

Une fonctionnelle pour l'estimation de mouvement d'objets déformables

A Functional for Motion Estimation of a Deforming Body

par Vincent DEVLAMINCK

Laboratoire de Mesures Automatiques,
Université des Sciences et Technologies de Lille,
Bâtiment P3, 3ème étage
F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex

résumé et mots clés

Une nouvelle fonctionnelle pour l'estimation du mouvement d'objets déformables est proposée dans le cadre de l'étude des images de milieux continus où la valeur des pixels est proportionnelle à la densité d'une grandeur. Cette nouvelle fonctionnelle repose sur le concept de l'énergie de déformation élastique et les principes de conservation des milieux continus. L'introduction a priori d'un modèle physique de déformation, permet une nouvelle interprétation de la fonctionnelle proposée par Song et Leahy [Song 91]. Des résultats obtenus à partir de simulations montrent la possibilité de prise en compte du caractère compressible ou non de la déformation. Des résultats sur séquence d'images réelles sont également présentés.

Estimation de mouvement, Déformation, Elasticité linéaire, Images de densités.

abstract and key words

Assuming that the pixel values in the images are proportional to some conserved quantity, a new penalty function is defined for motion estimation of a deforming body. We use the theory of linear elasticity and the conservation laws of continuum medium to propose new constraining terms. The introduction of a deformation model gives a new interpretation of the Song and Leahy's solution [Song 91]. Examples of experiments using simulated and real images of deforming body are presented. The method is able to take into account compressible or incompressible motion according to the parameter values.

Motion Estimation, Deformation, Theory of linear Elasticity, Density Images.

1. introduction

Si l'intérêt d'une approche différentielle dans l'estimation du mouvement d'objets dans des séquences d'images a été mis en évidence par les travaux de Fennema et Thompson [Fenn-79] c'est avec l'équation dite du « flux optique » introduite par Horn et Schunck [Horn-81] que la méthode a connu son véritable essor.

Construite sur l'hypothèse de l'invariance de l'intensité lumineuse des points de l'image au cours de leur déplacement, cette méthode présente toutefois dans sa formulation de base un certain nombre de difficultés tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique.

Sur le plan théorique, peu d'images obtenues à partir de capteurs de type irradiance (caméra classique) vérifient strictement l'hypothèse fondatrice et, sur le plan pratique, la méthode conduit à un problème mal posé au sens de Hadamard. La première difficulté

disparaît lorsque l'on considère le cas des images de densité. Ces images sont formées à partir de capteurs fournissant une grandeur proportionnelle à une densité locale de l'objet qui est transformée en une valeur d'intensité associée à un pixel.

La nature mal posée du problème est quant à elle contournée principalement par une technique de régularisation au sens de Tikhonov [Tikh-77]. Une fonctionnelle de deux termes est construite. Le premier terme issu de l'hypothèse d'invariance contraint la solution à satisfaire les données du problème et le second qui est généralement appelé contrainte de lissage (« Smoothness Constraint ») régularise cette solution [Pogg-85]. Un certain nombre de ces contraintes de lissage ont été proposées dans la littérature [Snyd-91] [Nage-86] [Terz-86] [Aisb-89][Sute-94] qui développent et généralisent celle proposée initialement par Horn et Schunck [Horn-81].

Il faut également noter que l'introduction de ce terme de lissage pose le problème de la détermination des coefficients de pondération entre les différents termes composant la fonctionnelle. Des solutions mathématiques à ce problème ont été proposées. On peut citer la technique des multiplieurs de Lagrange ou les approches à partir des méthodes de régularisation. Outre la lourdeur de leur mise en œuvre, ces méthodes ne fournissent pas de solution réellement satisfaisante notamment en présence de bruit dans l'image. Ce dernier est pris en compte comme le signal image et il perturbe la solution. De ce fait, les valeurs des coefficients de pondération sont dans de nombreuses applications déterminées de manière empirique même si certaines considérations sur les critères de choix ont été mises en évidence [Gorg-94].

Un certain nombre de travaux ont proposés d'étendre l'application de ces techniques aux problèmes des mouvements d'objets déformables [Song-91] [Gorg-94]. Toutefois, dans ce cas, les contraintes de lissage conventionnelles, utilisant les dérivées spatiales du vecteur vitesse affectées de coefficients de pondération peuvent ne plus être opérantes. En effet, l'information de déformation est contenue dans les dérivées spatiales des composantes du vecteur déplacement et la minimisation d'un terme de régularisation mal choisi peut distordre le champ des déplacements estimés. De ce fait, des méthodes alternatives ont été proposées dans le cas de mouvement déformable, basées sur l'utilisation d'autres outils mathématiques comme l'approche statistique par exemple [Chou-93].

Nous proposons une approche qui consiste à introduire un modèle physique de déformation a priori dans le critère de choix de la fonctionnelle. Le modèle retenu est celui de l'élasticité linéaire. Dans ce cas, les relations entre les dérivées spatiales du vecteur déplacement et le terme de contrainte sont imposées par le modèle et les coefficients de pondération ont une interprétation physique. Il devient alors possible d'expliquer les résultats d'estimation obtenus et le choix des coefficients à priori compte tenu de la nature compressible ou incompressible du problème traité. Le modèle retenu permet également d'éclairer d'un nouveau jour la fonctionnelle proposée par S. Song et R. Leahy [Song-91].

2. images de densité et théorie des milieux continus

Les images de densité d'un milieu continu forment un groupe d'images très intéressant pour l'analyse du mouvement. D'abord d'un point de vue applicatif, puisqu'elles sont utilisées par exemple en médecine (Tomographie rayons X ...) mais aussi d'un point de vue théorique puisque depuis les travaux de J. Fitzpatrick [Fitz-88] [Fitz-85] on connaît l'existence d'une transformation géométrique dans les images de densité correspondant au déplacement des objets.

Si l'on considère un domaine D connexe strictement intérieur à un système S animé d'un mouvement de vitesse \vec{u} , il est possible d'associer à cet ensemble un certain nombre de lois dites de conservation des milieux continus.

