphes dans un réseau orienté que nous appliquons à la reconstruction d'une surface binaire pour des courbes de densité non bruitées (Cas idéal). Puis, dans une deuxième étape nous aborderons le problème de la reconstruction pour des courbes de densité bruitées

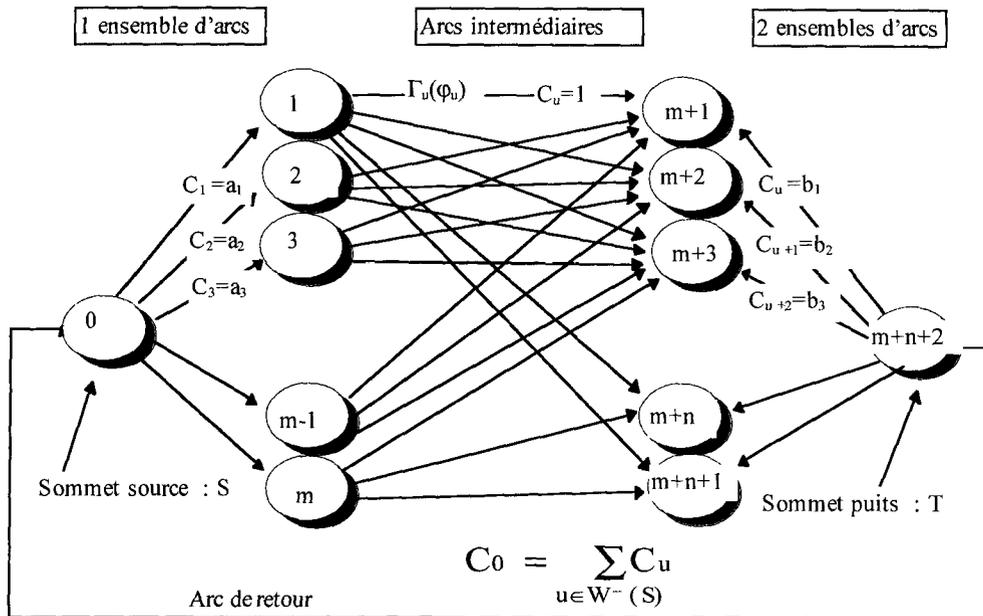


Figure 8. – Représentation du graphe.

et nous présenterons l'algorithme que nous avons développé. On considère un objet décomposé en une succession de sections parallèles. On connaît pour chaque section ses projections orthogonales.

#### 4.2. RÉSEAU ORIENTÉ : INTRODUCTION À LA NOTION DE GRAPHE

Un graphe  $G[X, U]$  orienté connexe consiste en un ensemble  $[X] = P$  composé de sommets et en un ensemble  $[U] = K$  composé d'arcs connectés à ces sommets (Figure 8). Un flot dans  $G$  est un vecteur à  $k$  composantes  $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)^T \in R^N$  dans lequel  $\varphi_u$  représente le flux circulant sur l'arc  $u \in U$  du graphe  $G$ . On notera  $i$  un sommet de l'ensemble  $X$  et  $W^+(i)$  l'ensemble des arcs aboutissant au sommet  $i$  et  $W^-(i)$  l'ensemble des arcs partant du sommet  $i$ .

On associe à chaque arc  $u = (i, j)$ ,  $u \in U$  de  $G$  un nombre entier  $C_u$  appelé capacité de l'arc  $u$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$ .  $C_u$  indique la quantité maximale de flux pouvant passer par l'arc  $u$ . Enfin, on définit une fonction  $\Gamma_u(\varphi_u)$  donnant le coût de passage d'un flux de valeur  $\varphi_u$  sur l'arc  $u$ , et une fonction  $\Gamma(\varphi)$  donnant le coût de passage d'un flot  $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$  dans le graphe  $G$ .

#### 4.3. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DU CAS IDÉAL

Dans le cas de la reconstruction d'une matrice  $(m, n)$ , on distingue deux sommets spéciaux : la source  $S$  et le puits  $T$ , et quatre ensembles d'arcs. Le premier ensemble d'arcs est constitué d'un

seul arc qui relie le puits à la source appelé arc de retour. Le deuxième ensemble d'arcs relie le sommet source à l'ensemble des sommets  $i (i = 1, \dots, m)$ , le troisième ensemble d'arcs relie l'ensemble des sommets  $i (i = m + 1, \dots, m + n + 1)$  au puits  $T$ , et enfin le dernier ensemble d'arcs appelé ensemble d'arcs intermédiaires qui relie les sommets  $i (i = 1, \dots, m)$  aux sommets  $i (i = m + 1, \dots, m + n + 1)$  (Figure 8).

##### 4.3.1. Initialisation des capacités des arcs

Les capacités des arcs issus de  $S$  allant vers les sommets  $i (i = 1, \dots, m)$  ont pour valeur la somme des éléments des lignes de la matrice  $X : a(i) (i = 1, \dots, m)$ .

Les capacités des arcs issus des sommets  $i (i = m + 1, \dots, m + n + 1)$  allant vers le sommet  $T$  ont pour valeur la somme des éléments des colonnes de la matrice  $X : b(j) (j = 1, \dots, n)$ .

Les capacités des arcs intermédiaires sont mises à un, ce qui traduit le fait que l'on reconstruit une matrice binaire. Les flux courants circulant sur les arcs intermédiaires (valeur = 0 ou 1) correspondent aux éléments de la matrice à reconstruire (Figure 9). La capacité de l'arc de retour est initialisée à la valeur du flot maximum pouvant circuler dans le graphe.

