

Tests de stabilité des filtres numériques récurrents bidimensionnels

Stability tests for bi-dimensional digital recursive filters

par Michel BARRET

Supélec, campus de Metz, 2, Rue É. Belin, 57070 Metz
(Michel.Barret@supélec.fr)

résumé et mots clés

Les filtres récurrents bidimensionnels (2-D) trouvent aujourd'hui quelques applications en traitement d'images, comme par exemple en codage par prédiction linéaire. Pour être utilisables, ces filtres doivent être stables. Ce papier porte sur la stabilité des filtres récurrents 2-D. Il commence par un rappel des notions élémentaires de filtrage 2-D et des conditions de stabilité. Puis, il est montré à partir de propriétés géométriques de l'ensemble des polynômes de Schur, comment ces conditions de stabilité peuvent être déclinées sous différentes formes équivalentes, qui sont ensuite classées suivant leur plus ou moins bonne adaptation à un algorithme de test de stabilité. Enfin un algorithme rapide et fiable est présenté. Il résiste bien aux erreurs d'arrondi quand il est implanté avec une arithmétique à virgule flottante.

Stabilité de systèmes multidimensionnels, zéros de polynômes à deux variables, filtres récurrents bi-dimensionnels.

abstract and key words

Today, bidimensional (2-D) digital recursive filters find some applications in image processing, in linear prediction coding for example. In order to be usefull, these filters must be stable. This paper deals with the stability of 2-D digital recursive filters. At first, elementary 2-D filtering notions and stability conditions are given. Various equivalent stability conditions are thus given, deduced from geometrical properties of the Schur polynomial set. Moreover, they are classified according to their good or bad adaptation to a stability test algorithm. Finally a fast and reliable algorithm, implemented with a floating point arithmetic, is given. It has a robust behavior when faced with rounding errors.

Stability of multidimensional systems, zeros of polynomials in two variables, digital recursive filters.

1. introduction

En traitement des images, les filtres récurrents non-séparables trouvent aujourd'hui quelques applications, comme par exemple dans les techniques de codage par prédiction linéaire. L'emploi de ces filtres est toutefois beaucoup moins répandu qu'en traitements de signaux mono-dimensionnels (1-D). Le faible emploi de ces filtres, dans le cas bidimensionnel (2-D), est dû aujourd'hui à l'absence de méthodes pour les synthétiser : les outils de synthèse dans le cas 1-D, basés en général sur la factorisation d'un polynôme complexe à une variable en produit de polynômes

de degrés un (théorème de d'Alembert), ne se généralisent pas au cas multidimensionnel du fait de la non validité du théorème de d'Alembert pour des polynômes à plusieurs variables.

Comme dans le cas 1-D, les filtres récurrents multidimensionnels peuvent être instables, c'est-à-dire qu'une légère perturbation sur l'entrée du filtre peut se traduire par une forte perturbation sur la sortie. Ce comportement est catastrophique dans les applications de codage ou de transmission de signaux, car des perturbations fortuites ou contrôlées y apparaissent très souvent. Avant d'utiliser un filtre récurrent 2-D, il faut donc tester s'il est stable ou non et il est important de disposer d'outils efficaces (*i.e.* rapides et fiables) pour faire ce test.

Ce papier porte sur l'étude de la stabilité de filtres numériques récurrents 2-D. Il se divise en trois parties. La première introduit les notions élémentaires du filtrage 2-D et les conditions de stabilité. La deuxième présente différentes conditions nécessaires et suffisantes assurant la stabilité. Ces conditions s'expriment sous forme d'inégalités qu'il est plus ou moins facile de vérifier en un nombre fini d'opérations arithmétiques avec un algorithme. Nous classons ces conditions en fonction de leur plus ou moins bonne adaptation de leur test par un algorithme. Notre démarche est basée sur des propriétés géométriques de l'ensemble des polynômes de Schur dans l'espace des polynômes complexes à une variable et de degré limité. La troisième partie présente un algorithme efficace (i.e. qui résiste bien aux erreurs d'arrondi) de test de stabilité pour un filtre causal (ou semi-causal) réel dont le polynôme à deux variables apparaissant au dénominateur de la fonction de transfert a un degré par rapport à l'une des variables inférieur ou égal à quatre, le degré par rapport à l'autre variable étant quelconque.

2. filtres numériques 2-D

Un signal numérique 2-D est une application $x : \mathbf{Z}^2 \rightarrow K$, où K est le corps des réels ou des complexes. En pratique un signal sert de support à de l'information. Par abus de notation, on note $x(n)$ le signal x . L'ensemble des signaux 2-D à valeurs dans K , noté $\mathcal{S}(K)$, est un espace vectoriel sur le corps K . On munit cet espace de la convergence simple des fonctions de \mathbf{Z}^2 dans K (une suite $(x_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de signaux 2-D converge simplement vers $x \in \mathcal{S}(K)$ quand, pour tout $n \in \mathbf{Z}^2$, la suite de scalaires $x_p(n)$ tend vers $x(n)$ quand p tend vers l'infini). Pour $k \in \mathbf{Z}^2$, le décalage de k désigne l'application linéaire T_k de $\mathcal{S}(K)$ dans lui-même, qui au signal $x(n)$ associe le signal $y(n) = x(n - k)$. Le signal δ qui vaut 1 en zéro et 0 ailleurs est le symbole de Kronecker encore appelé signal impulsionnel.

Pour traiter l'information portée par un signal, on dispose de systèmes. Un système transforme un signal d'entrée en un signal de sortie. Il peut ne pas associer de sortie à certains signaux. Précisément, c'est une application d'un sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}(K)$ dans $\mathcal{S}(K)$, l'ensemble de départ \mathcal{E} étant l'ensemble des entrées admissibles du système.

