

Implantations de filtres de Gabor par pyramide d'images passe-bas

Gabor Filter Implementation by Low-Pass Image Pyramid

par Anne GUÉRIN-DUGUÉ, Patricia M. PALAGI

Laboratoire de Traitement d'images et de Reconnaissances de Formes
Institut National Polytechnique de Grenoble
46 Av. Félix Viallet, F-38031 Grenoble cedex, France
email : guerin@tif.inpg.fr - palagi@tif.inpg.fr

résumé et mots clés

Pour les applications nécessitant une analyse par orientations, les fonctions de Gabor produisent une décomposition en ondelettes très utilisée. Cette décomposition par orientation est très lourde en temps de calcul, pour des filtres orientés de type passe-bande positionnés à basse fréquence et appliqués par convolution directe. L'association avec des représentations pyramidales permet une implantation plus efficace des filtres de Gabor. A travers des pyramides non orthogonales comme le sont celles à base de filtrage gaussien, le filtre de Gabor subit des modifications de caractéristiques spectrales. Pour annuler ces modifications, des corrections adéquates doivent être prises en compte dès la génération du noyau de convolution. Deux exemples de décomposition pyramidale sont étudiés, à titre d'illustration et de comparaison.

Filtre de Gabor, Filtre orienté passe-bande, Décomposition pyramidale.

abstract and key words

For applications needing orientation analysis, Gabor functions provide a well-known and frequently used wavelet decomposition. Localised band-pass low frequency filters, if implemented through direct convolution, lead to costly orientation image decompositions. Association with pyramidal representations yields a more efficient Gabor filter implementation, but this non-orthogonal gaussian decomposition alters the filters overall spectral characteristics. To counteract this effect, corrective action must be taken during the generation of the convolution kernels. Two examples of pyramidal decomposition illustrate the efficiency of our Gabor filter implementation.

Gabor filter, Band-pass oriented filter, Pyramidal decomposition.

1. introduction

De nombreuses applications en traitement d'images font appel à l'utilisation de filtres orientés passe-bande, comme par exemple, l'analyse de textures ou objets par attributs fréquentiels [2, 3, 9, 12, 14, 21], l'estimation du mouvement [13, 20] par filtres orientés spatio-temporels, ... Cette étude se place dans ce cadre d'applications, nécessitant une implantation de filtres orientés passe-bande couvrant l'espace fréquentiel. Nous en détaillons une mise en œuvre à l'aide de pyramide isotrope non-orthogonale en soulevant les distorsions dues aux interactions entre les caractéristiques fréquentielles des niveaux de la pyramide et celles du filtre orienté passe-bande.

Ces filtres orientés passe-bande peuvent être vus comme des « sondes » à placer dans l'espace fréquentiel, caractérisées par leur localisation et leur sélectivité. Deux modèles de fonctions

sont couramment utilisés [1]. Le premier est le modèle 1D établi par Gabor [10] puis étendu en 2D [8] qui a une localisation optimale en spatial et en fréquentiel. Les fonctions utilisées sont des ondes sinusoïdales modulées par une fonction gaussienne. Ce modèle permet une manipulation simple des caractéristiques spectrales de ces filtres, à savoir la localisation fréquentielle et la sélectivité. Le second modèle est basé sur des fonctions en forme de « chapeau mexicain », comme initialement la dérivée seconde d'une fonction gaussienne [17], ou par approximation suivant la différence de fonctions gaussiennes décalées (« DOOG », « Difference of Offset Gaussian ») [15]. La difficulté de ce modèle est l'interdépendance, à travers les pondérations de la combinaison, des paramètres de position en fréquence et de sélectivité du filtre obtenu. Aussi ce modèle ne sera pas retenu par la suite.

Pour les domaines d'application cités précédemment, l'espace fréquentiel est recouvert uniformément en fréquence et en orien-

tation. Ceci peut-être réalisé par une décomposition continue en ondelettes de Morlet (distincte de l'analyse de Gabor basée sur des fonctions similaires mais où la largeur de l'enveloppe gaussienne est constante pour toutes les fréquences). Par cette décomposition continue, les paramètres spectraux de localisation peuvent varier continûment dans tout l'espace fréquentiel [1]. En pratique, un tel recouvrement de l'espace fréquentiel est le plus souvent obtenu en plaçant les filtres orientés passe-bande sur des fréquences disposées en octaves et couvrant toutes les orientations (par exemple 4 bandes de fréquences et 6 orientations par bande pour 24 filtres). Ainsi, cela nécessite la mise en œuvre d'un nombre plus ou moins important de filtres, dont l'implantation par convolution directe est très lourde en temps de calcul et cela d'autant plus que les filtres sont appliqués sur des bandes en basse fréquence. En pratique, on implante une décomposition discrète où les paramètres des filtres prendront des valeurs quantifiées (fréquence centrale en octave, un filtre à chaque rotation de 45 degrés, par exemple). Suivant un tel schéma, l'implantation sera optimisée en associant les filtres orientés à une décomposition pyramidale dyadique (exemple dans [13] ou [19]). On obtient ainsi une décomposition orientée en ondelettes dont les caractéristiques d'orthogonalité entre niveaux de résolution de la décomposition obtenue sont liés à celles de la pyramide utilisée. Ici, le fait d'avoir choisi les ondelettes de Morlet fait passer cette propriété d'orthogonalité au second plan puisque par nature cette décomposition n'est pas orthogonale. Par contre ces aspects sont essentiels lorsqu'il s'agit de réaliser une reconstruction d'image à partir de sa décomposition (par exemple pour toutes les applications en compression). Pour cela, les outils adéquats reposent sur des décompositions en ondelettes orthogonales (ondelettes de Daubechies par exemple [7]) dans le cadre général défini par Mallat [16].

Après une description succincte des filtres orientés passe-bande suivant le modèle de Gabor (paragraphe 2), on rappelle comment une décomposition orientée peut être obtenue en appliquant identiquement à lui-même le filtre orienté aux différents niveaux de la pyramide. Ce principe étant connu, on montre ici que le filtre orienté de bande voit ses caractéristiques spectrales modifiées par interaction avec les réponses fréquentielles aux différentes résolutions (paragraphe 3). Cela se produit en utilisant une pyramide multi-résolution isotrope non-orthogonale. Ces effets peuvent être annulés en prenant en compte des corrections adéquates dès la génération du noyau de convolution. Si la pyramide utilisée est une pyramide dyadique, les modifications se répercuteront de façon homogène à tous les niveaux de la pyramide. Si la pyramide n'est pas exactement dyadique, les variations relatives de ces modifications spectrales ne seront pas identiques à tous les niveaux de résolution. Ces deux cas seront traités ici et on prendra deux exemples pour illustrer la technique d'implantation et de correction sur des pyramides isotropes non-orthogonales (pyramide de Chéhikian [5] au paragraphe 4 et pyramide de Burt [4] au paragraphe 5). Les implantations sont comparées du point de vue de l'homogénéité du filtrage réalisé (paragraphe 6).

2. présentation des filtres de Gabor 2D

2.1. équations

En dimension 2, les filtres de Gabor sont des filtres orientés passe-bande. Dans le domaine fréquentiel, la courbe de réponse est une fonction gaussienne de fréquence centrale et d'étalement donnés (figure 1). Soit F_0 , la fréquence centrale à l'orientation θ_0 définie par les fréquences horizontales et verticales respectivement u_0 et v_0 .