##### 4.3.2. Initialisation du coût de chaque arc

Le problème de la reconstruction consiste à chercher le flot maximum à coût minimum circulant dans le graphe  $G$ , autrement dit à trouver la valeur du flux sur les arcs, inférieure ou égale à leurs capacités, qui donne un flux résultant maximum sur l'arc de retour (égale à sa capacité). A l'issue de la reconstruction, la somme

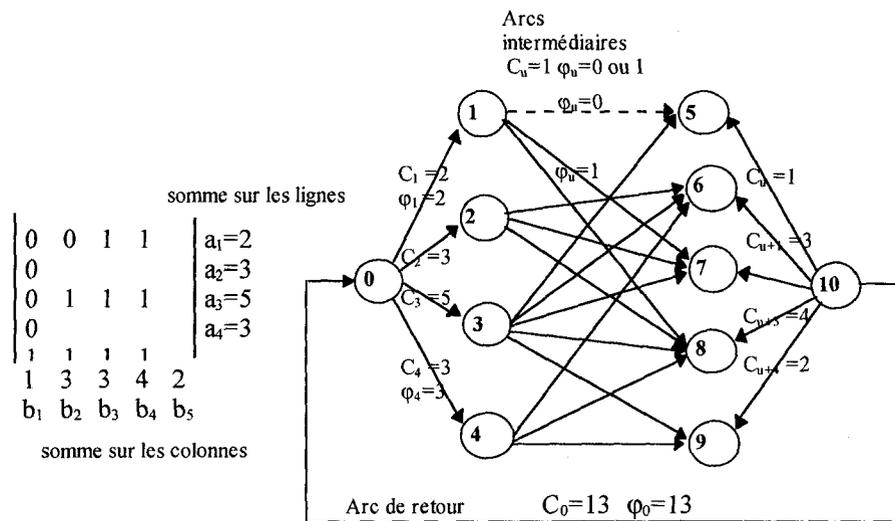


Figure 9. – Equivalence entre matrice et graphe.

des coûts associés aux arcs intermédiaires doit être minimale. Les coûts associés aux premier, deuxième et troisième ensembles d'arcs sont mis à zéro, car tous les arcs sont équiprobables. Les coûts associés aux arcs intermédiaires sont calculés à partir du modèle. Pour cela nous nous appuyons sur un modèle que nous découpons en tranches parallèles pour ramener la reconstruction 3D à une simple reconstruction 2D. Nous calculons ensuite pour chaque section une fonction de coûts. En règle générale, la valeur du coût associé à un arc sera d'autant plus faible que le flux passant sur l'arc  $u$  augmentera la ressemblance entre le modèle et la matrice reconstruite.

### 4.3.3. Le problème du flot maximum à coût minimum

La fonction  $\Gamma(\varphi)$  donnant le coût de passage d'un flot  $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$  dans le graphe  $G$ , s'exprime à partir de la fonction  $\Gamma_u(\varphi_u)$  qui donne le coût de passage d'un flux de valeur  $\varphi_u$  sur l'arc  $u$ , par la formule :

$$\Gamma(\varphi) = \sum_{u \in U} \Gamma_u(\varphi_u) \quad (8)$$

Le flot  $\varphi_m$  maximal est défini par :

$$\forall u \in W^-(S) \text{ et } \forall u \in W^+(T) \varphi_u = C_u \quad (9)$$

Dans un graphe orienté pour lequel la loi de conservation des flux aux sommets du graphe est vérifiée soit :

$$\forall i \text{ de } [X] \text{ on a } \sum_{u \in w^+(i)} \varphi_u = \sum_{u \in w^-(i)} \varphi_u \quad (10)$$

Nous avons décomposé le problème de la recherche du flot maximum à coût minimum en deux étapes : la recherche du flot maximum  $\varphi_m$  dans  $G$ , et la minimisation du coût total  $\Gamma(\varphi_m)$  dans ce graphe.

### 4.3.4. Recherche du flot maximal dans $G$

Chaque arc  $u \in U$  autre que l'arc de retour est muni d'une capacité  $C_u > 0$ . L'objectif est de maximiser la valeur du flux sur l'arc de retour, avec un coût identiquement nul sur tous les arcs.

Soit  $G^0 = [X, U]$  et le vecteur  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)^T$ . On dit que le vecteur  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)^T$  est un flot de  $S$  à  $T$  de valeur  $\varphi_0$  (flot sur l'arc de retour) dans  $G$ .

La loi de conservation aux nœuds est vérifiée en tous les sommets de  $G$ ,  $Y$  compris aux sommets  $S$  et  $T$  où l'on a :

$$\sum_{u \in W^-(S)} \varphi_u = \sum_{u \in W^+(T)} \varphi_u = \varphi_0 \quad (11)$$

Le problème du flot maximum revient alors à déterminer un flot  $\varphi_m = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)^T$  vérifiant sur chaque arc de  $G$  les contraintes de capacités :

$$0 \leq \varphi_u \leq C_u \text{ pour tout } u \in U$$

et tel que la composante  $\varphi_0$  sur l'arc de retour  $(T, S)$  soit maximale, et que l'on ait :

$$\sum_{u \in W^-(S)} \varphi_u = \sum_{u \in W^+(T)} \varphi_u = \varphi_0 \quad (12)$$

$$\sum_{u \in W^-(S)} C_u = \sum_{u \in W^+(T)} C_u = \varphi_0 \quad (13)$$

#### Lemme

Une condition nécessaire et suffisante pour que le flot  $\varphi$  soit maximum est qu'il n'existe plus d'arc non saturé (arc tel que  $\varphi_u \neq C_u$ ) partant de  $S$  et arrivant en  $T$ .

0 0 1 1 0	6 4 0 0 5	14 12 0 1 13
0 1 1 1 0	4 0 0 0 3	7 2 0 1 11
1 1 1 1 1	0 0 0 0 0	1 2 0 2 1
0 1 0 1 0	4 0 2 0 4	12 1 10 1 12
Matrice modèle	Matrice de Slump	Matrice de Yang

Figure 10. – Calcul de la matrice de coûts.

Ce qui veut dire que la matrice ainsi reconstruite possède des courbes de densité identiques aux courbes recherchées. Pour résoudre le problème de la recherche du flot maximum dans un graphe, nous avons utilisé l'algorithme de Ford Fulkerson [Ford 67].

**Remarque**

La matrice binaire déduite du graphe à flot à maximum représente une tranche de l'objet à reconstruire qui satisfait les deux projections initiales. Cependant, le problème de l'ambiguïté n'est pas résolu, car on dispose en fait d'une solution initiale parmi une infinité de solutions possibles. Pour nous affranchir de ce problème, nous utilisons un modèle qui va nous permettre de rechercher parmi toutes les solutions celle qui ressemble le plus à ce modèle.