Une classe de systèmes particuliers a une grande importance en pratique, c'est celle des systèmes linéaires invariants par décalage et continus, appelés filtres. Formellement, un filtre est une application F d'un sous-espace vectoriel \mathcal{E} de $\mathcal{S}(K)$ dans $\mathcal{S}(K)$ qui vérifie :

- 1) \mathcal{E} est stable par tout décalage : $T_k(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} (\forall k \in \mathbf{Z}^2)$,
- 2) $\delta \in \mathcal{E}$,
- 3) F est linéaire,
- 4) F commute avec tout décalage T_k , i.e. $F \circ T_k = T_k \circ F (\forall k \in \mathbf{Z}^2)$,

5) si (x_p) est une suite de signaux dans \mathcal{E} qui converge vers $x \in \mathcal{E}$, alors la suite de signaux $F(x_p)$ converge et sa limite vaut $F(x)$.

De ces propriétés, il résulte qu'un filtre $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}(K)$ est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h = F(\delta)$, car pour $x \in \mathcal{E}$ on a

$$y = F(x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{Z}^2, y(n) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^2} h(k)x(n - k). \quad (1)$$

Le filtre est causal quand $\forall n \in \mathbf{Z}^2, h(n) \neq 0 \Rightarrow n \geq 0$, où pour $n = (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2, n \geq 0$ signifie $n_1 \geq 0$ et $n_2 \geq 0$. Le filtre est stable entrée bornée - sortie bornée (EBSB), ou plus brièvement stable, quand sa réponse impulsionnelle est sommable : $\sum_k |h(k)| < \infty$. On peut déduire de la définition d'un filtre que si tout signal borné est une entrée admissible, alors la réponse impulsionnelle est sommable; réciproquement, si la réponse impulsionnelle est sommable, alors tout signal borné est une entrée admissible et la sortie associée est bornée.

Pour le couple de variables $z = (z_1, z_2)$ et $n \in \mathbf{Z}^2$ on pose $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2}$. Pour un filtre de réponse impulsionnelle h , considérons la série de Laurent généralisée

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^2} h(k)z^k \quad (2)$$

où $z \in \mathbf{C}^2$. Si l'intérieur \mathcal{C} du sous-ensemble de \mathbf{C}^2 sur lequel la série converge absolument est non vide, alors la somme de la série, notée $H(z)$, est la transformée en z de h . Elle est appelée fonction de transfert du filtre. L'ouvert \mathcal{C} de \mathbf{C}^2 , dont on peut montrer que c'est la réunion d'hyper-couronnes ouvertes centrées à l'origine, est le domaine de convergence de $H(z)$. Remarquons que deux conventions existent pour définir la transformée en z , celle que nous avons adoptée et celle obtenue en remplaçant z par z^{-1} dans la relation (2). Comme dans le cas 1-D, la transformée en z transforme un produit de convolution en une simple multiplication et est sans perte d'information, c'est-à-dire inversible. Pour un filtre admettant une fonction de transfert, notons $\bar{\mathcal{C}}$ la fermeture de son domaine de convergence dans \mathbf{C}^2 . On peut montrer que

- le filtre est causal si et seulement si $0 \in \mathcal{C}$,
- si le filtre est stable alors $T_2 \subset \bar{\mathcal{C}}$, où $T_2 = \{z \in \mathbf{C}^2 : |z_1| = |z_2| = 1\}$ est le bi-cercle unité,
- si $T_2 \subset \mathcal{C}$ alors le filtre est stable.

Un filtre dont la fonction de transfert coïncide, sur son domaine de convergence, avec une fraction rationnelle en z est un filtre récurrent. L'intérêt principal de ces filtres pour les applications est que, comme dans le cas 1-D, la sortie est reliée à l'entrée par une équation aux différences et peut donc être calculée en un nombre fini d'opérations arithmétiques.

Soit $H(z) = Q(z)/P(z)$ une fraction rationnelle en z , avec les polynômes Q et P premiers entre eux. Les zéros de P sont les singularités non essentielles de H . Contrairement au cas 1-D, il peut arriver qu'une singularité non essentielle soit aussi un zéro de Q , c'est alors une singularité non essentielle de la deuxième espèce (NSSK, avec les initiales de la terminologie anglo-saxonne), sinon

elle est de la première espèce. Par exemple $z = (1, 1)$ pour $H(z) = (2 - z_1 - z_2)/(1 - z_1)$ est une NSSK.

Notons $U_2 = \{z \in \mathbf{C}^2 : |z_1| < 1 \text{ et } |z_2| < 1\}$ le bi-disque unité ouvert et $\bar{U}_2 = \{z \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leq 1 \text{ et } |z_2| \leq 1\}$ sa fermeture. Voici le théorème fondamental de stabilité pour un filtre récurrent causal quelconque F , dont la fonction de transfert est mise sous la forme d'une fraction rationnelle irréductible $H(z) = Q(z)/P(z)$ (ce qui entraîne $P(0) \neq 0$).

Théorème 1. – Rudin, Shanks

Si H n'a pas de singularité non essentielle dans \bar{U}_2 , alors F est stable. Inversement, si H est dépourvu de singularité non essentielle de la deuxième espèce sur T_2 , alors il faut que P ne s'annule pas dans \bar{U}_2 pour que le filtre soit stable.

Dans la suite nous ne considérerons que des filtres récurrents causaux dépourvus de toute singularité de la deuxième espèce sur le bi-cercle T_2 .

3. critères de stabilité 2-D

La condition nécessaire et suffisante de stabilité énoncée au théorème 1 est difficile à tester sous sa forme et depuis plus de vingt ans de nombreux autres critères équivalents ont été introduits dans la littérature. Dans cette section, nous allons présenter quelques-uns de ces critères (*i.e.* des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité). Commençons par donner quelques propriétés géométriques de l'ensemble des polynômes de Schur (*i.e.* ne s'annulant pas sur le disque unité fermé $\bar{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$). Considérons un polynôme général (*i.e.* dont les coefficients sont des indéterminées) complexe à une variable

$$P = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (3)$$

et dont le degré n'excède pas n . Dans la suite, le coefficient a_0 pourra s'annuler. Notons P^* le polynôme déduit de P par la relation

$$P^* = \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 \quad (4)$$

où \bar{a}_k désigne le conjugué du nombre complexe a_k . Si P est de degré n , alors P^* est le polynôme réciproque de P .