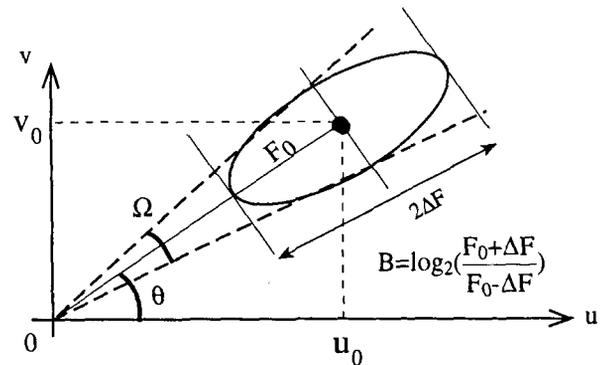


Figure 1. – Contour à un niveau donné ζ_b de la réponse en fréquence d'un filtre de Gabor de fréquence centrale F_0 , d'orientation θ_0 et de bandes radiale et transverse respectivement B_{ζ_b} et Ω_{ζ_b} .

Soient σ_u^2 et σ_v^2 , les paramètres de variance horizontale et verticale de la réponse en fréquence. Cette réponse pour un tel filtre ($u_0, v_0, \theta_0, \sigma_u^2, \sigma_v^2$) suit l'équation 1,

$$F_{Gb}(u, v) = \exp[-2\pi^2(\sigma_u^2(u' - u_0)^2 + \sigma_v^2(v' - v_0)^2)] \quad (1)$$

avec (u', v') obtenus par la rotation de (u, v) de centre F_0 et d'angle θ_0 .

Ainsi, dans le domaine fréquentiel, ce filtre se définit complètement par la connaissance de 4 paramètres :

- 2 paramètres de position, (u_0, v_0) ou (F_0, θ_0),
- 2 paramètres d'étalement, (σ_u^2, σ_v^2) ou ($B_{\zeta_b}, \Omega_{\zeta_b}$).

La bande radiale (B_{ζ_b}) est calculée en octave et la bande transverse (Ω_{ζ_b}) en écart angulaire. Des relations simples lient les couples des paramètres d'étalement (équations 2 et 3),

$$B_{\zeta_b} = \log_2\left(\frac{\pi\sigma_u F_0 + \alpha}{\pi\sigma_u F_0 - \alpha}\right) \quad (2)$$

$$\Omega_{\zeta_b} = 2\text{Arctg}\left(\frac{\alpha}{\pi\sigma_v F_0}\right) \quad (3)$$

en posant,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\log(1/\zeta_b)}{2}}$$

Dans la suite de l'article, on considèrera des bandes passantes définies à mi-niveau ($\zeta_b = 0.5$).

Dans le domaine spatial, la réponse impulsionnelle de ces filtres se définit comme une onde sinusoïdale modulée par une fonction gaussienne (équations 5 et 6 pour respectivement, la partie réelle et imaginaire). La figure 2 représente ces réponses pour un filtre monodimensionnel donné, en considérant un noyau de convolution soit supposé infini, soit tronqué à un nombre fini de pas.

$$g(x', y') = \exp\left[-\pi\left(\frac{x'^2}{2\sigma_u^2} + \frac{y'^2}{2\sigma_v^2}\right)\right] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (x', y') = & (x \cdot \cos \theta_0 + y \cdot \sin \theta_0, \\ & -x \cdot \sin \theta_0 + y \cdot \cos \theta_0) \end{aligned}$$

$$\text{Réel}[f_{Gb}(x, y)] = g(x', y') \cdot \cos[2\pi(u_0x + v_0y)] \quad (5)$$

$$\text{Imag}[f_{Gb}(x, y)] = g(x', y') \cdot \sin[2\pi(u_0x + v_0y)] \quad (6)$$

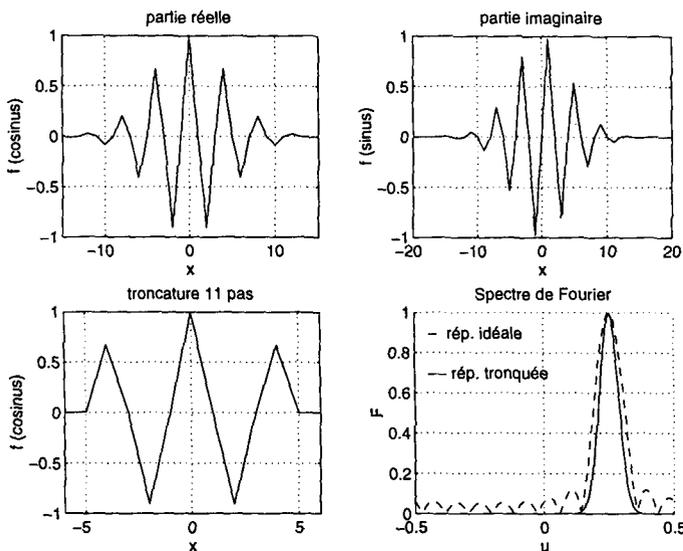


Figure 2. – Filtre à $F_0 = 0.25$, $\theta_0 = 0$ et $B_{0.5} = 0.5$. Haut : Réponses impulsionnelles réelle et imaginaire. Bas-gauche : Réponse impulsionnelle réelle tronquée sur 11 pas. Bas-droite : Comparaison de la réponse en fréquence.

2.2. implantations directes

2.2.1. troncature du noyau spatial

L'implantation numérique des filtres par convolution directe dans le domaine spatial nécessite la troncature de l'enveloppe gaussienne. On définit un seuil d'amplitude noté ζ_s , en dessous duquel on considèrera l'amplitude de la réponse impulsionnelle comme négligeable et donc nulle. Soit F_{Gb} la réponse idéale en fréquence,

et FT_{Gb} la réponse après troncature du noyau de convolution au seuil ζ_s dans le domaine spatial.

Pour choisir ce seuil de troncature (compromis entre la taille et la déformation de la réponse par ondulation de Gibbs), on se donne un critère d'erreur quadratique moyenne entre la réponse idéale F_{Gb} et son approximation FT_{Gb} (équation 7).

$$\bar{\epsilon}^2 = 100 \cdot \frac{\int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [F_{Gb}(u, v) - FT_{Gb}(u, v)]^2 du \cdot dv}{\int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [F_{Gb}(u, v)]^2 du \cdot dv} \quad (7)$$

La figure 3 illustre pour différentes variances, l'évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la taille du noyau de convolution. La taille du noyau de convolution peut se fixer à partir de ce critère, en se donnant un seuil d'erreur à ne pas dépasser.

Prenons le seuil à 1%. Ainsi on considère qu'en dessous de 1%, une augmentation supplémentaire de la taille (en nombre de lignes et de colonnes) n'apporte plus d'amélioration significative du critère d'erreur. Ces tailles caractéristiques sont repérées sur la figure 3.

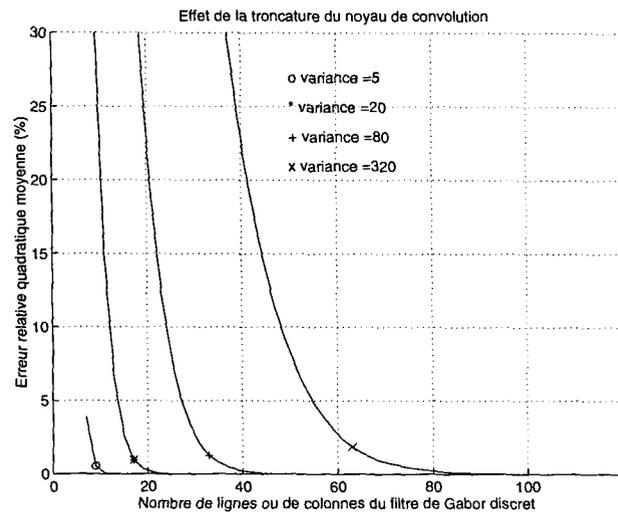


Figure 3. – Evolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction de la taille du noyau de convolution.