2.1. équation de continuité

L'application de la loi de conservation de la masse fournit une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (1)$$

connue sous le nom d'équation de continuité, où ρ est la densité d'une grandeur conservée lors du déplacement d'une particule au sein du domaine D . La classique équation de contrainte du flux optique s'identifie en fait à l'équation (1) dans le cas d'un milieu incompressible comme l'ont montré les travaux de J. Fitzpatrick [Fitz-88] repris par S. Song et R. Leahy [Song-91] sur les séquences d'images dont l'intensité des pixels est proportionnelle à ρ .

2.2. équation d'équilibre

L'application de la loi de conservation à la quantité de mouvement conduit au système d'équations suivant :

$$\vec{u} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right] + \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}(\vec{u}) \right] = \text{div}(\Sigma) + \vec{F} \quad (2)$$

où \vec{F} est le vecteur de composantes f_i représentant les forces extérieures par unité de volume exercées sur D et (Σ) représente le tenseur des contraintes de composantes σ_{ij} qui caractérise les efforts intérieurs en tout point du système. Ce tenseur est symétrique et il est donc défini par 6 composantes :

$$(\Sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = (\sigma_{ij}) \quad (3)$$

en reportant (1) dans (2) on obtient les équations dites du mouvement :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}(\vec{u}) \right] = \text{div}(\Sigma) + \vec{F} \quad (4)$$

Le premier membre de (4) s'identifie à $\rho \vec{\gamma}$ où $\vec{\gamma}$ désigne l'accélération de la particule et on peut donc réécrire (4) sous la forme :

$$\rho \vec{\gamma} = \text{div}(\Sigma) + \vec{F} \quad (5)$$

Si l'on se place dans le cas d'une accélération nulle, on obtient alors les équations d'équilibre du système :

$$\text{div}(\Sigma) = \vec{F} = \vec{0} \quad (6)$$

3. déformation d'un milieu continu

3.1. tenseur des déformations

Dans la théorie des petits déplacements, les composantes u_1, u_2, u_3 du vecteur déplacement dans trois directions perpendiculaires x_1, x_2 et x_3 sont supposées suffisamment petites pour qu'il soit possible de linéariser les relations gouvernant le problème.

L'état de déformation d'un élément de longueur est défini par les 6 composantes du tenseur symétrique des déformations (\mathcal{E}) :

$$(\mathcal{E}) = (\varepsilon_{ij}) \quad (7)$$

qui sont reliées aux composantes du vecteur déplacement par les relations suivantes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

La relation qui lie les tenseurs (\mathcal{E}) et (Σ) est définie par l'état rhéologique du milieu, soit dans le cas général :

$$(\Sigma) = f[(\mathcal{E})] \quad (9)$$

où f est une fonction dont la nature sera explicitée par la suite.

4. milieu élastique linéaire, énergie de déformation

Pour un milieu élastique linéaire, il est possible d'écrire (9) sous la forme :

$$(\Sigma) = [C](\mathcal{E}) \quad (10)$$

où $[C]$ est une matrice symétrique [Henr-82] dont les coefficients sont appelés les constantes élastiques du milieu. Cette matrice dans le cas d'un milieu isotrope est déterminée par la loi phénoménologique de Hook et on montre qu'il est possible d'exprimer toutes les constantes élastiques en fonction de deux paramètres existants : le module de Young, E et le coefficient de Poisson ν . Nous supposons toujours par la suite l'hypothèse d'isotropie du milieu.

4.1. énergie de déformation

A partir de la relation (10), il est possible de construire une fonction d'état $A(\varepsilon_{ij})$ appelée énergie de déformation telle que sa première variation vérifie :

$$\delta A = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (11)$$

Des considérations physiques, par exemple, permettent de montrer que l'énergie de déformation est une fonction définie positive.

Il est intéressant de faire apparaître dans les tenseurs (Σ) et (\mathcal{E}) une partie volumétrique ($s \cdot (I)$ et $e \cdot (I)$ respectivement) et une partie déviatorique ((Σ_d) et (\mathcal{E}_d) respectivement) :

$$\begin{cases} (\Sigma) = \frac{s}{3}(I) + (\Sigma_d) \\ (\mathcal{E}) = \frac{e}{3}(I) + (\mathcal{E}_d) \end{cases} \quad (12)$$

où (I) est le tenseur identité, e et s sont les traces (somme des éléments de la diagonale) des matrices associées à (\mathcal{E}) et (Σ).

On définit également la contrainte moyenne ou pression moyenne par la relation :

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{s}{3} \quad (13)$$

Cette pression est reliée à la déformation volumétrique e par le module de compressibilité K :

$$e = \frac{p}{K} \quad (14)$$

Pour un milieu incompressible, K tend vers l'infini et la déformation volumétrique e est donc nulle.

De façon analogue, la partie déviatorique (\mathcal{E}_d) de \mathcal{E} est reliée à la partie déviatorique (Σ_d) de Σ par le module de contrainte μ :

$$(\Sigma_d) = 2\mu(\mathcal{E}_d) \quad (15)$$

Les coefficients K et μ sont reliés au module de Young et au coefficient de Poisson par les relations suivantes :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (16)$$

A partir de la relation (10) de contrainte-déformation et des relations (12) à (15), il est possible [Henri-82] de réécrire l'énergie de déformation sous la forme :

$$A(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \left(K \frac{e^2}{3} + 2\mu \cdot \text{trace}[(\mathcal{E}_d)^2] \right) \quad (17)$$

de manière à faire apparaître un terme d'énergie correspondant au changement de volume sans changement de forme pondéré par le paramètre K et un terme correspondant au changement de forme sans changement de volume pondéré par μ .

Finalement en utilisant la relation (8) de déformation-déplacement, on obtient une expression de A en fonction des dérivées spatiales du déplacement.