Nous identifierons le polynôme P ci-dessus avec le point (a_0, a_1, \dots, a_n) de \mathbf{C}^{n+1} . Introduisons, pour $p = 0, 1, \dots, n$, le sous-ensemble \mathcal{D}_p de \mathbf{C}^{n+1} constitué des polynômes P ayant exactement p racines dans le disque unité fermé \bar{U} , comptées suivant leur ordre de multiplicité. Les sous-ensembles $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$ forment une partition de $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le sous-ensemble \mathcal{D}_0 coïncide avec l'ensemble des polynômes de Schur dont le degré n'excède pas n , c'est un sous-ensemble ouvert de \mathbf{C}^{n+1} . Les sous-ensembles \mathcal{D}_p sont connexes [3].

Décomposons les coefficients a_k du polynôme P en leurs parties réelle et imaginaire :

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

et identifions l'espace \mathbf{C}^{n+1} des coefficients (a_0, \dots, a_n) avec l'espace réel euclidien \mathbf{R}^{2n+2} de leurs parties réelles et imaginaires $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n)$. Pour un polynôme réel \mathbf{F} non constant aux $2n + 2$ variables $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$, nous appellerons l'ensemble de tous ses zéros réels hypersurface d'équation $\mathbf{F}(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n) = 0$. C'est un sous-ensemble de \mathbf{R}^{2n+2} . Pour faciliter la compréhension des résultats qui suivent, nous convenons de réserver l'emploi de lettres majuscules en caractères gras pour désigner des polynômes réels ayant pour variables $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$, afin de les distinguer des polynômes complexes à une variable comme P ou P^* .

Pour $p = 0, 1, \dots, n$, $\partial\mathcal{D}_p$ désignera la frontière du sous-ensemble \mathcal{D}_p (*i.e.* la différence ensembliste entre sa fermeture et son intérieur). Avec les identifications mentionnées ci-dessus entre les espaces $\mathbf{C}_n[x]$ (ensemble des polynômes P), \mathbf{C}^{n+1} et l'espace euclidien \mathbf{R}^{2n+2} , nous allons donner l'équation de la plus petite hypersurface contenant la frontière $\partial\mathcal{D}_0$ de l'ensemble des polynômes de Schur.

Théorème 2. – [3]

- (i) L'union \mathcal{B}_1 des frontières $\partial\mathcal{D}_p$, pour $p = 0, 1, \dots, n$ est égale à l'ensemble des polynômes P qui s'annulent sur le cercle unité.
- (ii) L'union \mathcal{B}_1 est incluse dans l'hypersurface \mathcal{B}_2 d'équation

$$\mathbf{R}(P, P^*) = 0 \quad (6)$$

où $\mathbf{R}(P, P^*)$ est le résultant des polynômes P et P^* .

- (iii) L'intersection $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{D}_0$ est vide.
- (iv) L'équation (6) est irréductible dans le cas général où les coefficients de P sont des indéterminées.

Quand le polynôme P est réel, le résultant de P et P^* n'est plus irréductible et l'assertion (iv) du théorème 2 n'est plus valide. Le résultant de deux polynômes non nuls à une variable est un polynôme, dont les variables sont les coefficients des deux polynômes, qui s'annule si et seulement si les deux polynômes ont un facteur non constant en commun [2]. Par exemple, quand $n = 2$, $\mathbf{R}(P, P^*) = |a_0|^4 - |a_0|^2|a_1|^2 + a_0a_2\bar{a}_1^2 + \bar{a}_0\bar{a}_2a_1^2 - 2|a_0|^2|a_2|^2 - |a_1|^2|a_2|^2 + |a_2|^4$. Cette expression, visiblement réelle, se développe en un polynôme à coefficients entiers des variables $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$ dont l'écriture demanderait plusieurs lignes.

Il résulte du théorème 2 que \mathcal{B}_2 est la plus petite hypersurface contenant la frontière de \mathcal{D}_0 . Autrement dit, si \mathcal{B} est une hypersurface d'équation $\mathbf{S}(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n) = 0$ (ce qui suppose que \mathbf{S} est un polynôme réel dont les variables sont $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$) telle que $\partial\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{B}$, alors $\mathbf{R}(P, P^*)$ divise le polynôme \mathbf{S} .

Pour illustrer ce théorème, nous allons donner quelques sections planes des domaines \mathcal{D}_p pour $n = 3$. Considérons le polynôme

$$P = z^3 + (\alpha_2 + i\beta_2)z + \alpha_3, \quad (7)$$

qui est la forme réduite que peut prendre tout polynôme complexe unitaire de degré 3 au moyen d'une similitude $\gamma z + \delta$, ($\gamma, \delta \in \mathbf{C}$), appliquée à sa variable. Le résultant $\mathbf{R}(P, P^*)$ vaut alors

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, \alpha_3) = & 1 - 2\alpha_2^2 + \alpha_2^4 - 3\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_3^3\alpha_2^2 \\ & + 3\alpha_3^4 + \alpha_2^2\alpha_3^4 - \alpha_3^6 - 2\beta_2^2 + 2\alpha_2^2\beta_2^2 \\ & + \alpha_3^2\beta_2^2 - 6\alpha_2\alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_3^4\beta_2^2 + \beta_2^4. \end{aligned} \quad (8)$$

La surface de \mathbf{R}^3 d'équation

$$\mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, \alpha_3) = 0 \quad (9)$$

admet plusieurs symétries : une par rapport au plan $\alpha_3 = 0$, une par rapport au plan $\beta_2 = 0$ et une symétrie de rotation d'axe $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ et d'angle $2\pi/3$.