4.3.5. Recherche du flot maximum à coût minimum

*Détermination de la fonction de coûts*

On définit la fonction de coûts associés aux arcs  $\Gamma_u(\varphi_u)$  et au graphe  $\Gamma(\varphi)$  par :

$$\Gamma(\varphi) = \sum_{u \in U} \Gamma_u(\varphi_u) = \sum_{u \in U} \gamma_u \varphi_u \quad (14)$$

où  $\gamma_u$  représente le coût de l'arc  $u$  et  $\varphi_u$  le flux circulant sur cet arc.

*Détermination de la matrice des coûts*

Dans le cas des courbes de densité non bruitées, les coûts associés au premier, au second et au troisième ensemble d'arcs sont mis à zéro. Les coûts des arcs intermédiaires sont définis à partir de la matrice modèle. On associe un coût à chaque élément de la matrice modèle, on superpose les centres de gravités de la matrice à reconstruire et ceux de la matrice modèle. Les coûts de la matrice modèle sont alors affectés aux arcs du graphe de la matrice à reconstruire. Pour calculer les coûts des arcs intermédiaires on utilise la méthode de [SLUM 82] modifiée par [YANG 89] (Figure 10).

[SLUM 82] propose de mettre à zéro les coûts des arcs intermédiaires correspondants aux éléments de la matrice modèle égaux

à un. Les coûts des éléments égaux à zéro seront d'autant plus forts qu'ils s'éloignent du contour du modèle.

[YANG 89] propose d'affecter des coûts aux éléments égaux à un d'autant plus faibles qu'ils s'éloignent du contour du modèle. Les coûts des éléments égaux à zéro sont d'autant plus forts qu'ils s'éloignent du contour du modèle.

La matrice de coût proposée par [YANG 89] permet de s'affranchir de la taille du modèle. Le coût associé à un élément de la matrice sera d'autant plus faible que la probabilité pour qu'il soit égal à un sera plus grande.

**Remarque :**

Les surfaces que l'on veut reconstruire sont pleines et faiblement concaves. Les coûts sont d'autant plus faibles que l'on se rapproche du centre de gravité du modèle.

*La recherche du coût minimum*

La recherche du coût minimum revient à minimiser (14) sous les contraintes (12)(13) et (10), c'est-à-dire à minimiser la fonction de coût du graphe  $\Gamma(\varphi)$  en gardant le flot maximum dans le graphe. Ceci est possible en modifiant la topologie du réseau d'arcs intermédiaires.

Un circuit orienté est une séquence de sommets et d'arcs dans laquelle le dernier sommet est le même que le premier. On définit un circuit orienté de  $n$  arcs intermédiaires  $u_k (k = 0, \dots, n - 1)$  comme :

$$\forall u_k (k = 0, \dots, n - 1) \text{ et } i \in (m + 1, \dots, m + n + 1)$$

$$\text{Si } u_k \in W^+(i) \text{ alors } \varphi_{u_k} = 1 \text{ on a } u_{k \oplus 1} \in W^-(i) \text{ et } \varphi_{u_{k \oplus 1}} = 0 \quad (15)$$

$$\forall u_k (k = 0, \dots, n - 1) \text{ et } i \in (1, \dots, m)$$

$$\text{Si } u_k \in W^+(i) \text{ alors } \varphi_{u_k} = 0 \text{ on a } u_{k \oplus 1} \in W^-(i) \text{ et } \varphi_{u_{k \oplus 1}} = 1$$

où  $\oplus$  représente l'addition modulo  $n$ .

La mise à zéro des arcs parcourus dans le sens direct et la mise à un des arcs parcourus dans le sens inverse permettent d'obtenir une topologie différente du réseau sans modifier le flot dans le graphe. En effet, cette transformation sur les arcs intermédiaires respecte la contrainte (10). De plus, on peut définir le coût  $\gamma_c$  de chaque circuit par :

$$\gamma_c = \sum_{u_k / \varphi_{u_k} = 0} \gamma_{u_k} - \sum_{u_k / \varphi_{u_k} = 1} \gamma_{u_k} \quad (16)$$

Si  $\gamma_c > 0$  on a un circuit de coût positif.

Si  $\gamma_c < 0$  on a un circuit de coût négatif.

On peut donc dire que la modification de la topologie du réseau à partir d'un circuit de coût négatif diminue le coût total du réseau et inversement, et que la modification de la topologie du réseau à partir d'un circuit de coût positif augmente le coût total du réseau.

### Théorème

Le flot d'un réseau est un flot de coût minimal si et seulement si le réseau ne contient plus de circuit de coût négatif.

Nous avons utilisé l'algorithme de Floyd [Floy 62] pour trouver l'un des sommets du circuit de coût négatif, si il existe. On applique ensuite l'algorithme de Klein [Klein 73] pour déterminer les arcs de ce circuit et diminuer le coût du réseau en gardant le flot maximal.

Cette méthode a été simulée sur des fantômes et nous a donné dans tous les cas des résultats très satisfaisants (taux de conformité > à 95%). Malheureusement dans le cadre de notre application cette méthode est inapplicable car nos données de départ (courbes de densité) sont bruitées.

## 4.4. DESCRIPTION MATHÉMATIQUE DU CAS RÉEL

Jusqu'à présent, dans notre problème de reconstruction nous n'avons pas tenu compte de la présence du bruit. Cette hypothèse rend malheureusement les données des deux projections incompatibles :

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j \quad (17)$$

Dans ce cas la valeur du flot  $\varphi$  qui peut être transportée de la source vers le puits ne peut plus être maximale. Néanmoins, il est toujours possible d'effectuer une reconstruction en présence du bruit. Le principe de cette approche consiste à redéfinir les valeurs des capacités des arcs du deuxième et troisième ensemble d'arcs en fonction des courbes de densité existantes et du bruit poissonnien. De plus, on associe un coût différent de zéro aux deuxième et troisième ensembles d'arcs calculé aussi en fonction des courbes de densité existantes et du bruit poissonnien. D'autre part, le flot à transporter dans le réseau est égal à un flot moyen estimé donné par :

$$\varphi = \varphi_{\text{moyen}} = \frac{\left( \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j \right)}{2} \quad (18)$$

### 4.4.1. Initialisation des capacités et des coûts des arcs

Du fait de la grande variété des sources de bruits, une analyse précise des caractéristiques du bruit s'avérait trop compliquée.