2.3. liaison entre les paramètres de variances et l'étendue spatiale

Un filtre sera d'autant plus sélectif en fréquence que les variances σ_u^2 et σ_v^2 seront importantes. Ainsi dans le domaine spatial, le noyau de convolution sera de grande taille avec un nombre de

lignes ou de colonnes pouvant être évalué par l'équation 8, une fois le seuil de troncature ζ_s fixé,

$$taille = 1 + E \left[2\sigma \sqrt{2 \log(1/\zeta_s)} \right] \quad (8)$$

avec $\sigma = \sigma_u$ pour le nombre de lignes et $\sigma = \sigma_v$ pour le nombre de colonnes, et E l'opérateur d'extraction de la partie entière.

Les tailles des noyaux de convolution déterminées au paragraphe 2.2.1 (erreur quadratique moyenne juste inférieure à 1%) correspondent, en appliquant l'équation 8, à une troncature de l'enveloppe spatiale gaussienne au seuil ζ_s de 0.2.

2.4. cas pratique des filtres d'octave

Pour certaines applications, par exemple en analyse de textures, les images sont décomposées en bandes de fréquence et en orientations [3, 9, 11, 19]. Pour une bande de fréquence centrale donnée (F_0 fixée), le changement d'orientation est obtenu par rotation de l'angle θ_0 donné. A largeur de bande constante (B_{ζ_b} et Ω_{ζ_b} fixées), la transformation du filtre dans le domaine fréquentiel, sur une autre bande de fréquence, se déduit par translation et dilatation dans le rapport des fréquences. On obtient une suite d'ondelettes de Morlet [1], dont la forme est invariante d'une échelle de fréquence à une autre. A chaque division par un rapport a de la fréquence centrale, l'ondelette associée aura un étalement spatial a fois plus grand.

Par exemple, une ondelette assurant un filtrage de bande centrée sur la fréquence réduite 0.25 et de largeur radiale de 1 octave aura une variance σ_u^2 égale à 5 et correspondra à une largeur spatiale de 9 pas (erreur quadratique moyenne limitée à 1%). Les ondelettes d'octaves inférieures, de fréquence centrale 0.25/2, 0.25/4, et 0.25/8 auront respectivement comme variance σ_u^2 égale à 20, 80 et 320 et comme largeur spatiale, 17, 33 et 65. Cette application numérique illustre la liaison entre la bande radiale, la variance σ_u^2 et la largeur spatiale de l'ondelette. La bande transverse, la variance σ_v^2 et la hauteurs spatiales sont liées de façon analogue.

Sur ces considérations de taille du noyau de convolution et donc de temps de calcul, l'implantation directe des filtres orientés passe-bande à diverses échelles tirera avantage d'un couplage avec une pyramide dyadique isotrope en multirésolution obtenue par filtrage passe-bas ou passe-bande et sous-échantillonnage, où à chaque niveau de la pyramide vers les résolutions les plus basses, l'image est sous-échantillonnée et filtrée, et donc réduite d'un facteur deux dans chaque direction. Un noyau de convolution ($F_0, \theta_0, B_{\zeta_b}, \Omega_{\zeta_b}$) calculé pour une résolution donnée, et appliqué identiquement à lui même, à l'image de résolution juste inférieure, effectuera un filtrage de même orientation (θ_0), de même bandes passantes ($B_{\zeta_b}, \Omega_{\zeta_b}$) et de fréquence centrale $F_0/2$. Le gain en temps de calcul est double :

- réduction d'un facteur 4 de la taille de l'image,
- réduction d'un facteur 4 de la taille du noyau de convolution.

3. utilisation des décompositions pyramidales

3.1. principes de génération des pyramides d'images

La génération d'une suite d'images de différentes résolutions se réalise classiquement par l'enchaînement d'opérations de filtrage passe-bas et de sous-échantillonnage. Ainsi, on obtient au fur et mesure que l'on descend l'échelle des résolutions, des images de taille réduite d'un facteur deux dans chaque direction. Le processus est itéré jusqu'à la résolution souhaitée [4, 5, 6, 16, 22]. Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi de comparer l'implantation entre la pyramide de Burt [4] et celle de Chéhikian [5], car d'une part elles sont très semblables dans leur principe de génération et d'autre part le modèle gaussien utilisé à la fois pour le filtre orienté et la décomposition pyramidale donne un cadre homogène à la décomposition. Ces deux pyramides ne diffèrent que par le choix du noyau de filtrage et l'emplacement des sorties dans la boucle « filtrage sous-échantillonnage ». Elles seront décrites succinctement aux paragraphes 4.1 et 5.1. Une description comparée plus complète se trouve dans [5].

3.2. filtrage de Gabor sur un niveau de pyramide

Pour exposer le principe de l'implantation des filtres orientés à partir d'une décomposition pyramidale, on restreint la description des niveaux de résolution à leurs paramètres caractéristiques. Ainsi une image au niveau k de la pyramide correspond à une image de taille $N/2^k \times N/2^k$, dont le spectre admet la fréquence maximale réduite f_{n_k} . Le niveau 0 de la pyramide correspond à l'image initiale, de fréquence maximale réduite $f_{n_0} = 0.5$. La décomposition pyramidale choisie impose la suite des fréquences f_{n_k} .

Pour associer un filtre de Gabor centré sur la fréquence F_0 à un niveau k , celui-ci doit satisfaire la condition suivante :

$$f_{n_{k+1}} \leq F_0 < f_{n_k} \quad (9)$$

Supposons k_0 choisi. Les noyaux de convolution sont calculés par les équations 2 et 3 (paire et impaire) pour un filtre de fréquence centrale $F'_0 = F_0 \times 2^{k_0}$, de bande radiale et transverse B_{ζ_b} et Ω_{ζ_b} . Les équations 2 et 3 permettent d'obtenir les variances $\sigma_u'^2$ et $\sigma_v'^2$ de ce nouveau filtre. Le noyau de convolution ainsi calculé est tronqué suivant les principes énoncés précédemment.

Ce noyau appliqué au niveau k_0 de la pyramide, réalisera un filtre de bande B_{ζ_b} et Ω_{ζ_b} , centré sur la fréquence $F'_0/2^{k_0}$, soit

F_0 et d'écart-types $\sigma'_u \times 2^{k_0}$ et $\sigma'_v \times 2^{k_0}$, soient σ_u et σ_v . La taille de ce noyau de convolution est 2^{k_0} fois plus petite dans les deux directions x et y , que celle d'un noyau d'un filtre de même bande passante, centré sur la fréquence F_0 et appliqué à l'image originale.

Du point de vue du temps de calcul et de la mémoire, cette autre implantation est extrêmement rentable. Mais elle présente un inconvénient : le filtre n'est plus appliqué à l'image originale mais à une image ayant subi des transformations successives par filtrage passe-bas et sous-échantillonnage pour arriver au niveau k_0 . Les filtres passe-bas n'étant pas idéaux, leur courbe de réponse combinée multiplicativement avec celle du filtre de Gabor à implanter, introduit dans le domaine fréquentiel une atténuation de la réponse finale, un décalage en fréquence et une modification de la sélectivité.