Elles résultent du fait que si P admet un zéro en commun avec son polynôme réciproque, il en est de même pour les polynômes

$$-P(-z) = z^3 + (\alpha_2 + i\beta_2)z - \alpha_3 \quad (10)$$

$$\bar{P}(x) = z^3 + (\alpha_2 - i\beta_2)z + \alpha_3 \quad (11)$$

$$P(e^{2\pi/3}z) = z^3 + e^{2\pi/3}(\alpha_2 + i\beta_2)z + \alpha_3. \quad (12)$$

Remarquons en effet que

$$\mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, \alpha_3) = \mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, -\alpha_3) \quad (13)$$

$$\mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, \alpha_3) = \mathbf{R}(\alpha_2, -\beta_2, \alpha_3) \quad (14)$$

$$\mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, \alpha_3) = \mathbf{R}\left(\frac{-\alpha_2 - \sqrt{3}\beta_2}{2}, \frac{\sqrt{3}\alpha_2 - \beta_2}{2}, \alpha_3\right). \quad (15)$$

La figure 1 donne quelques sections planes parallèles aux axes de l'hypersurface d'équation (9).

Si $\alpha_3 = 0$, $\mathbf{R}(\alpha_2, \beta_2, 0) = (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2)^2$. Le polynôme \mathbf{R} se factorise et s'annule sur le cercle unité d'équation $\alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$. L'intérieur de ce cercle est une coupe de \mathcal{D}_3 et l'extérieur, une coupe de \mathcal{D}_1 . Quand $\alpha_3 \rightarrow \pm\infty$, la section tend vers un cercle centré à l'origine et de rayon $|\alpha_3|$.

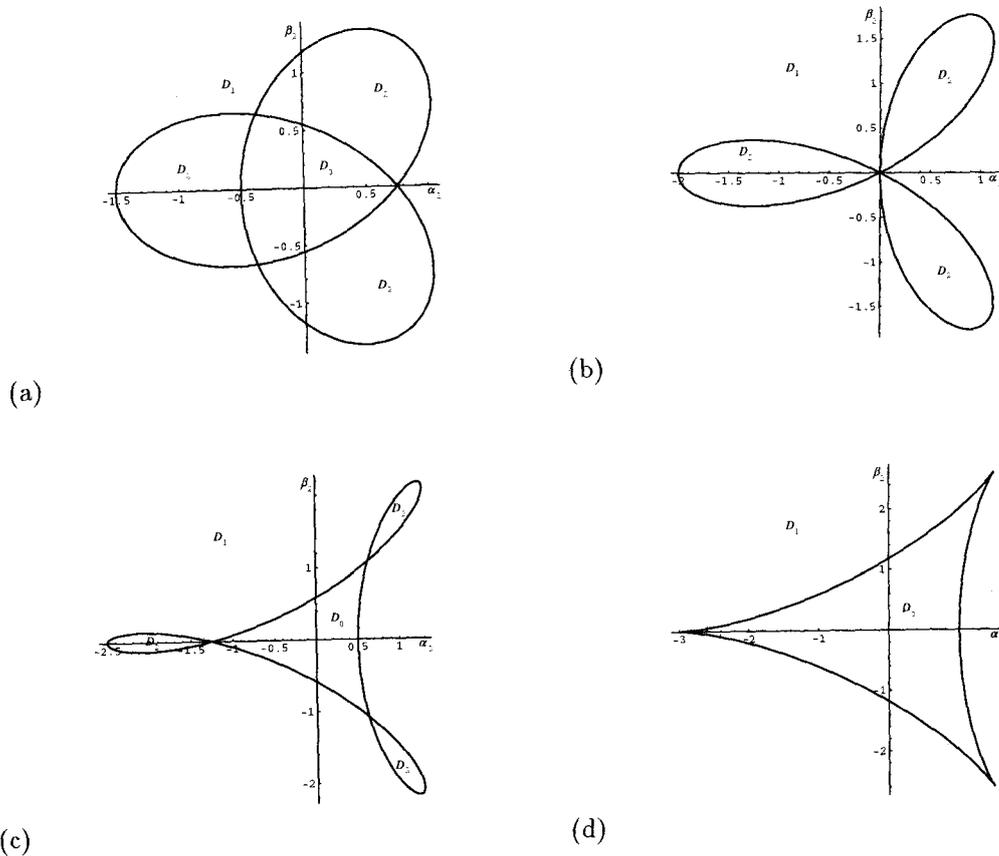


Figure 1. - Sections parallèles au plan $\alpha_3 = 0$ des domaines \mathcal{D}_k pour $n = 3$, (a) $\alpha_3 = \pm 0,5$, (b) $\alpha_3 = \pm 1$, (c) $\alpha_3 = \pm 1,5$, (d) $\alpha_3 = \pm 2$.

Supposons maintenant que chaque coefficient a_k de P soit une fonction continue de variables réelles $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r) \in I$, où $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_r$ est le produit cartésien d'intervalles réels non vides. Notons $(P_v)_{v \in I}$ la famille de tous les polynômes obtenus avec ces fonctions continues quand $v \in I$. Nous dirons d'une telle famille de polynômes qu'elle est *continue*. Puisque I est un sous-ensemble connexe de \mathbf{R}^r , la famille continue de polynômes $(P_v)_{v \in I}$ forme un sous-ensemble connexe de \mathbf{C}^{n+1} . Le théorème suivant résulte directement du théorème 2.

Théorème 3. – [3]

Soit $(P_v)_{v \in I}$ une famille continue de polynômes complexes de degré n'excédant pas n . Soit, pour $v \in I$, P_v^* le polynôme défini par la relation (4) quand P_v est écrit sous la forme (3).

(i) Tout polynôme P_v de la famille est dans \mathcal{D}_0 si et seulement s'il existe $v_0 \in I$ tel que $P_{v_0} \in \mathcal{D}_0$ et si le résultant $\mathbf{R}(P_v, P_v^*)$ de P_v et P_v^* ne s'annule pas pour tout $v \in I$.