Nous avons, comme dans les littératures [YANG 89][TALE 92], considéré l'hypothèse suivante. Le bruit sur l'amplitude et la largeur des courbes de densité est un bruit de type poissonnien. Dans ce cas on peut définir des limites supérieures et inférieures du flot sur les arcs des deuxième et troisième ensembles.

- La limite inférieure des arcs du deuxième ensemble est :

$$S_j^l = \max(0, a_j - \sqrt{a_j}) \quad j = 1, \dots, m$$

- La limite supérieure des arcs du deuxième ensemble est :

$$S_j^s = \min(n, a_j + \sqrt{a_j}) \quad j = 1, \dots, m$$

- La limite inférieure des arcs du troisième ensemble est :

$$W_j^l = \max(0, b_j - \sqrt{b_j}) \quad j = 1, \dots, n$$

- La limite supérieure des arcs du troisième ensemble est :

$$W_j^s = \min(n, b_j + \sqrt{b_j}) \quad j = 1, \dots, n$$

On affecte aux capacités des arcs  $u = (i, j)$  du deuxième et du troisième ensemble la valeur de la limite supérieure du flot pouvant circuler sur chaque arc allant du sommet  $i$  vers le sommet  $j$ .

$\forall i = 0$  et  $j(j = 1, \dots, m)$

Si  $u = (i, j) \in U$ , on a  $C_u = S_j^s$  pour l'arc  $u^+ = (i, j)$

$\forall i = (m + 1, \dots, m + n + 1)$  et  $j = m + n + 2$

Si  $u = (i, j) \in U$ , on a  $C_u = W_{i-m}^s$  pour l'arc  $u^+ = (i, j)$

Les capacités des arcs sont choisies pour que le flux circulant sur chaque arc ne puisse pas dépasser la valeur limite fixée par l'hypothèse du bruit poissonnien.

### Remarque :

Les capacités et les coûts des arcs intermédiaires restent quant à eux identiques au cas idéal.

Nous proposons de calculer les coûts des arcs du deuxième et du troisième ensemble à partir des valeurs inférieures du flot pouvant circuler sur chaque arc et du flot dans le graphe. Soit :

$$S_{\text{max}} = \max(S_1^l, S_2^l, \dots, S_m^l)$$

$$W_{\text{max}} = \max(W_1^l, W_2^l, \dots, W_n^l)$$

$\forall i = 0$  et  $j(j = 1, \dots, m)$

Si  $u = (i, j) \in U$ , on a  $\gamma_u = S_j^l \oplus S_{\text{max}} + \sum_{u \in W^-(j)} \varphi_u$  pour

l'arc  $u^+ = (i, j)$  où  $\oplus$  est addition modulo  $S_{\text{max}}$

$\forall i = (m + 1, \dots, m + n + 1)$  et  $j = m + n + 2$

Si  $u = (i, j) \in U$ , on a  $\gamma_u = W_{i-m}^l \oplus W_{\text{max}} + \sum_{u \in W^-(j)} \varphi_u$

pour l'arc  $u^+ = (i, j)$  où  $\oplus$  est addition modulo  $W_{\text{max}}$

Les coûts des arcs ainsi définis seront d'autant plus faibles que leur capacité sera grande et que le flot circulant sur l'arc sera faible. Ces valeurs de coûts permettront, lors de la reconstruction à coût minimal, d'orienter la reconstruction autour du centre de gravité et d'atteindre plus facilement le flot moyen.

4.4.2. Recherche du flot moyen dans le cas de projections bruitées

Nous proposons un algorithme de recherche du flot moyen dans le graphe, décrit sur l'organigramme de la Figure 11, pour lequel nous allons développer le principe de la recherche d'un chemin de  $S$  à  $T$  et l'augmentation du flot dans le graphe. Les arcs du graphe  $G(X, U)$  sont munis d'une borne supérieure de capacité  $C_u \geq 0$ , et  $\gamma_u$  représente le coût de passage d'une unité de flot sur l'arc  $u$ . Les  $C_u$  sont supposés de valeurs entières. Le flot nul est de valeur 0, de coût minimum et peut être pris comme flot de départ. On définit  $\bar{G}(\varphi_m^k)$  le graphe d'écart relatif à  $\varphi^k$  le flot courant de valeur  $\varphi_0^k$  à la  $K^{i\grave{e}me}$  itération. On attribue aux arcs de  $\bar{G}(\varphi^k)$  les coûts  $\bar{\gamma}$  et les capacités  $\bar{c}$  suivantes :

- $\forall i = 0$  et  $j(1, \dots, m)$ 
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u < C_u$  alors l'arc  $u^+ = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = \gamma_u$  et une capacité  $\bar{C}_u = C_u - \varphi_u$
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u > 0$  alors l'arc  $u^- = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = \infty$  et une capacité  $\bar{C}_u = 0$
- $\forall i(m+1, \dots, m+n+1)$  et  $j = m+n+2$ 
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u < C_u$  alors l'arc  $u^+ = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = \gamma_u$  et une capacité  $\bar{C}_u = C_u - \varphi_u$
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u > 0$  alors l'arc  $u^- = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = \infty$  et une capacité  $\bar{C}_u = 0$
- $\forall i(1, \dots, n)$  et  $j(j = n+1, \dots, m+n+1)$ 
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u < C_u$  alors l'arc  $u^+ = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = \gamma_u$  et une capacité  $\bar{C}_u = C_u - \varphi_u > 0$
  - Si  $u = (i, j) \in U$  et  $\varphi_u > 0$  alors l'arc  $u^- = (i, j)$  a un coût  $\bar{\gamma}_u = -\gamma_u$  et une capacité  $\bar{C}_u = \varphi_u$

On recherche  $P(\varphi^k)$  un chemin de coût minimal entre  $S$  et  $T$  dans le graphe  $\bar{G}(\varphi^k)$ . Nous avons utilisé pour cela l'algorithme de Ford Bellman [GOND 85]. On peut alors augmenter le flot dans le graphe. Trois situations peuvent se présenter.