3.2.1. modification des caractéristiques spectrales

Considérons que pour atteindre le niveau de résolution k_0 , l'image originale a été filtrée par un filtre passe-bas équivalent à un filtre gaussien isotrope $F_{Gs}(u, v)$ de variance σ_g^2 (équation 10). Ainsi en appliquant à cette image un filtrage de Gabor (équation 1), il en résultera un filtre équivalent de courbe de réponse $F_{Gs}(u, v) \times F_{Gb}(u, v)$.

$$F_{Gs}(u, v) = \exp[-2\pi^2\sigma_g^2(u^2 + v^2)] \quad (10)$$

La courbe de réponse de ce nouveau filtre $FE_{Gb}(u, v)$ (la lettre E précise qu'il s'agit du filtre effectif obtenu) s'écrit suivant l'équation 11, avec un premier terme mettant en évidence l'atténuation de l'amplitude maximale et un second terme conforme à un filtrage de Gabor de fréquence centrale (u_{E0}, v_{E0}) et de variance $(\sigma_{Eu}^2, \sigma_{Ev}^2)$. Par cette opération, les variances réelles sont supérieures aux variances théoriques initiales (le filtre obtenu est plus sélectif) et le module de la fréquence centrale effective est inférieur à celui initial (le filtre est décalé vers les basses fréquences).

$$FE_{Gb}(u, v) = \exp[-2\pi^2\sigma_g^2(u_0u_{E0} + v_0v_{E0})] \times d \quad (11)$$

$$\exp[-2\pi^2(\sigma_{Eu}^2(u - u_{E0})^2 + \sigma_{Ev}^2(v - v_{E0})^2)]$$

$$\sigma_{Eu}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_g^2$$

$$\sigma_{Ev}^2 = \sigma_v^2 + \sigma_g^2$$

$$u_{E0} = \frac{u_0\sigma_u^2}{\sigma_{Eu}^2}$$

$$v_{E0} = \frac{v_0\sigma_v^2}{\sigma_{Ev}^2}$$

Il est intéressant de remarquer que l'erreur relative sur la fréquence centrale entre le filtre théorique et le filtre effectif dépend uniquement des variances. De plus cet écart est d'autant plus grand que

la variance du filtre passe-bas (σ_g^2) est grande.

$$Ecart_u = \frac{\delta u_0}{u_0} = \frac{\sigma_g^2}{\sigma_g^2 + \sigma_u^2}$$

$$Ecart_v = \frac{\delta v_0}{v_0} = \frac{\sigma_g^2}{\sigma_g^2 + \sigma_v^2}$$

La figure 4 montre l'évolution de cet écart pour diverses variances σ^2 (σ_u^2 ou σ_v^2) et σ_g^2 . La gamme de variance σ^2 a été découpée en 4 zones et rattachée à des filtres de fréquence centrale théorique en octave. Les paramètres choisis de variance σ_g^2 correspondent à ceux fournis par une décomposition pyramidale d'après l'algorithme de Chéhikian (paragraphe 4).

Ainsi pour les paramètres de filtres usuels, on peut considérer que l'erreur relative est comprise entre 5% et 20%. Cette erreur est constante si σ_g^2 et (σ_u^2, σ_v^2) varient dans les mêmes proportions, en divisant par deux la fréquence tout en maintenant constantes les largeurs de bande passante. Cela est représenté dans les quatre cadres de la figure 4. Pour une implantation numérique des filtres, il faut évaluer cette erreur sur le positionnement du filtre, en la comparant à l'écart absolu exprimé en pas de quantification de la fréquence (équation 12 pour le décalage suivant les fréquences horizontales). Ce pas est égale à $1/N$, pour une image de taille $N \times N$.

$$\delta u = \frac{\delta p_u}{N}$$

$$\delta p_u = E \left(N \cdot u_0 \cdot \frac{\sigma_g^2}{\sigma_g^2 + \sigma_u^2} \right) \quad (12)$$

La figure 5 illustre cette dérivé de la fréquence en pas de quantification (δp_u), pour une image de taille 256×256 . Les configurations des filtres sont les mêmes que celles décrites à la figure 4.

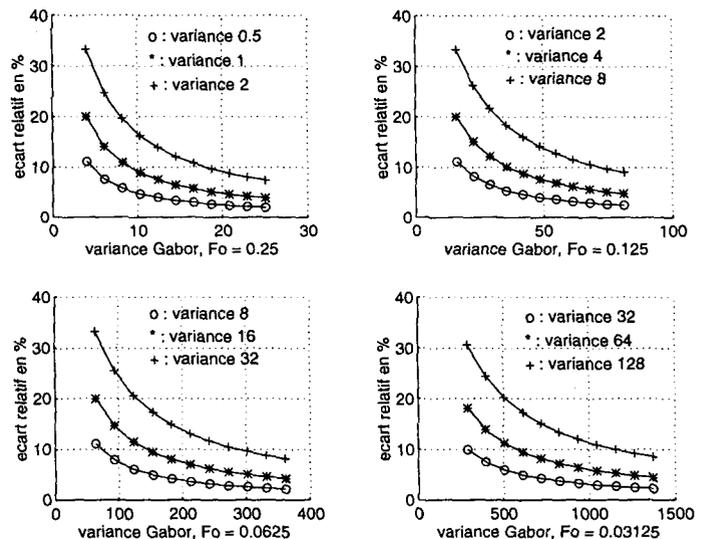


Figure 4. – Evolution de l'écart fréquentiel relatif, en fonction des variances du filtre de Gabor initial et du filtre Gaussien passe-bas. Le filtre de Gabor a été positionné sur 4 fréquences centrales en octave.

Implantations de filtres de Gabor

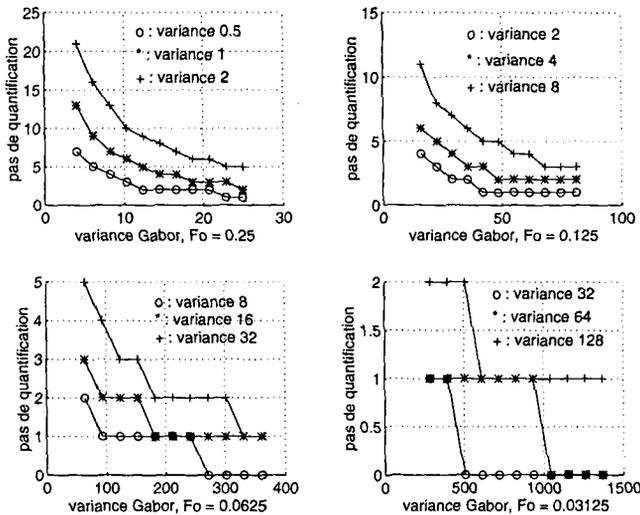


Figure 5. – Evolution de l'écart absolu exprimé en pas de quantification fréquentiel en fonction des variances du filtre de Gabor initial et du filtre Gaussien passe-bas. Le filtre de Gabor a été positionné sur 4 fréquences centrales en octave. La taille de l'image est de 256×256 pixels.

Pour des variances supérieures à 100, ce décalage est faible puis négligeable car il devient inférieur à un pas de quantification.

Les deux derniers graphiques (4 et 5) suggèrent tout naturellement l'implantation des filtres de Gabor pyramidaux, de fréquence centrale $0.25/2^k$ à partir d'un niveau de résolution k . Avec cet autre point de vue, les deux cadres supérieurs correspondent aux implantations des niveaux 0 (gauche) et 1 (droite) et les deux cadres inférieurs, aux niveaux 3 (gauche) et 4 (droite). Tous ces filtres forment une famille d'ondelettes à bande passante constante.

Le tableau 1 indique alors la correspondance des paramètres de fréquence, taille et variance pour un même filtre appliqué à l'image originale et à un niveau k .

	Image originale	Image à la résolution k
Filtre : F_0	u_0	$u_0/2^k$
Image : Taille	N	$N/2^k$
Filtre : σ_u^2	σ_u^2	$\sigma_u^2 \cdot 2^{2k}$
Filtre : σ_v^2	σ_v^2	$\sigma_v^2 \cdot 2^{2k}$

Tableau 1. – Evolution des configurations «filtre-image» de la résolution initiale à la résolution k

Ainsi à partir du niveau 2, les décalages en fréquence consécutifs au filtrage passe-bas dans la pyramide deviennent négligeables et ne sont plus quantifiables.

3.2.2. correction

La correction du décalage en fréquence et de l'atténuation s'analysent suivant deux points de vues :

– Choisir une décomposition pyramidale orthogonale utilisant une base de fonctions orthogonales entre niveaux de résolution [Mallat89, Unser93], pour que cet effet soit négligeable.

– A partir d'un choix préalable de décomposition pyramidale non orthogonale, prendre en compte les modifications des caractéristiques spectrales pour calculer en conséquence les paramètres du filtre initial afin que le filtre effectif soit tel que souhaité. Les deux paragraphes suivants illustrent cette démarche.