(ii) S'il existe $v_0 \in I$ tel que $P_{v_0} \in \mathcal{D}_0$ et si le résultant $\mathbf{R}(P_v, P_v^*)$ de P_v et P_v^* s'annule pour $v \in I$, alors il existe $v_1 \in I$ tel que le polynôme P_{v_1} s'annule sur le cercle unité.

Nous allons interpréter l'assertion (i) du théorème 3 en termes d'algorithmes. Fixons à la fois $r \geq 1$, le pavé $I \subset \mathbf{R}^r$ d'intérieur non vide, $v_0 \in I$ et $n > 0$ un entier naturel. Nous considérons trois algorithmes \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} , se terminant chacun en un nombre fini d'opérations arithmétiques (nous excluons donc tout algorithme reposant sur un échantillonnage du pavé I) et ayant pour entrée une famille continues $(P_v)_{v \in I}$ quelconque de polynômes complexes dont le degré n'excède pas n . Ces trois algorithmes décident (*i.e.* répondent par oui ou bien par non) aux questions respectives suivantes.

\mathcal{A} : est-ce-que tous les éléments de la famille $(P_v)_{v \in I}$ sont dans \mathcal{D}_0 ?

\mathcal{B} : est-ce-que P_{v_0} appartient à \mathcal{D}_0 ?

\mathcal{C} : est-ce-que le résultant $\mathbf{R}(P_v, P_v^*)$ s'annule pour $v \in I$?

Pour ces algorithmes, leur *complexité* est, par définition, égale au nombre d'opérations en arithmétique flottante qu'ils effectuent pour traiter une donnée arbitraire. C'est une fonction de n . Par abus de langage, nous appelons encore *complexité* l'ordre de grandeur de cette fonction quand n tend vers l'infini.

Il existe des algorithmes \mathcal{B} déduits de la règle de Cohn ou de ses dérivées, [6], [9], ou encore du critère de Routh [8] par transformation homographique et il est clair que tout algorithme \mathcal{A} ne peut pas avoir une complexité inférieure à celle de \mathcal{B} . Il résulte du théorème 3, que disposant d'un algorithme \mathcal{B} , tout algorithme \mathcal{A} devient un algorithme \mathcal{C} et inversement, deux algorithmes \mathcal{B} et \mathcal{C} quelconques forment ensemble un algorithme \mathcal{A} . Autrement dit, $(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{B})$. Les algorithmes \mathcal{A} et \mathcal{C} les plus performants ont donc la même complexité et à l'algorithme \mathcal{B} près, de complexité négligeable, les algorithmes \mathcal{A} et \mathcal{C} sont équivalents.

Intéressons-nous à l'algorithme \mathcal{C} . D'après l'assertion (iv) du théorème 2, les coefficients des polynômes P_v pouvant *a priori*

prendre n'importe quelle valeur complexe quand $v \in I$, le résultant $\mathbf{R}(P_v, P_v^*)$ ne peut pas être factorisé *a priori*.

L'application des résultats précédents au problème de la stabilité des filtres numériques récurrents 2-D causaux et dépourvus de toute singularité non essentielle de la deuxième espèce, permet de retrouver les critères de Huang, Goodman, Shanks, Strintzis, De Carlo, Anderson, Jury . . . , [1].

Soit $P(z_1, z_2)$ un polynôme général complexe à deux variables :

$$\begin{aligned} P(z_1, z_2) &= \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^m a_{h,k} z_1^{n-h} z_2^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m a_k(z_1) z_2^{m-k} \quad (m \leq n). \end{aligned} \quad (16)$$

Il résulte du théorème 3 (i), avec $r = 2$, $I = [0, 1] \times [0, 1]$, $v = (\rho, \theta) \in I$ et $P_v(z_2) = P(\rho e^{2i\pi\theta}, z_2)$, que $P(z_1, z_2) \neq 0$ sur le bi-disque unité fermé \bar{U}_2 si et seulement si $P(0, z_2) \in \mathcal{D}_0$ et si le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ obtenu par élimination de z_2 entre les deux équations :

$$P(z_1, z_2) = 0 \text{ et } P^*(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^m \overline{a_k(z_1)} z_2^k = 0 \quad (17)$$

ne s'annule pas sur le disque unité fermé \bar{U} . Il découle également du théorème 3 (ii) (avec $P_v(z_1) = P(z_1, \rho e^{2i\pi\theta})$ et les mêmes r , v et I que ci-dessus) que $P(z_1, z_2) \neq 0$ sur \bar{U}_2 si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites (Huang-Goodman) :

$$\forall z_1 \in \bar{U}, \quad P(z_1, 0) \neq 0 \quad (18)$$

$$\forall (z_1, z_2) \text{ tels que } |z_1| = 1 \text{ et } |z_2| \leq 1, \quad P(z_1, z_2) \neq 0. \quad (19)$$

De la même façon, avec $r = 1$, $I = [0, 1]$ et $P_v(z_2) = P(e^{2i\pi v}, z_2)$, la condition (19) est satisfaite si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées (Strintzis) :

$$\forall z_2 \in \bar{U}, \quad P(1, z_2) \neq 0 \quad (20)$$

$$\forall (z_1, z_2) \in T_2, \quad P(z_1, z_2) \neq 0. \quad (21)$$

Dans les relations (18) et (20), les chiffres 0 de « $P(z_1, 0)$ » et 1 de « $P(1, z_2)$ » peuvent être remplacés respectivement par tout autre point du disque unité fermé et du cercle unité.

Il est facile d'étendre ces justifications aux filtres multidimensionnels de toute dimension, pour retrouver le théorème de Strintzis, De Carlo *et al.* [4] et Basu-Fettweis ([5] théorème 2). Le théorème suivant résulte du théorème 3 (i).

Théorème 4

La condition (19) est vérifiée si et seulement si la condition (20) est satisfaite et si le résultant $\mathbf{R}(z_1)$, obtenu en éliminant z_2 entre les deux équations (17), ne s'annule pas sur le cercle unité.