- 1)  $P(\varphi^k)$  est un chemin de  $S$  à  $T$ , on a alors  $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \vec{p}$  où  $\vec{p}$  est le vecteur associé à  $P(\varphi^k)$ 
  - Soit  $(\vec{p})_u = 1$  si  $u^+ \in P(\varphi^k)$
  - et  $(\vec{p})_u = -1$  si  $u^- \in P(\varphi^k)$
  - Alors  $\varphi^{k+1}$  est un flot de valeur  $\varphi_0^k + 1$
- 2) Le chemin de  $S$  à  $T$  est composé d'un circuit de coût négatif. Soit  $P'(\varphi^k)$  ce chemin,  $P'(\varphi^k)$  est composé d'un ensemble d'arcs intermédiaires. On pose  $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \vec{p}'$  où  $\vec{p}'$  est le vecteur associé à  $P'(\varphi^k)$ .
  - Alors  $(\vec{p}')_u = 1$  si  $u^+ \in P'(\varphi^k)$
  - et  $(\vec{p}')_u = 0$  si  $u^- \in P'(\varphi^k)$
  - $\varphi^{k+1}$  est un flot de valeur  $\varphi_0^k + \sum_{u \in P'(\varphi^k)} (\vec{p}')_u$

3) L'algorithme s'arrête soit lorsque le flot moyen est atteint soit lorsqu'il n'existe plus de chemin allant de  $S$  à  $T$ .

Nous proposons sur la Figure 11 l'organigramme de l'algorithme de reconstruction

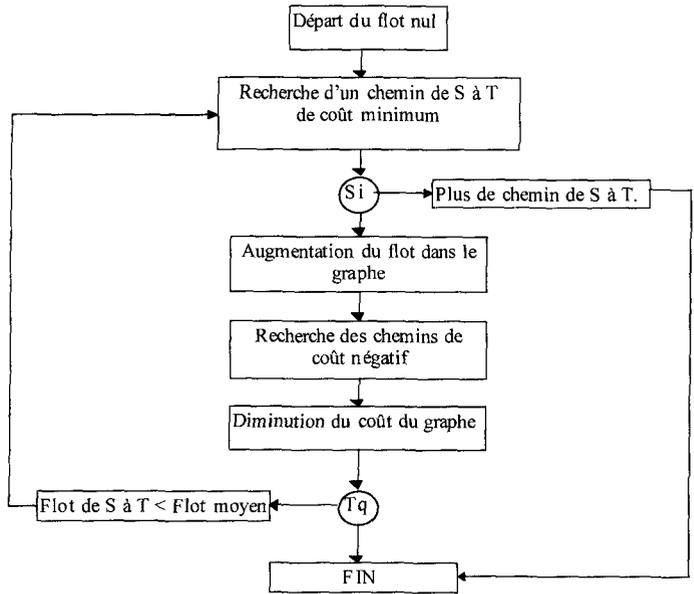


Figure 11. - Algorithme de reconstruction.

4.5. EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation a été réalisée en deux temps. Dans un premier temps, nous avons testé l'algorithme sur des courbes de densité non bruitées définies à partir de sections de forme variable. Dans un deuxième temps, l'algorithme a été testé sur des courbes de densité bruitées. Les critères de comparaisons sont ceux de Chang et Shelton [CHAN 71]. Ils s'expriment par l'erreur moyenne relative et le taux de conformité. L'erreur moyenne relative est définie par :

$$r = \frac{\sum_i^m \sum_j^n Mo(i, j) - Mx(i, j)}{\sum_i^m \sum_j^n Mo(i, j)} \tag{19}$$

où  $Mo(i, j)$  est la matrice de la section de départ, et  $Mx(i, j)$  la matrice reconstruite. La conformité est considérée comme le pourcentage du nombre d'éléments communs entre la matrice reconstruite  $Mx$  et son original  $Mo$ , d'où :

$$\text{Conf} = 100\% - r/2 \tag{20}$$

Nous proposons de décomposer l'expérimentation en différentes étapes qui permettront de valider l'algorithme du paragraphe 4.4

et d'évaluer de quoi dépendent ces performances. Les étapes que nous proposons sont les suivantes :

- Reconstruction dans le cas idéal (étape de validation).
- Evaluation de l'influence de la forme du modèle sur la reconstruction.
- Reconstruction à partir de courbes de densité non bruitées.
- Reconstruction à partir de courbes de densité bruitées.

#### 4.5.1. Reconstruction dans le cas idéal

Cette reconstruction permet de montrer que, partant d'une surface connue en utilisant comme données les courbes de densité de cette surface connue, la méthode de reconstruction que nous venons de décrire donne en résultat la surface initiale avec un taux de conformité supérieur à 99%.

#### 4.5.2. Evaluation de l'influence de la forme du modèle sur la reconstruction

Le taux de conformité de la reconstruction dépend de la forme et de la surface du modèle. Pour ne pas avoir à tenir compte d'un trop grand nombre de paramètres pour la surface et la forme du modèle, nous avons choisi d'utiliser un modèle du type « squelette » de la forme à reconstruire. Quatre formes de squelette différentes ont été utilisées pour une même surface à reconstruire (Figure 12).

- (1) Un modèle de la forme du squelette de la surface à reconstruire qui donne un taux de conformité de 99% pour la surface à reconstruire.
- (2) Un modèle approximatif de la forme du squelette de la surface à reconstruire, qui donne un taux de conformité de 93%.
- (3) Un modèle de forme différente du squelette de la surface à reconstruire, qui donne un taux de conformité de 82%.
- (4) Le même modèle qu'en (2) décalé par rapport à la surface à reconstruire, qui donne un taux de conformité de 84%.

Cependant, l'utilisation de modèles épais permet d'augmenter la précision de la reconstruction lorsque la forme du modèle est proche de la forme de la surface à reconstruire. C'est le cas, par exemple, pour la reconstruction d'artères en angiographie numérisée où la forme de la coupe précédemment reconstruite est utilisée comme modèle de la forme à reconstruire.

#### 4.5.3. Reconstruction à partir de courbes de densité non bruitées

Nous avons testé (Figure 13) l'algorithme de reconstruction pour des surfaces de formes concaves et convexes. Les taux de conformités obtenus sont compris entre 96% et 100%.