5. construction de la fonctionnelle d'estimation

Si l'on considère donc un milieu D continu subissant des déformations, il doit vérifier en l'absence de forces extérieures, les équations de conservation suivantes :

$$\begin{cases} \text{div}(\Sigma) = \vec{0} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Ce système doit être vérifié en tout point du domaine D et on doit donc avoir :

$$\int_D \text{div}(\Sigma) dV = 0 \quad \text{avec comme contrainte} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

On montre (cf. annexe 1) que sous certaines conditions, le premier terme est équivalent à :

$$\int_D A(\varepsilon_{ij}) dV = 0 \quad (20)$$

On cherche alors classiquement une approximation de la solution sous la forme d'une minimisation non contrainte donnée par :

$$\Pi = \int_D \left\{ c \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right]^2 + A(\vec{u}) \right\} dV \quad (21)$$

où c est une constante positive. Cette approximation se justifie par le fait que les données sont entachées de bruit et qu'une

utilisation de contraintes trop « rigides » donne en général une solution médiocre en raison de la prise en compte de ce bruit comme partie intégrante du signal.

L'équation (21) fournit donc une nouvelle fonctionnelle spécifiquement adaptée au cas de l'estimation des déplacements dans des déformations élastiques de milieux continus. L'énergie de déformation intervient dans la minimisation comme un terme de régularisation qui cette fois est cohérent avec les hypothèses de déformation.

L'analyse de cette fonctionnelle permet de plus une ré-interprétation, tant du point de vue expérimental que du point de vue méthodologique, des techniques dites « différentielles » d'estimation du mouvement d'objets non rigides utilisant une minimisation non contrainte dont un exemple marquant est la fonctionnelle proposée par S. Song et R. Leahy [Song-91].

6. analyse de la fonctionnelle de Song et Leahy

La fonctionnelle proposée par S. Song et R. Leahy est composée, en dehors d'un terme de contrainte F dérivant de l'équation de continuité, de deux termes. Le premier pondéré par le coefficient γ_1 correspond à une condition d'incompressibilité du milieu et le second pondéré par γ_2 est introduit afin de régulariser la solution.

Il est possible d'écrire cette fonctionnelle sous la forme suivante :

$$\Pi_{SL} = \int_D (F)^2 dV + L(\vec{u}) \quad (22)$$

avec

$$L(\vec{u}) = \int_D \{ \gamma_1 [\text{div}(\vec{u})]^2 + \gamma_2 [\text{hyp1}(\vec{u})^2 + \text{hyp2}(\vec{u})^2 + \text{div}(\vec{u})^2 + \text{rot}(\vec{u})^2] \} dV \quad (23)$$

en utilisant les définitions classiques des opérateurs différentiels rappelées ici dans le cas 2D :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u}) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} & \text{hyp1}(\vec{u}) &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \text{rot}(\vec{u}) &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & \text{hyp2}(\vec{u}) &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (24)$$

Les termes γ_1 et γ_2 sont des facteurs indépendants introduits dans le cadre d'une technique de minimisation non contrainte.

Le terme de « lissage » de la fonctionnelle (21) que nous proposons peut, en utilisant la même convention d'écriture, se réécrire sous la forme :

$$L_A(\vec{u}) = \int_D \left\{ \frac{\lambda}{2} [\text{div}(\vec{u})]^2 + \frac{\mu}{2} [\text{hyp1}(\vec{u})^2 + \text{hyp2}(\vec{u})^2 + \text{div}(\vec{u})^2] \right\} dV \quad (25)$$

Nous utilisons ici les paramètres de Lamé λ et μ à la place des paramètres K et μ de manière à avoir une forme plus proche de celle de l'équation (23). Ces paramètres s'expriment également en fonction du module E de Young et du coefficient ν de Poisson (la matrice des constantes élastiques ne dépend que de deux paramètres indépendants) par les relations :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (26)$$

Le terme (23) de la fonctionnelle utilisée par S. Song et R. Leahy peut être mis sous la forme suivante :

$$\int_D \left\{ \gamma_1 [\text{div}(\vec{u})]^2 + \gamma_2 [\text{hyp1}(\vec{u})^2 + \text{hyp2}(\vec{u})^2 + \text{div}(\vec{u})^2] + \gamma_2 \text{rot}(\vec{u})^2 \right\} dV \quad (27)$$

où les coefficients γ_1 et γ_2 sont supposés indépendants. Le développement qui conduit à la fonctionnelle (21) et à la relation (26) montre que si l'on suppose une relation d'élasticité dans le milieu, les coefficients γ_1 et γ_2 ne peuvent être indépendants. Par ailleurs, l'équation (6) devient dans le cas d'un milieu élastique isotrope :

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) - \mu \text{rot}(\text{rot}(\vec{u})) + \vec{F} = \vec{0} \quad (28)$$

Cette équation classique en élastostatique est connue sous le nom d'équation de Lamé.

Si l'on suppose que le rotationnel du champ de déplacement est nul, il en résulte d'après (28) que F doit dériver d'un potentiel scalaire X (appelé potentiel de Lamé) et que :

$$\text{div}(\vec{u}) = -\frac{X}{\lambda + 2\mu} + \text{cste} \quad (29)$$

La valeur de la divergence du champ de déplacement est donc contrainte et le coefficient de pondération du terme rotationnel ne peut pas être indépendant de γ_1 et γ_2 si le modèle élastique est supposé.

En ce sens Song et Leahy respectent cette règle puisqu'ils identifient ce coefficient à γ_2 au vu de l'expression (23).

Il est possible d'exprimer les coefficients γ_1 et γ_2 de la fonctionnelle de Song et Leahy en fonction des paramètres de l'élasticité de sorte que pour une famille de valeurs du couple (γ_1, γ_2) , la fonctionnelle (23) corresponde à une déformation élastique. Un calcul variationnel de l'équation différentielle associée aux fonctionnelles (23) et (25) donne la solution suivante :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \lambda + \mu \\ \gamma_2 = \mu \end{cases} \quad (30)$$

Si l'on respecte ces relations sur les coefficients γ_1 et γ_2 , la fonctionnelle (23) correspond à un problème d'estimation de déformations élastiques de type incompressible ou compressible suivant la valeur du coefficient de Poisson utilisé et ceci contrairement aux suppositions faites par Song et Leahy.