Nous en déduisons un critère de stabilité.

Théorème 5. – (critère de stabilité 2-D)

Soient un polynôme complexe $P(z_1, z_2)$ défini par la relation (16) et $\mathbf{R}(z_1)$ le résultant obtenu en éliminant z_2 entre les deux équations (17). Le polynôme $P(z_1, z_2)$ ne s'annule pas sur le bi-disque unité fermé $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$ si et seulement si les trois conditions (18), (20) et

$$\mathbf{R}(z_1) \neq 0 \text{ pour tout } z_1 \text{ tel que } |z_1| = 1. \tag{22}$$

sont satisfaites.

Sur le cercle unité, $\bar{z}_1 = z_1^{-1}$, le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ peut alors être remplacé par celui obtenu en éliminant z_2 entre les deux polynômes en z_1 et z_2 : $P(z_1, z_2)$ et

$$\tilde{P}(z_1, z_2) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^m \bar{a}_{h,k} z_1^h z_2^k. \tag{23}$$

Le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ est égal, au signe près, au déterminant d'une représentation matricielle de la forme quadratique hermitienne de Schur-Cohn apparaissant dans les tests [1] de Jury, Anderson, et Siljak. Il est donc réel, quelle que soit la valeur complexe prise par la variable z_1 . Nous verrons plus bas que si le polynôme $P(z_1, z_2)$ est réel, alors pour z_1 sur le cercle unité, le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ est un polynôme réel de la partie réelle de z_1 . Le carré de ce polynôme divise le résultant apparaissant dans le test de Bose. Dans sa version simplifiée [10] le test de Bose ne calcule plus que le résultant $\mathbf{R}(z_1)$. Dans le test de Maria et Fahmy[4], qui construit la table de Marden-Jury associée au polynôme (16) en z_2 dont les coefficients dépendent de z_1 , l'unique élément de la dernière ligne de cette table est divisible par $\mathbf{R}(z_1)$.

Par construction du résultant $\mathbf{R}(z_1)$ et parce qu'il est réel pour tout z_1 , il existe un polynôme complexe F aux deux variables z_1 et \bar{z}_1 et un polynôme réel R aux deux variables x et y tels que, pour tout nombre complexe $z_1 = x + iy$ décomposé suivant ses parties réelle ou imaginaire,

$$\mathbf{R}(z_1) = F(z_1, \bar{z}_1) = R(x, y). \tag{24}$$

La division euclidienne du polynôme $R(x, y)$ par le polynôme $y^2 + x^2 - 1$ assure l'existence et l'unicité du polynôme réel S aux deux variables x, y et celles des deux polynômes réels Q et T en x , tels que :

$$R(x, y) = (y^2 + x^2 - 1)S(x, y) + yT(x) + Q(x). \tag{25}$$

Les polynômes R, S, Q et T dépendent évidemment des coefficients du polynôme P . Quand ce dernier est réel, on a $\overline{F(z_1, \bar{z}_1)} = F(\bar{z}_1, z_1)$, donc $R(x, y) = R(x, -y)$ et T est identiquement nul.

Nous voyons sur l'équation (25), qu'il est plus simple de calculer le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ quand z_1 est sur le cercle unité que quand z_1 est dans le disque unité fermé. En effet, quand $|z_1| = 1$, il suffit de connaître les polynômes réels T et Q à une seule variable, pour évaluer $\mathbf{R}(z_1)$.

Nous avons vu après le théorème 3 que tout algorithme, qui décide en un nombre fini d'opérations arithmétiques si le polynôme $P(z_1, z_2)$ s'annule sur le bi-disque unité fermé, revient, à un simple test de stabilité 1-D près, à décider si le résultant $\mathbf{R}(z_1)$ s'annule sur un domaine du plan. Tous les critères de stabilité que nous venons d'examiner reviennent à tester si le résultant $\mathbf{R}(z_1) = R(x, y)$ s'annule sur un sous-ensemble Δ du plan, qui vaut soit le disque unité $y^2 + x^2 \leq 1$, soit le cercle unité.

Définissons le degré de complexité de ces critères comme étant égal au nombre de coefficients du polynôme R qu'il faut connaître pour calculer $R(x, y)$ sur Δ . Avec cette définition, nous ne prenons pas en compte la complexité algorithmique du test de nullité de R , car elle dépend de l'algorithme utilisé et rien ne dit qu'il n'en existe pas de bien meilleurs que ceux connus aujourd'hui. Toutefois, nous admettons que pour tester en un nombre fini d'opérations arithmétiques la nullité de $R(x, y)$ sur Δ , il faut connaître ses coefficients.

Si P est de degré n en z_1 et m en z_2 , alors R est de degré $2nm$ en x et en y . Comparons les degrés de complexité des différents critères de stabilité.

– Tester si $P(z_1, z_2)$ s'annule sur le bi-disque \bar{U}_2 revient à examiner si $\mathbf{R}(z_1)$ s'annule sur le disque $|z_1| \leq 1$. Cela demande le calcul du polynôme réel $R(x, y)$ et le test de sa nullité sur le disque $x^2 + y^2 \leq 1$. Un tel test a un degré de complexité de $(2nm + 1)^2$.

– Tester si $P(z_1, z_2)$ s'annule pour $|z_1| = 1$ et $|z_2| \leq 1$ revient à vérifier si $\mathbf{R}(z_1)$ s'annule sur le cercle unité. Cela demande le calcul des polynômes réels Q et T qui n'ont qu'une variable et le test de nullité de $yT(x) + Q(x)$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$, test que l'on sait faire en un nombre fini d'opérations arithmétiques. Pour cela, on peut éliminer y entre les équations $yT(x) + Q(x) = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$, pour obtenir l'équation algébrique en x :

$$(1 - x^2)(T(x))^2 - (Q(x))^2 = 0, \tag{26}$$

dont on sait calculer le nombre de racines réelles sur le segment $[-1, 1]$ grâce au théorème de Sturm. Ce critère a un degré de complexité de $2(nm + 1)$ quand P est complexe (coefficients de T et Q) ou de $nm + 1$ quand P est réel.