#### 4.5.4. Reconstruction à partir de courbes de densité bruitées

L'apport d'un bruit poissonnien sur les courbes de densité diminue le taux de conformité de 5%. Cependant, on retrouve bien la forme de la surface à reconstruire (Figure 13).

#### Remarque

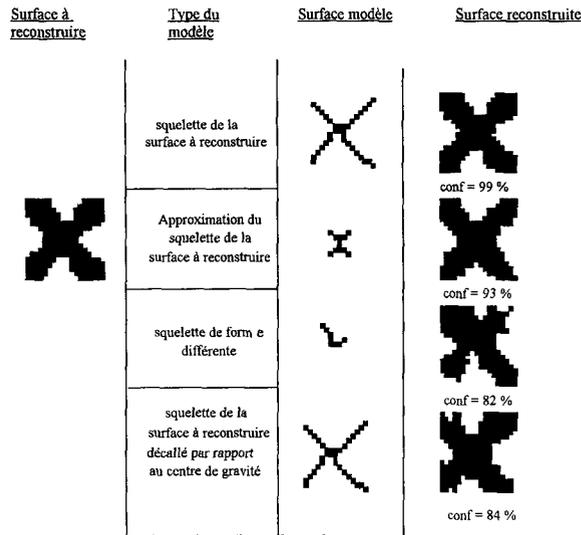
Dans les résultats présentés Figure 12 et Figure 13, aucun pré-traitement et post-traitement n'a été effectué sur les courbes de densité et sur la surface reconstruite. Nous avons évalué la reconstruction à partir de la surface reconstruite brute pour mieux appréhender et quantifier les paramètres qui vont guider la reconstruction. D'autre part, nous avons utilisé des formes types de faible surface pour obtenir des variations significatives du taux de conformité et de l'erreur moyenne. En effet, les erreurs de reconstruction se retrouvent le plus souvent sur les bords de la surface reconstruite. Ces erreurs paraîtront d'autant plus faibles que la surface sera plus importante.

## 4.6. DISCUSSION

Dans le cas idéal le problème de l'ambiguïté sur la surface à reconstruire est pratiquement résolu. On peut donc dire que le taux de conformité obtenu dépend uniquement du modèle. Dans la reconstruction par flot maximum à coût minimum, le modèle n'est pas une contrainte mais un apport d'informations pour diminuer l'ambiguïté. Nous avons décidé d'utiliser un modèle de type squelette de la surface à reconstruire. Les tests sur la forme du modèle nous ont permis de montrer que la reconstruction sera d'autant plus fidèle que le squelette aura une forme proche de la forme réelle du squelette de la surface à reconstruire et qu'il sera bien recadré par rapport à la surface à reconstruire. On obtient alors des taux de conformité supérieurs à 96% (Figure 13) qui correspondent à des surfaces très proches de la surface à reconstruire. Ces taux de conformités se dégradent peu en présence du bruit (de l'ordre de 5% de dégradation) et la surface reconstruite conserve bien la forme de la surface à reconstruire. Nous présentons Figure 14 une dent modèle, les contours de la projection de la dent à reconstruire, et les contours de la projection de la dent modèle. Nous présentons Figure 15 la reconstruction par déformation de la dent modèle.

## 4.7. CONCLUSION

La reconstruction par l'algorithme du flot maximum à coût minimum est une technique intéressante pour plusieurs raisons. Elle permet d'utiliser un modèle de forme quelconque. Elle permet de tenir compte du bruit dans la reconstruction.

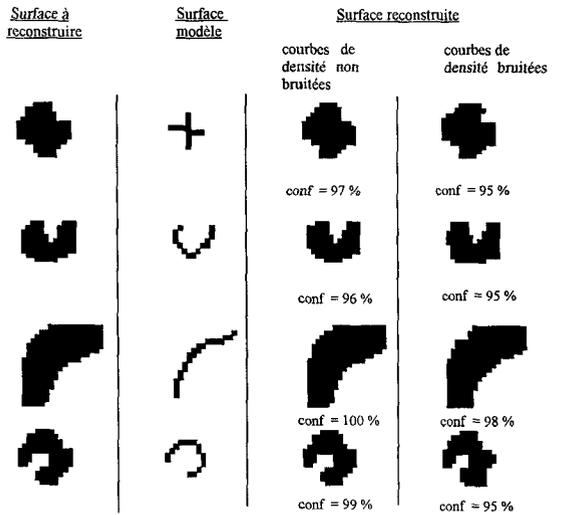


conf : conformité entre la matrice reconstruite et la matrice initiale

Resultats expérimentaux de la reconstruction pour des modèles de types différents.

	modèle 1	modèle 2	modèle 3	modèle 4
(1) Surface à reconstruire	216 points	216 points	216 points	216 points
(2) Surface modèle r de (1) et (2)	34 points 84 %	12 points 94%	8 points 96%	34 points 85%
(3) Surface reconstruite r de (1) et (3)	216 points 2%	213 points 15%	207 points 35%	220 points 32%

Figure 12. – Reconstruction à partir de modèles de types différents pour des courbes de densité non bruitées.



conf : conformité entre la matrice reconstruite et la matrice initiale pour des courbes de densité bruitées ou non bruitées.

Resultats expérimentaux de la reconstruction à partir de courbes de densité non bruitées

	Surface 1	Surface 2	Surface 3	Surface 4
(1) Surface à reconstruire	97 points	82 points	189 points	84 points
(2) Surface modèle r de (1) et (2)	15 points 84 %	15 points 82%	22 points 88%	16 points 81%
(3) Surface reconstruite r de (1) et (3)	97 points 7%	79 points 8%	189 points 0%	83 points 3%

Resultats expérimentaux de la reconstruction à partir de courbes de densité bruitées

	Surface 1	Surface 2	Surface 3	Surface 4
(1) Surface à reconstruire	97 points	82 points	189 points	84 points
(2) Surface modèle r de (1) et (2)	15 points 84 %	15 points 82%	22 points 88%	16 points 81%
(3) Surface reconstruite r de (1) et (3)	102 points 11%	84 points 10%	188 points 5%	87 points 10%

Figure 13. – Reconstruction de différents types de surfaces à partir de courbes de densité bruitées et non bruitées.