4. application à la pyramide de Chéhikian

4.1. principe de génération

Cette pyramide est exposée complètement dans [5]. Nous n'indiquerons ici que les principes de sa génération et les caractéristiques fréquentielles des différents niveaux de résolution.

Cette pyramide permet d'obtenir deux décompositions passe-bas isotropes et entrelacées en octave juste (décompositions $I1_k$ et $I2_k$, voir figure 6). Ainsi à l'intérieur d'une décomposition, vers les niveaux de basse résolution, les fréquences maximales associées à chaque niveau sont divisées exactement dans un rapport 2. A un même niveau de résolution, les fréquences maximales entre les deux décompositions, sont dans un rapport $\sqrt{2}$. Le tableau 2 donne la liste des fréquences maximales réduites et des variances produites à partir d'un niveau initial de fréquence maximale réduite $u_M = 0.5$. La figure 6 résume l'enchaînement des séquences de filtrage et de sous échantillonnage à réaliser.

	Niveau 0		Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3	
	$I1_0$	$I2_0$	$I1_1$	$I2_1$	$I1_2$	$I2_2$	$I1_3$	$I2_3$
freq _{max}	u_M	$\frac{u_M}{\sqrt{2}}$	$\frac{u_M}{2}$	$\frac{u_M}{2\sqrt{2}}$	$\frac{u_M}{4}$	$\frac{u_M}{4\sqrt{2}}$	$\frac{u_M}{8}$	$\frac{u_M}{8\sqrt{2}}$
σ^2	1	2	4	8	16	32	64	128

Tableau 2. – Fréquence réduite maximale et variance associées à chaque niveau de la pyramide de Chéhikian

Sur la figure 6 à un niveau donné, la sortie après le sous-échantillonnage est noté I'_{k+1} . Cette sortie, utilisée telle quelle, est moins intéressante que les deux autres, car elle présente un niveau de bruit supérieur, dû au repliement spectral après l'opération de sous-échantillonnage. En effet, les sorties I'_{k+1} ont les mêmes caractéristiques spectrales (fréquence maximale et variance) que les sorties $I2_k$, mais sur une taille inférieure.

L'algorithme original propose une implantation optimale en temps de calcul, par un filtrage binomial 3×3 approximant un filtrage gaussien G . Ce noyau de convolution approxime dans l'espace fréquentiel 2D la courbe de réponse d'un filtrage passe-bas gaussien de variance $\sigma_g^2 = 0.5$, avec une erreur quadratique

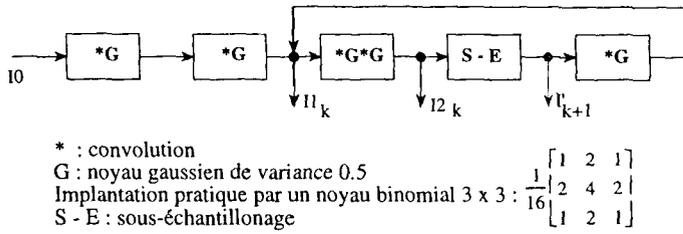


Figure 6. – Synoptique de la pyramide de Chéhikian.

moyenne de 2.29%. En réitérant la convolution, l'approximation au filtrage gaussien est meilleure avec un filtre de variance $\sigma_g^2 = 1$ (erreur quadratique moyenne de 0.65%).

4.2. choix du niveau

Pour implanter un filtre de Gabor à la fréquence F_0 , le niveau de la pyramide sera choisi par l'inéquation 9. Ainsi, par exemple, pour une série de filtres à $F_0 = 0.25, 0.125, 0.0625$ et 0.03125 , le niveau associé sera respectivement 0, 1, 2 et 3.

A un niveau donné k , il reste à choisir la sortie, entre celles possibles, à savoir $I1_k, I2_k$ ou I'_k . A la taille d'image N ($N/2^k \times N/2^k$), le filtre de fréquence centrale $0.25/2^k$, sera implanté à partir de la sortie ayant une fréquence maximale la plus éloignée de cette fréquence centrale. Pour $k \geq 1$, il s'agit la sortie I'_k de fréquence maximale $u_M \sqrt{2}/2^k$ (tableau 3). Le premier filtre ($k = 0$) peut s'implanter directement sur l'image originale.

	I'_k	$I1_k$	$I2_k$
Fréquence	$\frac{u_M \cdot \sqrt{2}}{2^k}$	$\frac{u_M}{2^k}$	$\frac{u_M}{2^k \cdot \sqrt{2}}$

Tableau 3. – Fréquence réduite maximale des trois sorties à un niveau k donné

Ainsi, les sorties I'_k sont ici exploitables comme entrée du filtre de Gabor. La caractéristique passe-bande du filtre de Gabor diminue l'effet du repliement spectral. Ce point particulier sera repris au paragraphe 5.2 pour l'analyse de la pyramide de Burt et au paragraphe 6 pour la comparaison entre les deux pyramides.

Le schéma complet d'implantation est décrit à la figure 7. Par souci de clarté, les équations des fréquences et des variances verticales (v_0 et σ_v^2) ne sont pas indiquées, de même que le terme d'atténuation qui se déduit de l'équation 11. La figure du haut propose une implantation à partir des sorties I'_k , celle du bas à partir des sorties $I1_k$.

A titre de comparaison, la figure 8 illustre les réponses fréquentielles des filtres de Gabor implantés à partir des sorties I'_k et $I1_k$. Il s'agit de la même série de filtres que précédemment à largeur de bande constante ($B_{0.5} = 1$). Le graphique du haut montre le spectre en fréquence des sorties $I1_k$ et $I2_k$ (ou I'_{k+1}). Les variances correspondantes sont indiquées sur les courbes. Le graphe du

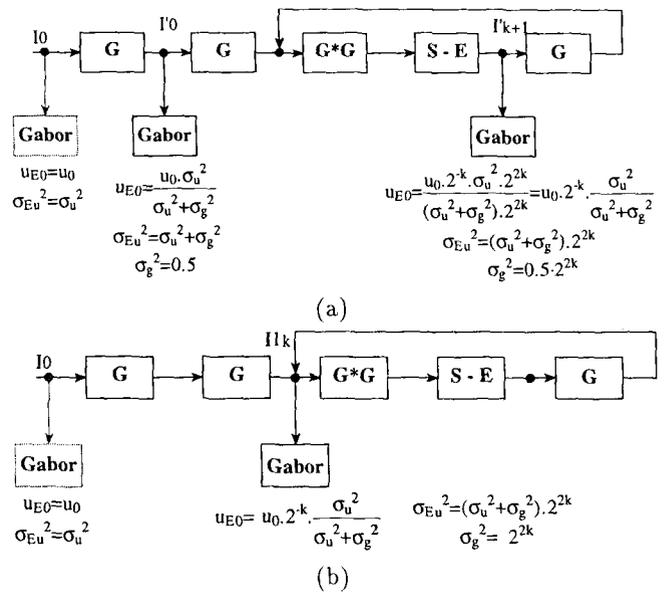


Figure 7. – Implantation des filtres de Gabor sur les niveaux I'_k (a) ou $I1_k$ (b) de la pyramide de Chéhikian.