– Tester si $P(z_1, z_2)$ s'annule sur le bi-cercle T_2 revient à examiner si, quand z_1 parcourt continûment le cercle unité, le polynôme en $z_2, P(z_1, z_2)$, s'annule sur le cercle unité. C'est-à-dire s'il est sur la frontière de l'un des domaines \mathcal{D}_p pour $0 \leq p \leq n$ ou autrement dit dans \mathcal{B}_1 . Pour vérifier cette condition, il faut tester si $\mathbf{R}(z_1)$ s'annule sur le cercle unité, puis dans le cas où il s'y annulerait, il faut s'assurer que ce n'est pas en des points de $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$. Vu sous cet angle, il apparaît que le critère de Strintzis n'est pas plus facile à tester que celui de Huang-Goodman.

Nous venons de voir que le test de nullité du résultant $\mathbf{R}(z_1) = R(x, y)$ sur le disque unité $x^2 + y^2 \leq 1$ peut se simplifier en se ramenant au test de nullité de R modulo $y^2 + x^2 - 1$:

$$R(x, y) \equiv yT(x) + Q(x) \pmod{y^2 + x^2 - 1} \tag{27}$$

sur le cercle unité. On peut se poser la question de savoir si l'on peut encore réduire le domaine du plan sur lequel on teste la nullité du résultant $R(x, y)$. Remarquons d'abord que si ce domaine contient un arc du cercle unité, il n'y a, au bout du compte, aucune simplification, car le calcul des polynômes T et Q reste requis. Pour que la simplification soit effective, il faut réduire le domaine d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ à un nombre fini de points $M_1 = (x_1, y_1), \dots, M_p = (x_p, y_p)$. Le choix de p et des points M_1, \dots, M_p doit se faire en un nombre fini de pas, à partir de la donnée des coefficients de $P(z_1, z_2)$ et au moyen d'opérations arithmétiques auxquelles on peut ajouter l'extraction de racines. Nous avons montré qu'une telle simplification est impossible (elle contredirait le théorème d'Abel). On en déduit que tester si $R(x, y)$ s'annule sur le cercle unité à un degré de complexité minimal, aucun critère de stabilité vérifiable en un nombre fini de pas ne peut avoir un degré de complexité moindre. Le critère du théorème 5, comme celui de Huang-Goodman, atteint cet optimum.

4. algorithmes de test de stabilité

Il existe dans la littérature de nombreux algorithmes pour tester la stabilité de filtres récurrents 2-D, beaucoup d'entre eux reposent sur des critères optima (*i.e.* de degré de complexité minimal). Quand ils sont implantés sur un processeur avec une arithmétique à virgule flottante en triple précision (*i.e.* 10 octets par flottant), la complexité en nombre d'opérations de ces algorithmes a peu d'importance dans les applications, car en général les degrés n et m (avec $m \leq n$) du polynôme $P(z_1, z_2)$, défini à la relation (16) et apparaissant au dénominateur de la fonction de transfert sont petits (quelques unités). En revanche, leur comportement face aux erreurs d'arrondi est pour beaucoup d'entre eux peu satisfaisant [4] : ils ne sont pas fiables, et ceci même pour de faibles degrés n et m .

Nous terminons cette section en présentant un algorithme efficace (rapide et fiable) que nous avons implanté en langage C avec une arithmétique à virgule flottante en double ou triple précision. Il est disponible gratuitement à l'adresse :

<ftp://ftp.esse-metz.fr/pub/Supelec/software/auto/stability.tar.Z>

Il s'applique à des filtres récurrents causaux ou semi-causaux dépourvus de toute NSSK sur T_2 et dont le dénominateur $P(z_1, z_2)$ de la fonction de transfert est un polynôme réel avec m , le plus petit des degrés, inférieur ou égal à 4 (n étant quelconque). L'algorithme calcule le résultant $\mathbf{R}_2(z_1)$, polynôme réel en z_1 , obtenu en éliminant z_2 entre les deux polynômes $P(z_1, z_2)$ et $\tilde{P}(z_1, z_2)$ défini à la relation (23). En posant $a_k^{(-)}(z_1) =$

$z_1^n a_k(z_1^{-1})$ pour $k = 0, 1, \dots, m$, le polynôme $\tilde{P}(z_1, z_2)$ s'écrit

$$\tilde{P}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^m a_k^{(-)}(z_1) z_2^k. \quad (28)$$

Le résultant $\mathbf{R}_2(z_1)$ est égal au déterminant de la matrice $M(z_1)$ d'ordre m , dont l'élément situé à l'intersection de la ligne k et de la colonne l ($1 \leq k, l \leq m$) sera noté $c_{k,l}$. La matrice $M(z_1)$ satisfait à l'identité [7]

$$M(z_1) = F(z_1)G(z_1), \quad (29)$$

où $F(z_1)$ est la matrice $m \times 2m$ et $G(z_1)$ la matrice $2m \times m$:

$$F(z_1) = \begin{bmatrix} a_{m-1} & -a_1^{(-)} & a_{m-2} & -a_2^{(-)} & \cdots \\ a_{m-2} & -a_2^{(-)} & a_{m-3} & -a_3^{(-)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ a_1 & -a_{m-1}^{(-)} & a_0 & -a_m^{(-)} & \cdots \\ a_0 & -a_m^{(-)} & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$G(z_1) = \begin{bmatrix} a_0^{(-)} & a_1^{(-)} & \cdots & a_{m-1}^{(-)} \\ a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 \\ 0 & a_0^{(-)} & \cdots & a_{m-2}^{(-)} \\ 0 & a_m & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}.$$