Les équations (30) montrent que le coefficient γ_1 doit toujours être supérieur ou égal au coefficient γ_2 . Cette constatation se retrouve dans les résultats expérimentaux donnés par J. Gorce *et al.*, [Gorc-94] où l'on constate sur le cas de l'étude d'une série d'images synthétiques que les résultats expérimentaux les plus proches des résultats théoriques sont obtenus pour des rapports γ_1/γ_2 plus grands que 1.

7. expérimentations et résultats

Afin d'avoir une interprétation plus rapide des coefficients, nous réécrivons la fonctionnelle (21) sous la forme :

$$\begin{aligned} \Pi = \int_D \left\{ \alpha \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(K_n \frac{e(\vec{u})^2}{3} + 2\mu_n \text{trace}[(E_d(\vec{u}))^2] \right) \right\} dV \quad (31) \end{aligned}$$

où $\mu_n = \frac{\mu}{E}$, $K_n = \frac{K}{E}$, $\alpha = \frac{c}{E}$ sont des paramètres normalisés.

La figure 1 donne une représentation des coefficients sans dimension $K_n(\nu)$ et $\mu_n(\nu)$.

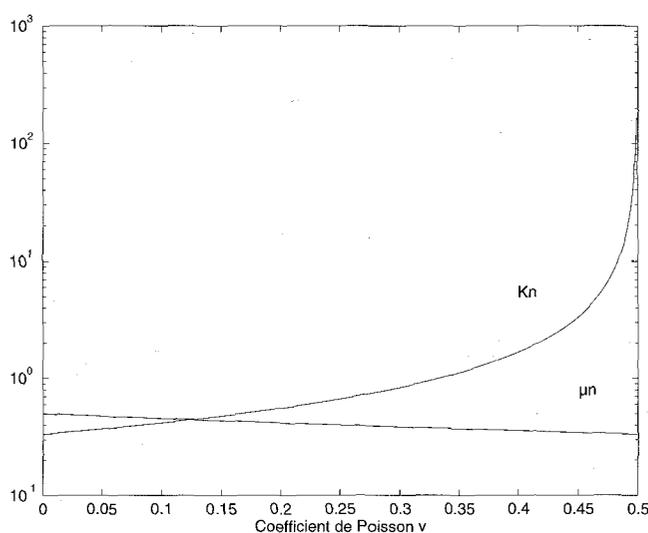


Figure 1. - Paramètres K_n et μ_n en fonction de ν .

7.1. estimation des coefficients

Suivant les relations (14) et (16), quand le coefficient de Poisson approche de la valeur 0,5, le milieu devient incompressible ou quasi incompressible et nous avons (figure 1) $K_n \gg \mu_n$. A l'opposé, lorsque ν décroît, le milieu devient de plus en plus compressible. Le réglage du paramètre ν se fera donc en fonction de la nature supposée compressible ou incompressible de la déformation.

L'interprétation du coefficient α peut se faire à partir de celle du module E de Young et du calcul variationnel. E est un coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation. Ainsi pour une contrainte donnée, E doit diminuer lorsque la déformation augmente. Par ailleurs, il est possible à partir d'un calcul variationnel sur la fonctionnelle (21) de montrer que le terme $c \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{grad}(\rho)$ doit correspondre à une force par unité de volume.

Comme le module de Young est homogène à une pression, on doit avoir $\frac{c}{E} \frac{\partial \rho}{\partial t} \text{grad}(\rho)$ homogène à l'inverse d'une longueur.

Dans le cas de systèmes physiques, le module de Young est une grandeur connue et il est possible d'associer une longueur à la distance inter-pixel. Dans le cas d'images de synthèse, on pose arbitrairement la distance inter-pixel comme unité de longueur et on choisit d'après ce qui précède :

$$\alpha = \frac{1}{\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \|\text{grad}(\rho)\|} \quad (32)$$

La relation (32) fournit théoriquement une valeur de α différente en chaque point. Cependant une approche de ce type conduit à deux inconvénients principaux. Le premier est mathématique puisque la formule (32) n'est pas forcément définie en tout point de l'image. Le deuxième est qu'en particulierisant la valeur de α en chaque point, on réintègre le bruit comme un élément de signal. Afin d'éliminer ces deux inconvénients, nous choisissons de fixer α à partir des gradients moyens sur l'objet traité.

7.2. séquences de tests

La fonctionnelle proposée est d'abord testée sur deux séquences d'images de synthèse 2D de taille 50 par 50 pixels. Toutes les déformations sont réalisées de façon à ce que les lois de conservations soient vérifiées.

Le premier ensemble d'images (S_1) représente une ellipse se déformant de manière incompressible. L'objet change donc de forme sans changer de volume. La déformation isovolumique se fait suivant deux axes orthogonaux, l'un horizontal et l'autre vertical. Le coefficient de déformation est sensiblement de 1,4. La deuxième séquence (S_2) correspond à une ellipse se déformant de manière compressible. L'objet présente alors une variation

volumétrique accompagnée d'un changement de forme. La déformation est volontairement prise asymétrique et uniquement sur un axe horizontal. Le coefficient de déformation à gauche est de 1,4 et de 1,6 à droite. Les ellipses en déformation sont présentées en figures 2 et 3.

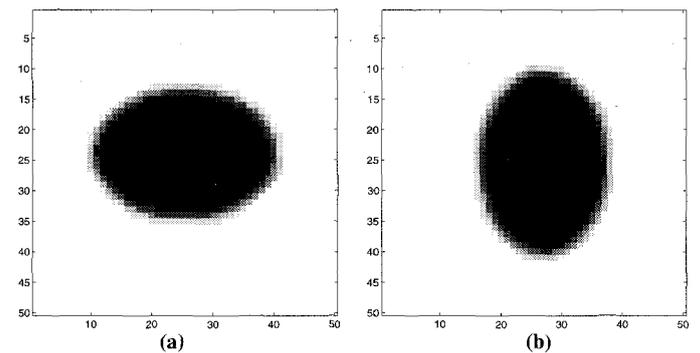


Figure 2. – Séquence S1 : ellipse déformée; (a) image initiale, (b) image finale.