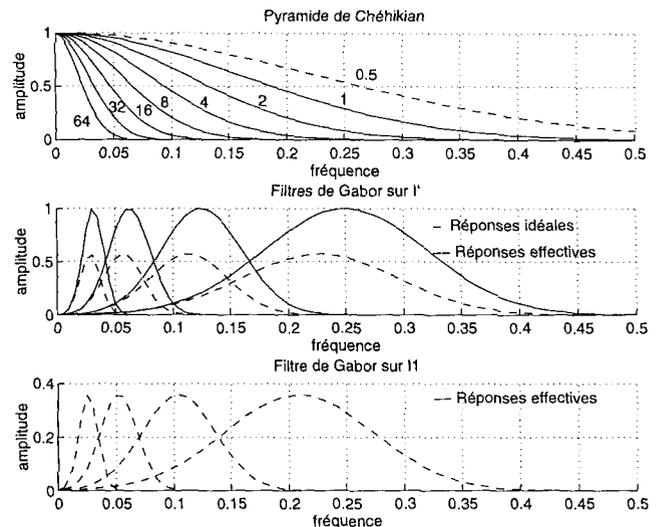


Figure 8. – Spectre d'amplitude à différentes résolutions (en haut). Réponses théoriques et effectives des filtres de Gabor (au milieu, filtre sur I'_k et en bas, filtre sur $I1_k$).

milieu représente dans l'espace fréquentiel 1D, les réponses des filtres de Gabor effectifs obtenus à partir des sorties I'_k (variance 0.5, 2, 8, 32). Le graphe du bas est similaire pour les filtres effectifs à partir des sorties $I1_k$ (variance 1, 4, 16, 64). Les filtres implantés à partir des sorties I'_k subissent l'atténuation en amplitude, le décalage en fréquence et l'augmentation de variance avec un effet moindre que ceux implantés à partir des sorties $I1_k$.

Les figures 12 et 13 en annexe illustrent la décomposition fréquentielle obtenue à partir d'une pyramide de Chéhikian sur 3 niveaux

Implantations de filtres de Gabor

de résolution. Sur chaque niveau, 4 filtres de Gabor sont implantés sur 4 orientation (0° , 45° , 90° et 135°). Les largeurs de bande sont $B_{0.5}$ à 1 octave et $\Omega_{0.5}$ à 45° . Sur cette décomposition, les images pour les différentes résolutions et orientations illustrent qualitativement les sorties obtenues.

4.3. implantation

Suite au paragraphe 3.2.2, le principe d'implantation retenu est de prendre en compte le décalage fréquentiel dès la génération du noyau de convolution spatial. Pour obtenir un filtre de bande orientée de paramètres u_{E0} , v_{E0} , σ_{Eu}^2 et σ_{Ev}^2 , il faut corriger ces valeurs suivant les équations 13 et 14 et implanter un filtre de paramètres u_{E0} , v_{E0} , σ_{Eu}^2 et σ_{Ev}^2 sur les sorties de la pyramide selon le principe expliqué au paragraphe 3.2.

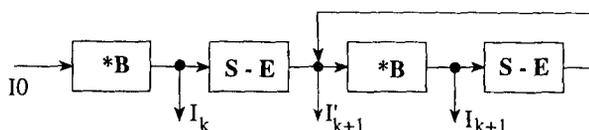
$$\sigma_u^2 = \sigma_{Eu}^2 - \sigma_g^2 \quad (13)$$

$$u_0 = \frac{u_{E0} \cdot \sigma_{Eu}^2}{\sigma_{Eu}^2 - \sigma_g^2} \quad (14)$$

5. application à la pyramide de Burt

5.1. principe de génération

Avec cette pyramide isotrope, la décomposition des images s'obtient par enchaînement d'une opération de filtrage de variance 1 et d'un sous-échantillonnage (figure 9). Le noyau proposé par Burt est un noyau 5×5 quasi équivalent au noyau binomial convolué 2 fois. Ce noyau de convolution approxime dans l'espace fréquentiel 2D, la courbe de réponse d'un filtre passe-bas gaussien de variance 1, avec une erreur moyenne de 0.16%. La suite des variances ne suit pas une progression en octave, ce qui ne garantit pas la même bande passante aux différents niveaux de résolution (voir paragraphe 6). Cette pyramide n'est donc pas exactement dyadique comme celle de Chéhikian.



* : convolution
 B : noyau gaussien de variance 1
 Implantation pratique par le noyau 5×5 proposé par BURT
 S - E : sous échantillonnage

Figure 9. - Synoptique de la pyramide de Burt.

	Niveau 0	Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3	
	I_0	I'_1	I_1	I'_2	I_2	I'_3	I_3
freqmax	u_M	u_M	$\frac{u_M}{\sqrt{5}}$	$\frac{u_M}{\sqrt{5}}$	$\frac{u_M}{\sqrt{21}}$	$\frac{u_M}{\sqrt{21}}$	$\frac{u_M}{\sqrt{85}}$
σ^2	1	1	5	5	21	21	85

Tableau 4. - Fréquence réduite maximale et variance associées à chaque niveau de la pyramide de Burt

Pour cette pyramide, le tableau 4 donne la liste des fréquences maximales réduites et des variances produites à partir d'un niveau original de fréquence maximale réduite $u_M = 0.5$.

A un même niveau de résolution, deux sorties sont disponibles, I_k et I'_{k+1} .

5.2. choix du niveau

Considérons la même série de filtres de Gabor à implanter sur les niveaux 0, 1, 2 et 3. Comme précédemment, le filtre de fréquence centrale $0.25/2^k$ pourra être implanté à partir du niveau I'_k . En effet, les altérations des caractéristiques spectrales seront plus faibles que pour une implantation à partir du niveau I_{k+1} . En contre partie, le bruit de repliement spectral sera plus important.

La figure 10 résume l'implantation de cette série de filtres. Le graphique du haut montre le spectre en fréquence des sorties I_k (ou I'_k). Les variances correspondantes sont indiquées sur les courbes. Le deuxième graphe présente l'implantation à partir des sorties I'_k (variance à 1, 5, 21). Le premier filtre à la fréquence 0.25 a été implanté directement à partir de l'image originale (une seule courbe à cette fréquence). Le troisième graphe présente le cumul des spectres de sortie des quatre filtres de Gabor ainsi implantés.

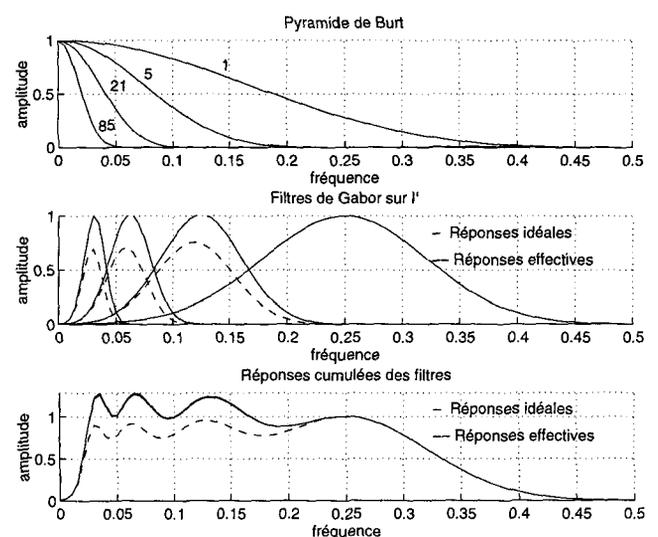


Figure 10. - Spectre d'amplitude à différentes résolutions (en haut). Réponses théoriques et effectives des filtres de Gabor (au milieu). Cumul des sorties filtrées (en bas).

6. comparaison des deux implantations

6.1. qualité du filtrage

Avec la pyramide de Burt, les filtres de Gabor sont appliqués à des images de fréquence de coupure plus grande à l'issue d'un filtrage passe-bas de variance σ_g^2 plus faible que celle du filtre utilisé dans la pyramide de Chéhikian. Ainsi les modifications spectrales consécutives à la génération par pyramide seront plus faibles avec la pyramide de Burt qu'avec la pyramide Chéhikian (voir figure 4 pour le décalage en fréquence). La contre-partie est un bruit de repliement spectral plus important pour la pyramide de Burt que pour la pyramide de Chéhikian.