Les éléments des matrices $F(z_1)$, $G(z_1)$ et $M(z_1)$ sont des polynômes réels en z_1 . La matrice $M(z_1)$ est symétrique [7] et ses éléments sont reliés entre eux par la relation

$$c_{m+1-l, m+1-k}(z_1) = z_1^{2n} c_{k,l}(z_1^{-1}). \quad (32)$$

L'algorithme développe le déterminant de la matrice $M(z_1)$ pour calculer le résultant $\mathbf{R}_2(z_1)$ en exploitant les formes particulières des éléments. À chaque valeur de m ($1 \leq m \leq 4$) correspond une procédure propre pour le calcul de ce déterminant. La stratégie commune aux procédures est de forcer autant que possible la symétrie des résultats partiels ou finaux, afin de minimiser le nombre d'opérations et de conserver la symétrie des résultats. Le résultant $\mathbf{R}_2(z_1)$ est un polynôme satisfaisant à la relation de symétrie : $\mathbf{R}_2(z_1) = z_1^{2nm} \mathbf{R}_2(z_1^{-1})$. Il suffit de calculer la moitié de ses coefficients pour parfaitement le connaître. Quand le polynôme $P(z_1, z_2)$ est général, c'est-à-dire quand ses coefficients sont des indéterminées, le polynôme $\mathbf{R}_2(z_1)$ est de degré $2nm$ et la relation précédente indique qu'il est autoréciproque. De même, le produit d'un polynôme en z_1 par son polynôme réciproque donne un polynôme autoréciproque. Les relations qui sont exploitées, comme le produit d'un polynôme en z_1 et son réciproque, ou le fait qu'un résultat partiel est autoréciproque,

supposent que le polynôme $P(z_1, z_2)$ est général. Il peut arriver, quand ce dernier est spécifié – c'est-à-dire quand on donne des valeurs numériques à ses coefficients – que le coefficient de plus haut degré d'un résultat intermédiaire s'annule, modifiant ainsi de façon discontinue le polynôme réciproque associé. Mais cela ne change en rien les relations de symétries qui sont exploitées dans notre algorithme, car nous ne faisons pas de division par des termes que des spécifications particulières pourraient annuler. Nous distinguons quatre procédures différentes pour faire le produit de deux polynômes réels à une variable, suivant les cas : produit de deux polynômes quelconques le résultat n'ayant *a priori* pas de symétrie, produit de deux polynômes quelconques le résultat étant autoréciproque, carré d'un polynôme quelconque le résultat n'ayant *a priori* pas de symétrie et carré d'un polynôme autoréciproque.

5. conclusion

Nous avons présenté différents critères de stabilité de filtres numériques récurrents 2-D, que nous avons classés en fonction de la plus ou moins bonne adaptation de leur test par un algorithme. Nous avons présenté également un algorithme fiable (résistant aux erreurs d'arrondi) testant la stabilité de filtres 2-D causaux ou semi-causaux, quand le polynôme à deux variables apparaissant au dénominateur de la fonction de transfert est réel avec un degré par rapport à l'une de ses variables inférieur ou égal à quatre, l'autre degré étant quelconque. La plupart des algorithmes proposés aujourd'hui pour tester la stabilité de filtres récurrents 2-D

sont très sensibles aux erreurs d'arrondi quand ils sont implantés avec une arithmétique à virgule flottante. Les systèmes de calcul formel, qui offrent une arithmétique rationnelle exacte, pourront probablement dans un proche avenir offrir des solutions efficaces.

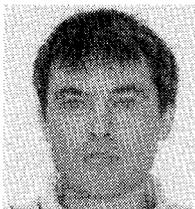
BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. S. Huang, *Two-Dimensional Digital Signal Processing I, Topics in Applied Physics*, vol. 42, Springer-Verlag, New-York, 1981.
- [2] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques, Algèbre*, tome 1, troisième édition, Dunod, 1978.
- [3] M. Barret and M. Benidir, «On the boundary of the set of Schur polynomials and applications to the stability of 1-D and 2-D digital recursive filters», *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 39, no. 11, p. 2335–2339, Nov. 1994.
- [4] M. Barret and M. Benidir, «Behavior of stability tests for two-dimensional digital recursive filters when faced with rounding errors», *IEEE Trans. Circuits and Systems (II)*, vol. 44, no. 4, p. 319–323, Apr. 1997.
- [5] S. Basu and A. Fettweis, «Simple Proofs of some Discrete Domain Stability Related Properties of Multidimensional Polynomials», *Int. J. of Circuit Theory and Applications*, vol. 15, p. 357–370, 1987.
- [6] M. Benidir, «On the root distribution of general polynomials with respect to the unit circle», *Signal Processing*, vol. 53, p. 75–82, 1996.
- [7] M. Benidir and M. Barret, «A Bezout resultant based stability test for 2-D digital recursive filters», *Proc. Int. Conf. EUSIPCO-92*, vol. 2, p. 989–992, Brussels, Aug. 1992.
- [8] M. Benidir and B. Picinbono, «The extended Routh's table in the complex case», *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 36, no. 2, p. 253–256, Feb. 1991.
- [9] Y. Bistriz, «Zero location with respect to the unit circle of discrete time linear system polynomials», *Proc. of the IEEE*, vol. 72, no. 9, Sep. 1984.
- [10] N. K. Bose, «Simplification of a multidimensional digital filter stability test», *J. Franklin Inst.*, vol. 330, no. 5, p. 905–911, 1993.

Manuscrit reçu le 3 mars 1999.

L' AUTEUR

Michel BARRET



Michel Barret a obtenu son diplôme d'ingénieur de l'Ecole Supérieure d'Electricité en 1984. Il a obtenu un doctorat de l'Université de Paris-Sud, spécialité traitement du signal, en 1993. Il travaille depuis 1986 à Supélec, campus de Metz, où il est professeur. Il enseigne le traitement statistique du signal et ses activités de recherche portent sur le traitement du signal multidimensionnel et les systèmes d'équations algébriques.