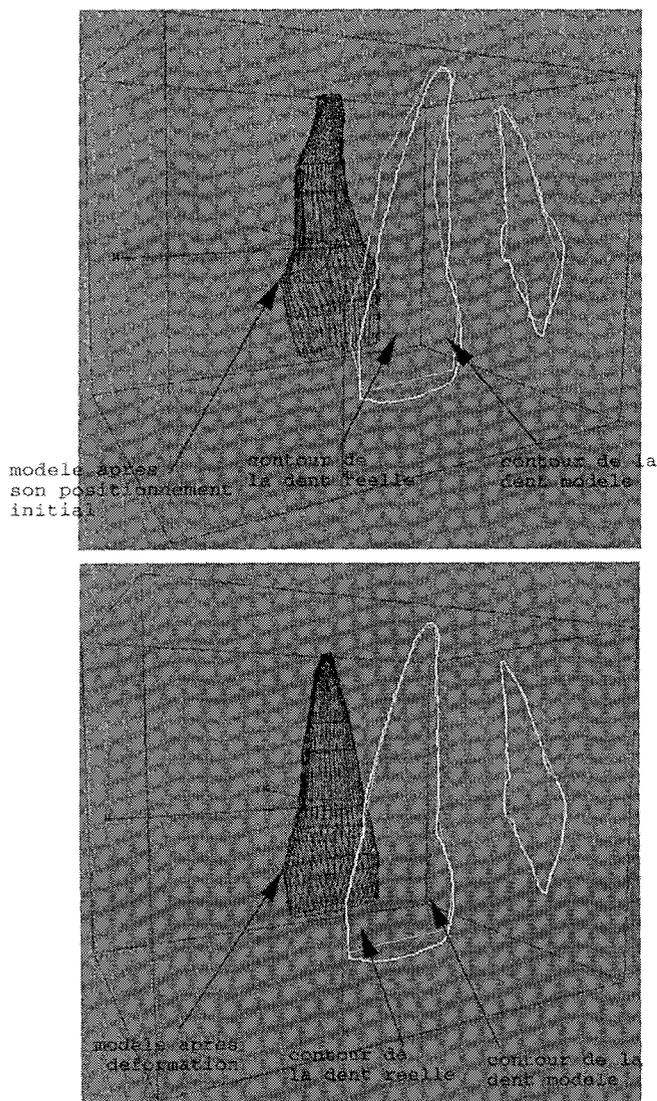


Figure 14.

Les algorithmes proposés dans la littérature pour la recherche du flot maximal à coût minimal [SLUM 82][YANG 89] [TALE 92] posent plusieurs problèmes.

Leur mise en œuvre dans le cas de projections bruitées nécessite au préalable une reconstruction dite « approximative » et un enchaînement complexe des différentes étapes décrites dans la reconstruction pour le cas idéal.

Ils ne convergent pas toujours et bouclent à l'infini quand il existe des circuits de coûts négatifs.

Nous proposons un algorithme fiable qui part du flot nul et augmente le flot à chaque itération jusqu'au flot maximal. Pour chaque itération la solution obtenue, de flot courant, est de coût minimum. Les résultats obtenus, compte-tenu du type de modèle utilisé, sont relativement bons (conf > 95%) et l'algorithme simple est rapide (Figure 11). De plus le type du modèle (« squelette » de la forme

à reconstruire) laisse une grande souplesse dans le choix de sa forme.

Cependant, cette technique nécessite un bon recadrage entre le modèle et les courbes de densité. Pour diminuer l'ambiguïté sur la surface à reconstruire et le positionnement du modèle, il est indispensable de posséder au moins les courbes de densité de la surface à reconstruire. C'est pourquoi nous pensons que cette méthode sera beaucoup plus adaptée à la reconstruction d'objets pour lesquels on dispose de courbes de densité comme en angiographie numérisée.

Dans le cas de notre application, cette technique de déformation d'un modèle est un peu lourde, compte-tenu des informations dont nous disposons. En effet, une simple modification du facteur d'échelle en  $x$  et en  $y$  permet de déformer plus simplement le modèle pour qu'il ait les mêmes contours que la dent réelle sur la vue de face et la vue de côté après projection.

### Remerciements

Les auteurs remercient la région Nord-Pas de Calais qui a financé ce travail.

Nous inscrivons ce travail dans la dynamique de recherche du groupe 3, reconstruction et modélisation 3D, du GDR 134 TDSI.

### BIBLIOGRAPHIE

- [ONNA 76] D.G.W Onnasch, P.H. Heintzen, A new approach for the reconstruction of the right or left ventricle from biplan angiocardiographic recording. *Comp.Card.*, pages 67-73, 1976
- [DBAI 86] Z. Dbai, P.R. Krishanaiah, C.R. Rao , P.C Reddy, Y.N. Sun, L.C. Zhao, Reconstruction of left ventricle from two orthogonal projections based on theorem of equal divisor curves. Technical Report Pittsburg 1986.
- [BENN 73] G.E. Bennington, An efficient minimal cost flow algorithm *Management Science* Vol. 19, n° 9 1042, 1051, 1973
- [BUSA 61] G. Busacker and P.J. Gowen, A procedure for determining a family of minimal cost network flow pattern. O.R.O. Technical report University of Hopkins 1961.
- [BUSA 65] G. Busacker and T.L. Saaty, *Finite Graphs and Networks : An Introduction with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [CHAN 71] S.K. Chang, The Reconstruction of Binary Patterns from their Projections, *Comm. ACM* 14, 1971, pages 21-25.
- [CHAN 73] S.K. Chang and C.K. Chow, The reconstruction of three-dimensional objects from two orthogonal projections and its application to cardiac cineangiography, *IEE Trans. Computers* C-22, 1973, pages 18-28.
- [CHAN 71] S.K. Chang and G.L. Shelton, Two algorithms for multiple-view binary pattern reconstruction. *IEEE Trans. Syst. Man, Cybernet.* SMC-1, 1971, 90-94.
- [DANT 60] G.B. Dantzig, On the shortest path through a network. *Manag.Science.* 1960, Vol. 6, pages 187-190.
- [FLOY 62] R.W. Floyd, Algorithm 47, shortest path. *Comm. of the ACM.* 1962, Vol. 5, page 345.
- [FORD 56] L.R. ford and D.R. Fulkerson, Maximal flow through a network. *Canad. J. of Math.* 1956, page 399.