Le tableau 5 résume le bruit de repliement évalué par le rapport signal sur bruit en dB et calculé à partir des réponses fréquentielles en 1D, pour les deux pyramides. Cette évaluation a été faite sur le premier niveau, avant et après l'application du filtre de Gabor. Pour les deux pyramides, les filtres sont appliqués sur les sorties I'_i . Pour la pyramide de Burt, le bruit du repliement passe de 45 dB à 55 dB avant et après le filtre. Avec celle de Chéhikian, il passe de 77 dB à 113 dB dans les mêmes conditions. Vers les basses résolutions, ce bruit va encore diminuer. Avec la pyramide de Chéhikian, ce bruit est négligeable dès le premier niveau.

Ainsi en résumé :

- le niveau de bruit de repliement spectral diminue avec la résolution,
- le filtre de Gabor passe-bande diminue le bruit de repliement, à un niveau donné.
- le bruit de repliement est plus important sur les sorties de la pyramide de Burt que sur les sorties de la pyramide Chéhikian.

	S/B Gabor	S/B Repliement
Niveau 1 Pyramide Chéhikian	113.38 dB	77.33 dB
Niveau 1 Pyramide Burt	55.36 dB	44.74 dB

Tableau 5. – Evolution comparée du rapport signal sur bruit correspondant au repliement spectral

6.2. homogénéité du filtrage

Les décompositions pyramidales permettent l'implantation des filtres de bande orientée au niveau de résolution correspondant à la fréquence centrale du filtre de bande. Les pyramides isotropes et les fonctions de Gabor 2D laissent le choix de l'orientation angulaire totalement libre. Celui-ci pourra être déterminé par l'application concrète (par exemple, à l'intérieur d'une bande

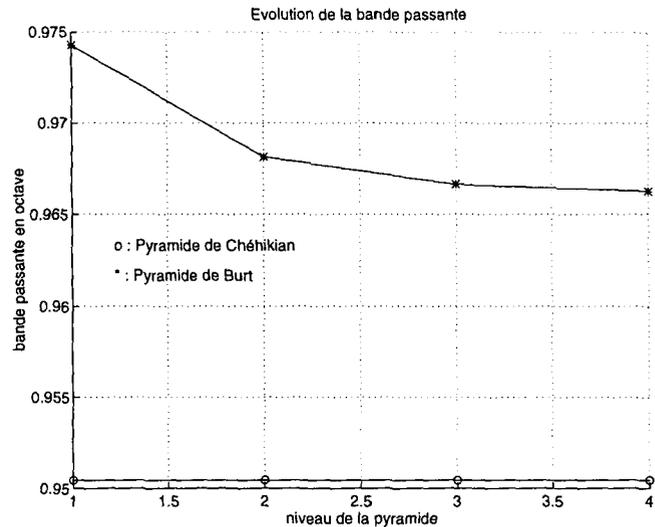


Figure 11. – Evolution de la bande passante radiale $B_{0.5}$ suivant le niveau de résolution. La bande passante initiale est de 1 octave.

de fréquence, localisation tous les 30 ou 45 degrés ou bien localisation irrégulière).

Si les largeurs de bande en octave des différents niveaux de la pyramide sont constantes, pour les pyramides envisagées ici, on obtient une suite de variances en progression géométrique. Un filtre de bande orientée, appliqué identiquement à tous les niveaux, formera une famille d'ondelettes régulières de même bande passante. En particulier, ceci est vérifié pour la pyramide de Chéhikian où les écarts-types des sorties (I_1 , I_2 et I') varient dans un rapport 2, comme les fréquences maximales.

Ce n'est pas le cas pour la pyramide de Burt, où la suite des écarts-types ne suit pas une progression géométrique. Ainsi pour cette pyramide, les fréquences centrales des filtres de bande orientée, appliquées aux différents niveaux ne possèdent pas les mêmes rapports de transformation que les écarts-types à ces niveaux. Il s'ensuit une disparité des bandes passantes effectives, c'est-à-dire une non-homogénéité du filtre orienté sur les différents niveaux. On observe ainsi une diminution de la bande passante avec le niveau de résolution. La figure 11 illustre cet effet, sur le paramètre de bande radiale à mi-niveau, exprimé en octave. On considère un filtre de Gabor avec une bande initiale de 1 octave. Avec la pyramide de Chéhikian, sans la correction de la variance, on obtient donc un filtre plus sélectif et de caractéristique spectrale constante avec la résolution. Comme cela avait déjà été indiqué pour le décalage en fréquence, avec la pyramide de Burt, on obtient un filtre moins affecté par la modification de la variance qu'avec la pyramide de Chéhikian. Par contre la largeur de bande effective diminue avec la résolution.

Dans le cas de pyramides non orthogonales entre niveaux (comme le sont les 2 pyramides prises en exemple), pour ajuster les filtres de Gabor sur les caractéristiques effectives, il faudra effectuer des corrections d'amplitude, de variance et de fréquence. Avec la pyramide de Chéhikian, ces corrections ne seront calculées

qu'une seule fois avant l'application sur les différents niveaux de la pyramide. Avec la pyramide de Burt, les corrections réalisées sur un niveau ne sont plus valables pour un autre, il faudra donc rectifier les filtres de bande orientée à chaque niveau de résolution.

7. conclusion

Dans les applications nécessitant une reconstruction d'image, il est essentiel d'utiliser des techniques de décomposition orthogonale. La décomposition obtenue par les ondelettes de Morlet n'est pas orthogonale (in [18] par exemple). Ainsi celle-ci est plus utilisée en analyse d'image où les aspects d'orthogonalité de la décomposition ne sont pas essentiels (détection de contours ou objets par analyse des orientations [1, 14], segmentation d'images de texture par caractéristiques fréquentielles [3, 12], estimation du mouvement [13, 20], ...). Dans ce cadre applicatif, l'association du filtre de bande orientée avec une décomposition pyramidale permet d'obtenir une implantation efficace gr. ce aux réductions de taille et de résolution vers les niveaux bas de la pyramide. Dans cet article, nous avons traité le cas des pyramides non-orthogonales en prenant deux exemples (les pyramides de Burt et de Chéhikian). Par ces décompositions, l'application d'un même filtre de Gabor à tous les niveaux de la pyramide, fournit une décomposition en ondelettes de Morlet. Cette décomposition sera à largeur de bande constante si les caractéristiques de bande spectrale des sorties de la pyramide sont elles-mêmes constantes. Ceci est exact pour la pyramide de Chéhikian, mais ne l'est pas pour la pyramide de Burt.

De plus, si le filtre de Gabor est appliqué sans aucune précaution sur les différents niveaux, cela conduira alors à une modification des paramètres des filtres du fait de l'interaction avec la réponse fréquentielle des différents niveaux de la pyramide. Ces modifications sont une atténuation en amplitude, une augmentation de la variance (le filtre est plus sélectif) et une diminution de la fréquence centrale (le filtre est décalé vers les basses fréquences). Ces modifications peuvent être prises en compte et donc corrigées dès la génération du noyau de convolution. Cette correction, effectuée au niveau de résolution le plus élevé, sera ensuite répercutée automatiquement sur les niveaux de résolution plus faibles. Ce principe d'implantation garantit les mêmes paramètres de filtrage quel que soit le niveau, à la même condition que précédemment sur l'homogénéité des caractéristiques spectrales des niveaux de la pyramide.