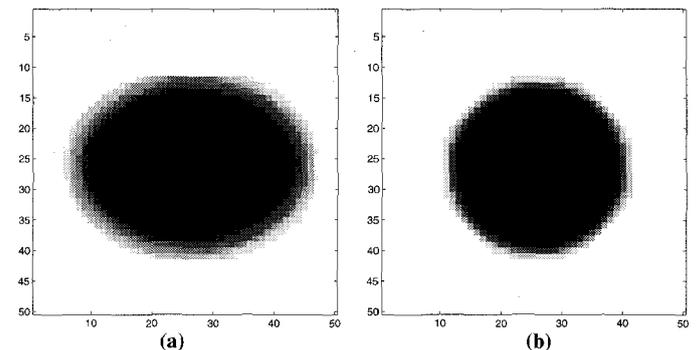


Figure 3. – Séquence S2 : ellipse comprimée; (a) image initiale, (b) image finale.

Tous les tests sont faits dans le cas d'images 2D afin de faciliter la représentation des résultats. Nous introduisons de plus une hypothèse de déformation plane ($\epsilon_{33} = 0$) dans la formulation du problème afin de garder les commodités de représentation. Ceci n'est en aucun cas restrictif quant aux possibilités 3D de la méthode.

La minimisation de la fonctionnelle est réalisée au moyen d'une méthode par éléments finis [Dev1-95] qui associe un maillage à l'image. Cette technique permet de lever des difficultés de convergence que l'on peut rencontrer avec certains algorithmes classiques comme la méthode de Jacobi par exemple. Elle présente de plus l'avantage de permettre un interpolation directe des valeurs entre les nœuds du maillage.

La figure 4 montre le champ de déplacement obtenu pour la séquence S_1 (un vecteur sur deux étant représenté). Le paramètre ν est fixé à la valeur 0,499 correspondant à un milieu quasi-incompressible (voir figure 1). On teste les solutions obtenues en fonction de la valeur du paramètre α . Nous observons une bonne cohérence entre les estimations de déplacement et le mouvement

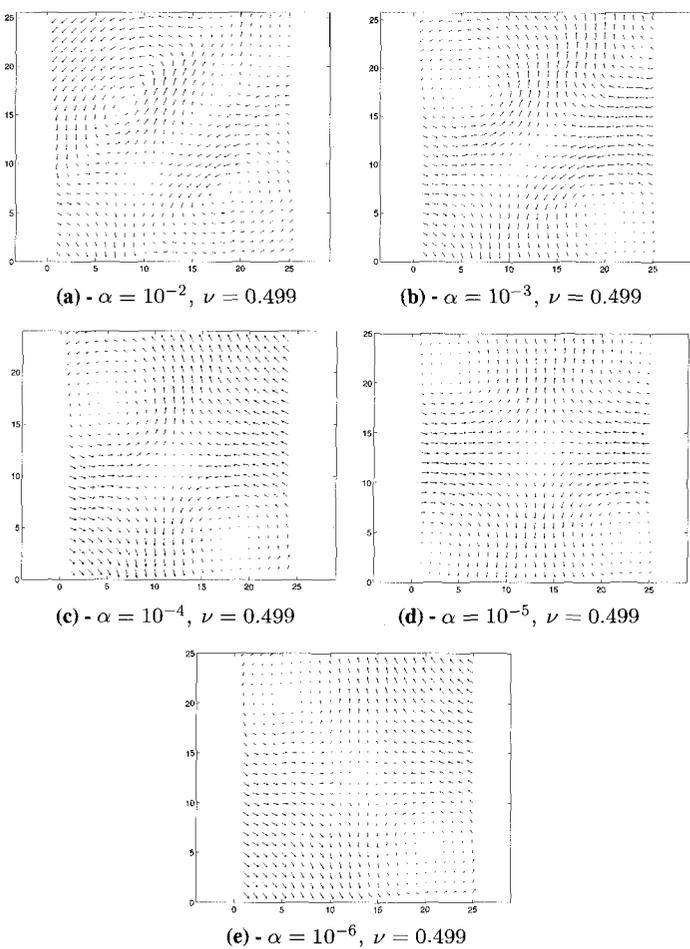


Figure 4. – Estimation des déplacements dans la séquence S1 en fonction du paramètre α .

réel de l'ellipse pour des valeurs du paramètre α qui se situent dans une zone correspondant à la relation (32). Ces résultats concordent avec les remarques concernant le choix des coefficients.

La figure 5 donne les résultats pour la séquence S_2 avec un coefficient de Poisson de 0,001 correspondant à un milieu compressible. Les contours de deux images successives sont superposés au champ de déplacement et montrent la validité des résultats dans une gamme de valeurs de α qui vérifient encore pour ces images les remarques précédentes.

Afin de vérifier la prise en compte du caractère compressible ou incompressible des déformations observées, nous avons calculé les variations volumétriques correspondant aux champs de déplacements estimés pour chacune des séquences. Compte tenu de la relation (14), ces calculs fournissent une valeur de la contrainte locale moyenne (13) existant sur le milieu. Les résultats sont donnés par les courbes des figures 6 et 7, pour lesquelles nous avons représenté à la même échelle la valeur de la partie volumétrique (e) du tenseur des déformations pour les différents points de l'image. Compte tenu des relations définies précédemment, une valeur positive de e correspond à une compression, une