- [FORD 57] L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson, A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canad. J. Math.* 9, 1957, pages 210-218.
- [FORD 59] L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson, A network flow feasibility theorem and combinatorial application. *Canad. J. Math.* 1959, Vol. 11, pages 440-450.
- [FORD 62] L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson, *Flows in networks*, Princeton Uni.Press, Princeton, N.J., 1962.
- [FORD 67] L.R. Ford, Fulkerson, J-C. Arinal, *Flows in networks*. Gauthier Villars Paris 1967.
- [GOND 85] M. Gondran, M. Minoux, *Graphes et algorithmes*. Eyrolles 1985.
- [HERM 73] T. Herman, Reconstruction of binary patterns from a few projections. *Int. Comp. Symp.* Amsterdam, 1973, pages 371-379.
- [HITC 41] F.L. Hitchcock, The distribution of product from several sources to numerous localities. *J. Math Phys* 1941, Vol. 20, pages 224.
- [JIVE 85] Jiye Shao, Three dimensional algebraic reconstruction from mutually orthogonal projections. *OPTK*, Vol. 71, 142, 148. 1985.
- [KLEI 67] M. Klein, A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems. *Manag. Sci.* 1967, Vol. 14, pages 205-220.
- [KLEI 73] M. Klein, Finding negative cycles. *INFOR.* 1973, Vol. 11, n° 1, pages 59-65.
- [MIST 81] C.A. Mistretta, A.B. Crummy, C.M. Strother, Digital angiography : perspective. *Radiology*, 1981, 139, pages 237-276.
- [NAHA 81] D. Nahameo, C.R. Craxford, A.C. Kak, Design constraints and reconstruction algorithms for traverse-continuous-rotate CT scanners. *Radiology*. 1981, 139.
- [REBO 93] S. Reboul, M.M. Rousset, A. Taleb-Ahmed, H. Blocquel, J.P. Dubus, Présentation d'un logiciel d'étude de la face chez l'enfant. G.I.R.S.O Lille 1993.
- [REBO 93] S. Reboul, M.M. Rousset, A. Taleb-Ahmed, H. Blocquel, J.P. Dubus, Logiciel d'étude quantitative et représentation de l'évolution de la face chez l'enfant. *Renc. Jeun. Cherch. en Odont A.D.F PARIS* 1993.
- [ROY 59] B. Roy, Cheminement et connexité dans les graphes, application aux problèmes d'ordonancement. Thèse d'état 1960, Publiée par METRA.
- [SLUM 82] C. Slump Gerbrands, A new approach for the reconstruction of the left ventricle from two projections. *Computer Graphics and images Processing*. Vol. 18,36 1982.
- [TALE 91] A. Taleb-Ahmed, S. Reboul, F. Salome, J-P. Dubus, Méthode de reconstruction tridimensionnelle indirecte de la dentition à partir de deux clichés radiographiques en incidence orthogonale. *festival 3D, Premier Symposium International de l'Image en Relief*. Paris 1991.
- [TALE 92] A. Taleb-Ahmed, S. Reboul Contribution de synthèse sur les méthodes de reconstruction. *GDR Reconstruction 3D Strasbourg* 1992.
- [TALE 92] A. Taleb-Ahmed, S. Reboul, M.M. Rousset, J-P. Dubus, 3D reconstruction of children's jaw. 14<sup>e</sup> Conf Int IEEE EMBS, Paris 1992.
- [TANA 76] E. Tanaka and T.A. Inuma, Correction functions and statistical noises in transverse section picture reconstruction. *Comput. Biol. Med.* 1976, Vol. 6, pages 295-306.
- [YANG 89] R.L. Yang, Traitement numérique des angiogrammes vidéodensitométrie et reconstruction d'images en 3D à partir de deux projections orthogonales. Thèse CNAM PARIS 1989.

*Manuscrit reçu le 24 avril 1994.*

## LES AUTEURS

### Serge REBOUL



Serge Reboul est titulaire d'une maîtrise de Télécommunications de l'Université de Lille I et d'un D.E.A d'électronique préparé au Laboratoire de Mesures Automatiques de l'Université des Sciences et Technologies de Lille I en 1991. Il prépare actuellement une thèse de doctorat à l'Université du Littoral (site de Calais) dans le laboratoire I.S.I.R. Ses travaux portent sur l'apport d'hypothèses heuristiques dans les méthodes de reconstructions et de segmentations pour résoudre les problèmes d'ambiguïté et augmenter la précision des traitements dans leurs applications à la mesure.

### Francis WATTRELOT

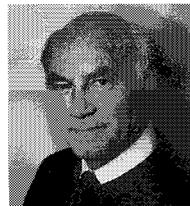


Ingénieur C.N.A.M, ingénieur de recherche de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, il est responsable de l'atelier génie logiciel du Laboratoire de Mesures Automatiques. Ses travaux portent sur l'étude et la conception d'algorithmes de traitements du signal et de l'image.

### Monique-Marie ROUSSET

Monique-Marie Rousset est Chirurgien Dentiste, elle a soutenu une thèse de doctorat d'Université en odontologie en décembre 1994 dans le cadre du Laboratoire de morphogénèse céphalique et prévention (Université de Lille II). Ses travaux de recherches portent sur l'étude tridimensionnelle des mouvements dentaires au cours de la croissance.

### Jean Paul DUBUS



Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, il est responsable du Laboratoire de Mesures Automatiques et du Laboratoire d'Instrumentation pour le Signal, l'Image et les Réseaux à l'Université du Littoral, site de Calais. Il s'intéresse au traitement du signal et de l'image, notamment dans le domaine de la reconstruction trois dimensions, dans le domaine de la compression et des traitements temps réel.

### Abdelmalik TALEB-AHMED



Abdelmalik Taleb-Ahmed est Maître de Conférences à l'Université du Littoral à Calais depuis septembre 1992. Il a fait ses études à l'Université des Sciences et Technologie de Lille I où il a obtenu en février 1992 le doctorat nouvel norme en électronique. Ses principaux domaines de recherches sont la vision en 3D, notamment tout ce qui touche à la représentation et reconstruction 3D et en plus de forts liens en vision linéaire.