Si les décalages en fréquence sur les filtres de Gabor générés par la pyramide de Chéhikian ne sont pas pris en compte, il s'ensuivra pour les différents niveaux, un décalage constant des mesures issues des filtres de Gabor (par exemple attributs de texture, estimation de vitesse). Ce décalage étant constant, il pourra être annulé par une phase de re-calibrage. Par contre avec la pyramide Burt, on obtient un décalage variable suivant le niveau de la

pyramide. Il faudra donc prendre en compte la modification à chaque niveau de la pyramide.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. Antoine, P. Carrette, Murenzi R. and Piette B., «Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform». *Signal Processing*, 31 :241-272, 1993.
- [2] G.M. Bisio, Caviglia D.D., Indiveri G., Rafflo L. and S.P. Sabatini, «A Neural Network Architectural Model of Visual Cortical Cells for Texture Segregation». In *Int. Conf. on Neural Networks*, San Francisco, USA, March 1993.
- [3] A.C. Bovik, M. Clark and W.S. Geisler, «Multichannel Texture Analysis using Localized Spatial Filters», *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, 48(1) :55-73, 1990;
- [4] P.J. Burt, «Fast Filter Transform for Image Processing». *Computer Graphics Image Processing*, 16 :20-51, 1981.
- [5] A. Chéhikian, «Algorithmes optimaux pour la génération de pyramides d'images passe-bas et laplaciennes». *Traitement du Signal*, 9(4) :297-307, 1992.
- [6] J.L. Crowley and R.M. Stern, «Fast computation of difference of low-pass transform». *IEEE Trans Patt. Anal. Machine Intell.*, 6 :212-222, 1984.
- [7] I. Daubechies, «Orthogonal bases of compactly supported wavelets». *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 49 :909-996, 1988.
- [8] J.G. Daugman, «Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation by two-dimensional visual cortical filters». *J. Opt. Soc. Am.*, A/2 :1160-1169, 1985.
- [9] J.M.H. Du Buf, «Gabor Phase in Texture Discrimination». *Signal Processing*, 21 :221-240, 1990.
- [10] D. Gabor, «Theory of communication». *J. Inst. Elec. Eng.*, 93 :429-457, 1946.
- [11] J. Ghosh and A.C. Bovik, «Neural Networks for Textured Image Processing». In *Artificial Neural Networks and Statistical Pattern Recognition : Old and News Connections*, pages 133-154. Elsevier Science Publishers, 1991.
- [12] A. Guérin-Dugué and P.M. Palagi, «Texture Segmentation Using Pyramidal Gabor Functions and Self-Organisation Feature Maps». *Neural Processing Letters*, 1(1) :25-29, 1994.
- [13] D.J. Heeger, «Optical flow using spatiotemporal filters». *Int. Journal of Computer Vision*, 1 :279-302, 1988.
- [14] A.K. Jain and S.K. Bhattacharjee, «Address block location on envelopes using gabor filters». *Patterns Recognition*, 25(12) :1459-1477, 1992.
- [15] J. Malik and P. Perona, «Preattentive Texture Discrimination with Early Vision Mechanisms». *Journal of Optical Society of America*, 7(5) :923-932, 1990.
- [16] S.G. Mallat, «A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation». *IEEE Trans Patt. Anal. Machine Intell.*, 11(7) :674-693, 1989.
- [17] D. Marr and E. Hildreth, «Theory of edge detection». *Proc. R. Soc. Lond. B*, 207 :187-217, 1980.
- [18] Y. Meyer, *Les ondelettes : Algorithmes et Applications*, Armand Colin, 1992.
- [19] A. Navarro and A. Taberner, «Gaussian Wavelet Transform : Two Alternative Fast Implementations for Images». *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2 :421-436, 1990.
- [20] D. Pellerin, A. Spinéi and A. Guérin-Dugué, «Calcul de flot optique par filtrages de Gabor combinés». *Traitement du Signal*, 1996.
- [21] M.R. Turner, «Texture Discrimination by Gabor Functions». *Biological Cybernetics*, 55 :71-82, 1986.
- [22] M. Unser, A. Aldroubi and M. Eden, «The l_2 Polynomial Spline Pyramid». *IEEE Trans Patt. Anal. Machine Intell.*, 15(4) :364-379, 1993.

Manuscrit reçu le 13 février 1995.

LES AUTEURS

Anne GUÉRIN-DUGUÉ



Anne Guérin-Dugué est docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble et maître de conférences à l'ENSERG depuis 1987. Ses travaux de recherche au laboratoire de Traitement d'Images et de Reconnaissance des Formes concernent les réseaux neuro-mimétiques sous les aspects d'architectures parallèles, d'analyse de données, d'auto-organisation, de classification et de fusion de données, ainsi que l'analyse de textures.

Patricia M. PALAGI



Patricia M. Palagi a obtenu au Brésil, en 1983 une Maîtrise en Biologie, un "Masters of Computer Sciences" à l'Université de Brasilia en 1991, un D.E.A. de Sciences Cognitives de l'Institut National Polytechnique de Grenoble en 1992, une thèse de Docteur en Sciences Cognitives au laboratoire TIRF-INPG sur la modélisation de la perception visuelle de textures, financée par une bourse CAPES (Brésil). Ses principaux thèmes de recherche concernent la vision naturelle et artificielle et les réseaux de neurones artificiels appliqués au traitement d'images.

ANNEXE

Illustration de la décomposition orientée obtenue par la pyramide de Chéhikian

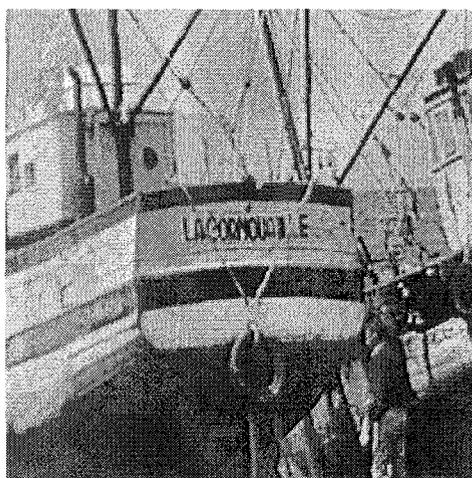


Figure 12. – Image test.

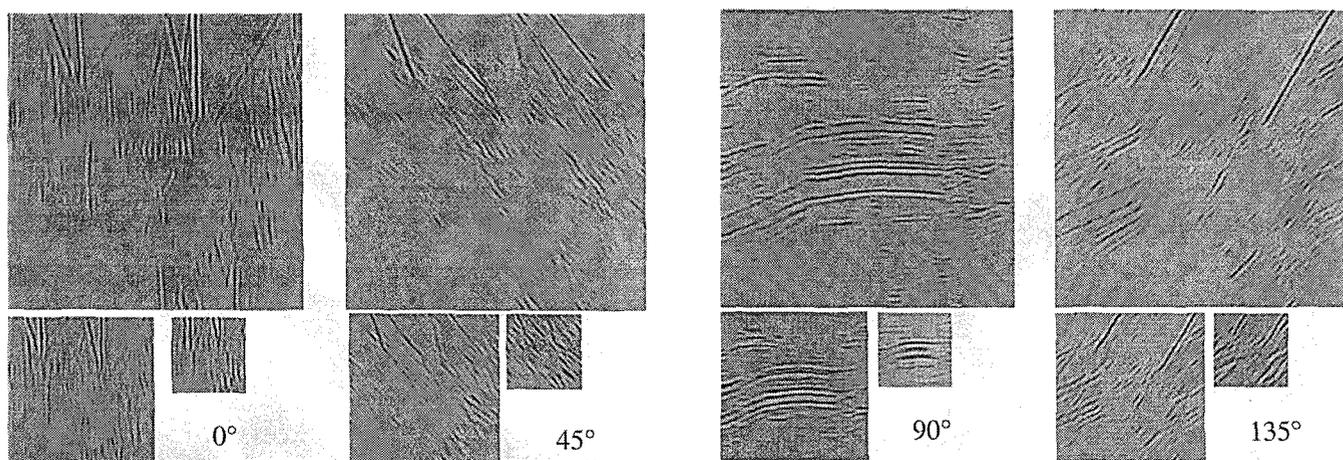


Figure 13. – Décomposition de l'image test par la pyramide de Chéhikian sur 3 niveaux. Quatre orientations sont extraites par 4 filtres de Gabor ($B_{0.5} = 1$, $\Omega_{0.5} = 45$).