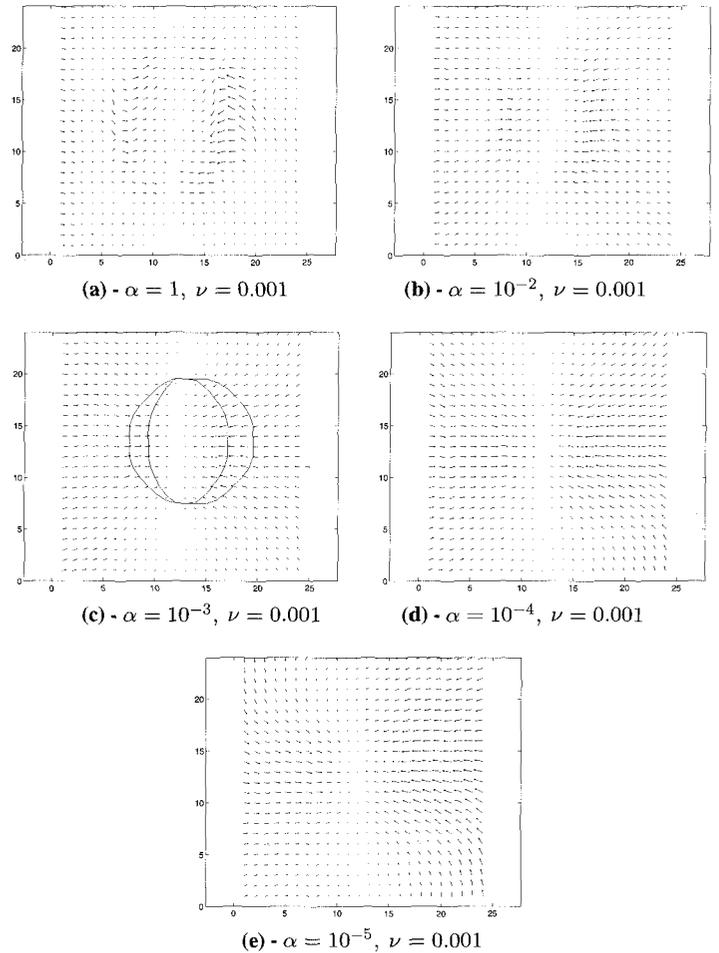


Figure 5. – Estimation des déplacements dans la séquence S2 en fonction du paramètre α .

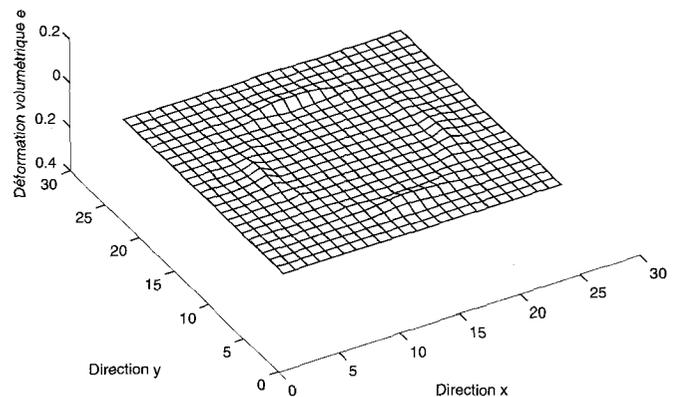


Figure 6. – Déformation volumétrique locale dans la séquence S1.

valeur négative à une dilatation et une valeur nulle à un cas d'incompressibilité. On constate au vu des figures 6 et 7 la réelle prise en compte du caractère compressible ou non du mouvement au travers des déplacements estimés dans les 2 séquences. On remarque également que la dissymétrie imposée dans la déformation de la séquence S_2 est bien mise en évidence. L'estimation de la con-

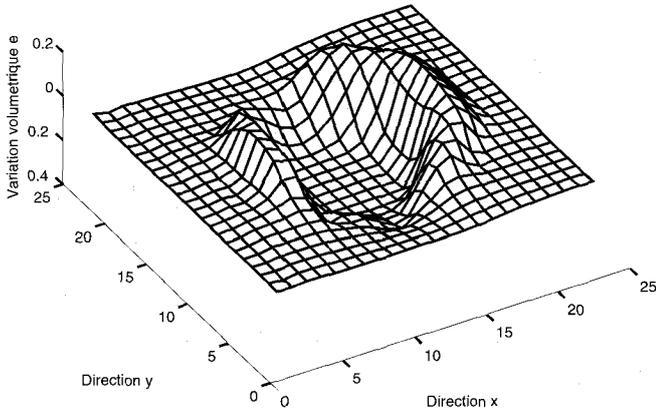
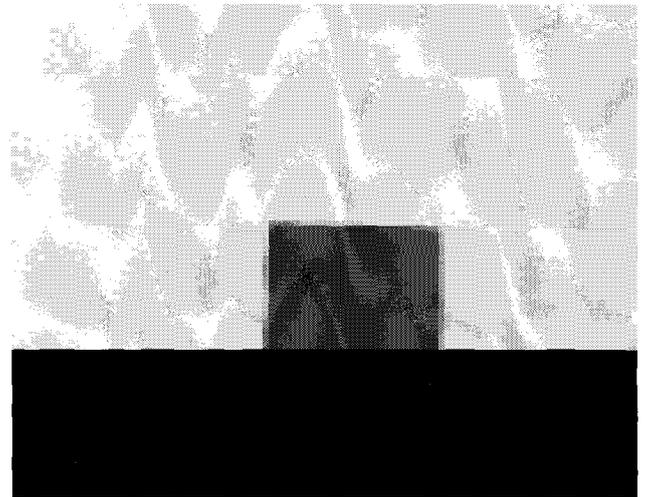


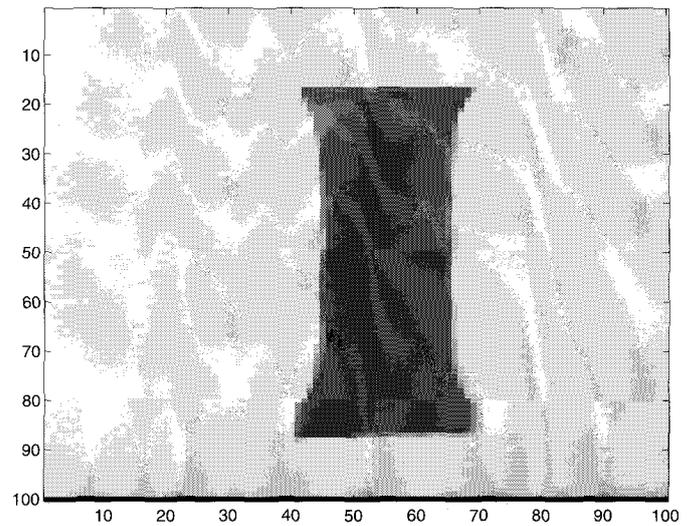
Figure 7. – Déformation volumétrique locale dans la séquence S2.

traite moyenne imposée sur la droite de l'objet est supérieure à celle trouvée pour la gauche de l'objet.

Nous testons finalement la fonctionnelle proposée sur un exemple de données réelles représentées figure 8. La séquence étudiée correspond au cas d'un échantillon de type caoutchouc retenu par deux mors dont l'un subit un mouvement de traction dans le plan de l'image. La déformation est de type incompressible. Les figures 11 et 10 représentent respectivement le champ de déplacement obtenu à l'aide de la fonctionnelle d'estimation (les contours de l'échantillon à deux instants successifs d'acquisition sont également visualisés) et le champ de déplacement théorique calculé sur un échantillon rectangulaire à l'aide d'un logiciel de calcul de déformations élastiques par éléments finis. La figure 9 donne les valeurs de la partie déviatorique du tenseur des déformations. Ces trois représentations sont données dans le repère d'origine (avant déformation) et sont limitées à la zone d'intérêt. Les résultats de déplacement obtenus sont tout à fait comparables à ceux obtenus par le calcul et la partie déviatorique du tenseur des déformations fait bien apparaître les quatre zones de cisaillement deux à deux de même signe.



(a)



(b)

Figure 8. – Déformation d'un échantillon test, (a) image initiale, (b) image finale.

8. conclusion

La méthode de calcul des déplacements que nous proposons dans le cadre des déformations élastiques linéaires fournit des résultats prometteurs. Les simulations effectuées montrent la réelle prise en compte des notions de compressibilité ou d'incompressibilité du milieu et la possibilité d'accéder à des grandeurs caractérisant la déformation (contrainte moyenne, variation de volume etc...).

Des applications sont en cours de validation [Dev1-96]. Par ailleurs, nous évaluons les possibilités d'utilisation de systèmes à base de réseaux de neurones adaptés à la minimisation de fonctionnelles [Lela-95]; ceci afin d'accélérer les calculs des déplacements.

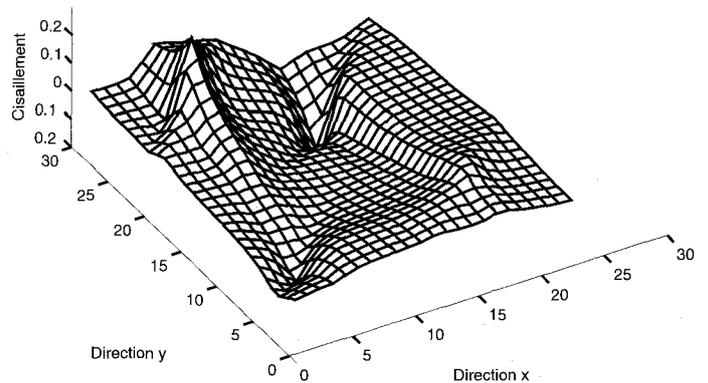


Figure 9. – Représentation de la composante de cisaillement.

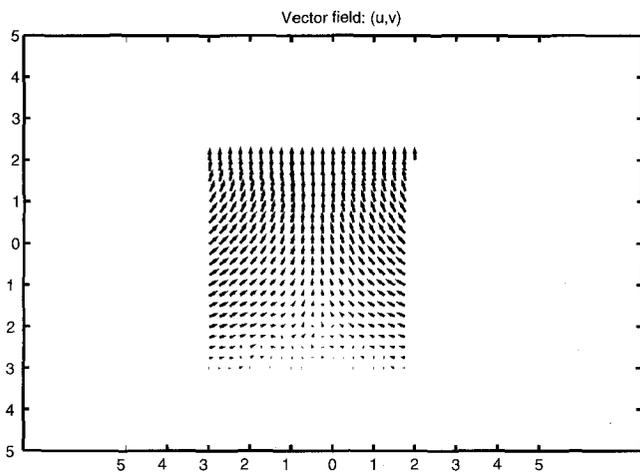


Figure 10. - Champ de déplacement théorique.

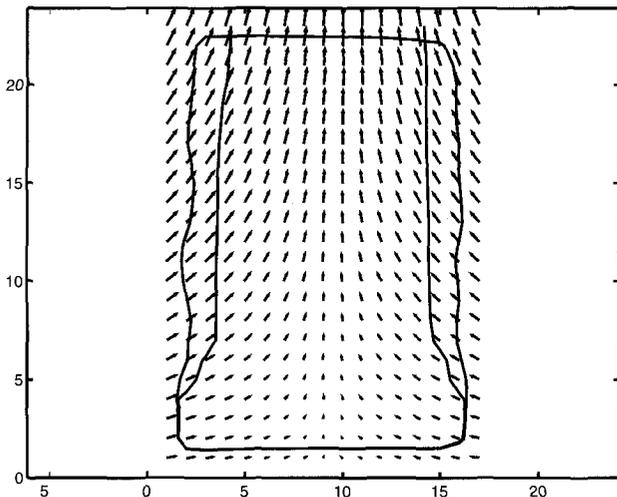


Figure 11. - Champ de déplacement estimé.

Enfin, d'un point de vue théorique, cette méthode permet de comprendre et de résoudre par l'introduction d'un modèle physique approprié, un certain nombre de difficultés qui existaient préalablement dans d'autres approches reposant sur l'utilisation de minimisations non contraintes dans la résolution de problèmes liés à des phénomènes physiques perçus au travers de séquences d'images. L'introduction d'un modèle physique restreint l'espace des solutions admissibles en imposant des relations entre les différents coefficients de pondération introduits par la technique de minimisation non contrainte. La démarche retenue permet également une extension de la méthode à d'autres types de comportements rhéologiques ainsi qu'à des comportements de déformations non linéaires.

ANNEXE

Nous utilisons les conventions classiques de notation dites de l'indice muet : $\sum_i a_i b_i$ noté $a_i b_i$.

On considère un domaine D de frontière ∂D tel qu'on exerce des forces surfaciques sur une partie de ∂D et qu'on impose les déplacements sur la partie restante. En tout point M intérieur du domaine, on suppose la relation :

$$\int_D \text{div}(\Sigma) dV = 0 \quad (\text{a1})$$

Compte tenu de la définition de l'énergie de déformation, cette relation peut encore se mettre sous la forme :

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) dV = 0 \quad (\text{a2})$$

ou encore :

$$I = \int_D u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) dV = 0 \quad (\text{a3})$$

$$I = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) dV - \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j) \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} dV = 0 \quad (\text{a4})$$

En appliquant le théorème de la divergence à la première intégrale et en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j) \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \sigma_{ij} \\ &= \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} = 2A \end{aligned} \quad (\text{a5})$$

il vient alors de (a4) et (a5) :

$$I = \int_{\partial D} u_j (\sigma_{ij} n_i) dS - 2 \int_D A dV = 0 \quad (\text{a6})$$

où n_i représente les composantes du vecteur normal à la frontière ∂D .

Si l'on impose une condition de déplacement nul ou de contrainte normale nulle sur la surface ∂D , la première intégrale est nulle et il en résulte donc que :

$$\int_D \text{div}(\Sigma) dV = 0 \implies \int_D A dV = 0 \quad (\text{a7})$$

La réciproque est obtenue en considérant que l'énergie de déformation est une forme définie positive et qu'il est donc nécessaire en présence d'une condition de même type que précédemment sur la surface, que A soit identiquement nulle, c'est-à-dire que l'état caractérisé par le vecteur déplacement ne produise pas de déformation. Il en résulte que le champ de déplacement est soit identiquement nul, soit qu'il correspond au cas d'un mouvement rigide. La réciproque est alors évidente.

BIBLIOGRAPHIE

- [Aisb-89] J. Aisbett. «Optical flow with an intensity-weighted smoothing constraint.» *IEEE Transac. on Pattern Analysis Mach. Intell.*, PAMI-11, n°5, pp. 512-522, 1989.
- [Chou93] Wen-Shou Chou, Yung-Chang Chen. «Estimation of the velocity field of two-dimensional deformable motion.» *Pattern Recognition*, Vol. 26, N°2, pp. 351-364, 1993.
- [Devl95] V. Devlaminck, J.P. Dubus. «A finite element method for nonrigid motion estimation.» *Proc. Intelligent Robots and Computer Vision XIV*,

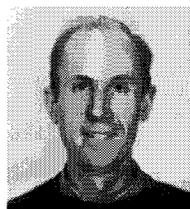
Une fonctionnelle pour l'estimation de mouvement d'objets

- SPIE's Photonics East Symposium*, Vol. 2588 pp.312-319, Philadelphia, PA., 22-26 October 1995.
- [Devl-96] V. Devlaminck, J.P. Dubus. «Non-rigid motion estimation for density images of a beating heart.» *Proc. of Medical Imaging, SPIE.*, Vol. 2709, pp.433-442. Newport Beach, USA, Feb 1996.
- [Fenn-79] C. Fennema, W. Thompson. «Velocity determination in scenes containing several moving objects.» *Comput. Vision Graphics Images Process.*, 9, pp. 301-315, 1979.
- [Fitz-85] J.Fitzpatrick. «A method for calculating fluid flow in time dependent images based on the continuity equation» in *Proc. IEEE Conf. Comput. Vision, Pattern Recog.* Vol CVPR-85, San Francisco, CA, 1985, pp 78-81.
- [Fitz-88] J.Fitzpatrick. «The existence of Geometrical Density-Image Transformation corresponding to Object Motion.» *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 44, pp. 155-174, 1988
- [Gorc-94] J. Gorce, D. Friboulet, I. Magnin. «Méthode d'estimation du mouvement des parois cardiaques à partir d'images 3D.» *Revue Innovation et Technologie en Biologie et Medecine (ITBM)*. Vol.15, n°5, pp.570-582, 1994.
- [Henn-82] J.P. Henry, F. Parsy. «Cours d'élasticité.» Dunod Université, 1982.
- [Horn-81] B. Horn, B. Schunck. «Determining Optical Flow.» *Artificial Intelligence*, Vol. 17, pp. 185-203, 1981.
- [Lela-95] L. Lelaurin, A. Yacoubi, V. Devlaminck, J.P. Dubus. «Motion estimation by using a neuromimetic approach.» IEEE-International Conference on Neural Networks (ICNN'95), Vol. 6, pp 2917-2921, Decembre 1995- Perth, Australie.
- [Nage-86] H.H. Nagel, W. Enkelmann. «An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences.» *IEEE Transac. Pattern Analysis Mach. Intell.*, PAMI-8 n°5, pp. 565-593, 1986.
- [Pogg-85] T. Poggio, V. Torre, C. Koch. «Computational vision and regularization theory.» *Nature*, pp. 314-319, 1985.
- [Snyd-91] M.A. Snyder. «On the mathematical foundations of smoothness constraints for the determination of optical flow and for surface reconstruction.» *IEEE Transac. Pattern Analysis Mach. Intell.*, PAMI-13, No 11, pp. 1105-1114, Novembre 1991.
- [Sute-94] D. Suter. «Mixed-Finite Element based motion estimation.» *Revue Innovation et Technologie en Biologie et Medecine (ITBM)*, Vol. 15 n°3, pp.293-307, 1994.
- [Song-91] S. Song, R. Leahy. «Computation of 3D Velocity Fields from 3D Cine CT Images of human Heart.» *IEEE Transac. On Medical Imaging*, Vol. 10 n°3, pp. 295-306, 1991.
- [Terz-86] D. Terzopoulos. «Regularization of inverse visual problems involving discontinuities.» *IEEE Transac. Pattern Analysis Mach. Intell.*, PAMI-8, No 4, pp. 413-423, July 1986.
- [Tikh-77] A. Tikhonov, V. Arsenin. «Solution of Ill-posed Problems.» *gauche Washington DC, Winston and Sons*, 1977.

Manuscrit reçu le 11 Juillet 1995

L' AUTEUR

Vincent Devlaminck



Maître de Conférences à l'U.T du Littoral. Membre du laboratoire de Mesures Automatiques (LMA) de l'université des Sciences et Technologies de Lille. A obtenu le grade de Docteur en Électronique à l'Université de Lille. Ses recherches concernent le domaine de l'estimation de mouvement d'objets déformables à partir de séquences d'images