

Localisation angulaire de signaux non circulaires

Angular Localisation for Non Circular Signals

par Patrick GOUNON*, C. ADNET**, Jérôme GALY***

* CEPHAG ENSIEG, Domaine Universitaire, BP 46 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

** THOMSON-CSF AIRSYS, 7 rue des Mathurins 92223 Bagneux Cedex

*** ENSICA, 1 place Emile Blouin acc 31056 Toulouse Cedex

résumé et mots clés

Nous présentons dans cet article un algorithme de localisation angulaire de sources non circulaires. Nous montrons comment prendre en compte la nature non circulaire des signaux en traitement d'antenne et développons une extension de l'algorithme MUSIC. Cette extension offre, pour une mise en œuvre relativement simple, des performances sensiblement supérieures à l'algorithme classique. Les principaux avantages liés à la non circularité concernent la résolution, la variance d'estimation et le nombre de sources localisables. Ces caractéristiques sont illustrées par des simulations.

Traitement d'antenne, Signaux non circulaires, MUSIC.

abstract and key words

We present in this article an angular location algorithm of non circular sources. We show how to take into account non circularity of signals in array processing and develop an extension of the MUSIC algorithm. This extension offers, for a relatively simple implementation, performance appreciably superior the classic algorithm. The main improvement linked to the non circularity concern the resolution, the variance of estimation and the number of localizable sources. These characteristics are illustrated by simulations.

Array processing, Non circular signals, MUSIC.

1. Introduction

L'estimation des paramètres du signal reçu sur une antenne est un problème analysé de façon classique depuis déjà de nombreuses années et la littérature relative à ce sujet est abondante [13] [10]. Plusieurs voies de recherche ont été explorées en s'inspirant initialement de l'analyse spectrale. Les plus anciennes sont les méthodes basées sur la formation de voies, méthodes robustes mais au pouvoir de résolution limité.

Par la suite ont été développées des méthodes basées sur une décomposition en sous espace ou sur une approche paramétrique [11] [12]. Ces techniques améliorent sensiblement le pouvoir de résolution grâce à une modélisation plus fine des signaux reçus (et à une charge de calcul plus importante).

En complément à ces travaux, plusieurs points (non dépourvus d'importance) ont été analysés. Il s'agit par exemple des problèmes liés à la corrélation des sources [14], de l'estimation

du nombre de sources [15], de l'analyse de signaux large bande [16] ou de certaines configurations particulières d'antenne.

Des méthodes basées sur des structures particulières de signaux ont aussi vu le jour. L'objectif de ces approches est d'introduire le maximum d'information a priori sur le signal afin d'améliorer les performances des traitements. Cette information a priori peut être des propriétés de cyclostationnarité [18] ou encore l'utilisation de statistiques d'ordre supérieur à deux pour des signaux non gaussiens [17].

Plus récemment, plusieurs articles ont analysés les caractéristiques de signaux aléatoires complexes non circulaires [1] [2] [5].

Nous présentons dans cet article une méthode permettant d'introduire cette caractéristique dans les techniques de traitement d'antenne. L'algorithme utilisé pour présenter cette extension est MUSIC mais l'approche utilisée ici peut être généralisée à d'autres algorithmes.

Dans le chapitre (2), nous rappelons les caractéristiques des signaux non circulaires. Le chapitre (3) présente l'extension

de l'algorithme MUSIC à de tels signaux. Cette extension est ensuite illustrée par des simulations montrant ses principales caractéristiques. On peut citer comme avantages liés à cette extension, l'augmentation du nombre de sources identifiables, la diminution de la variance d'estimation et l'amélioration de la résolution.

2. signaux non circulaires

L'objet de cette partie est de rappeler (brièvement) les principales caractéristiques des signaux non circulaires que nous utiliserons par la suite. Précisons dès maintenant que nous ne nous intéresserons pas à des statistiques d'ordre supérieur à 2. Les définitions et propriétés rappelées ici se limiteront donc à l'ordre 2. De plus, les notations utilisées dans ce document sont T pour *transposé*, $*$ pour *conjugué* et H pour *transposé et conjugué*.

L'analyse statistique d'une variable aléatoire Z de dimension M et à valeur complexe nécessite dans le cas général de travailler non seulement sur la variable Z mais aussi sur sa conjuguée Z^* [1]. Cependant, on considère fréquemment que les variables aléatoires que l'on analyse sont circulaires. Cette hypothèse signifie que Z et $Ze^{i\phi}$ ont la même densité de probabilité quelque soit ϕ . On parlera de variables circulaires à l'ordre 2 si Z et $Ze^{i\phi}$ ont les mêmes propriétés statistiques au second ordre. Cela simplifie sensiblement les calculs puisque la matrice (appelée matrice de covariance elliptique dans [3] et matrice de relation dans [7]) définie par $\Gamma_2 = E\{ZZ^T\}$ est nulle. Les caractéristiques statistiques de Z sont résumées (à l'ordre 2) dans $\Gamma_1 = E\{ZZ^H\}$

En traitement d'antenne, la circularité est une propriété qui apparaît naturellement dans l'analyse de signaux à bande étroite, signaux qui comportent souvent une phase aléatoire équirépartie entre 0 et 2π . Elle n'est pas pour autant universelle et l'on trouve de nombreux signaux non circulaires (modulation d'amplitude, modulation binaire de phase, ...).

Nous considérons ici comme non circulaire (sous-entendu à l'ordre 2), des variables aléatoires telles que $E\{ZZ^T\} \neq \mathbf{0}$; ce qui, exprimé en terme de densité de probabilité, signifie qu'il n'existe pas d'angle $\phi \neq k\pi$ tel que Z et $Ze^{i\phi}$ ait la même densité de probabilité [6].

Pour de tels signaux, les traitements mis en œuvre classiquement et n'utilisant que $E\{ZZ^H\}$ sont sous optimaux. Des travaux ont déjà été effectués pour prendre en compte la non circularité des signaux [4], [9] mais aucun ne concerne (à notre connaissance) la localisation angulaire de sources non circulaires. Or, comme nous le verrons dans le § 4 les gains que l'on peut envisager en effectuant une analyse complète (exploitant $E\{ZZ^H\}$ et $E\{ZZ^T\}$) sont significatifs.

3. MUSIC non circulaire

3.1. notation et algorithme classique

Considérons le signal reçu sur une antenne de M capteurs éclairée par P sources :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

avec

- $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$: Observation à l'instant t .
- $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}^{P \times 1}$: Signal émis par les P sources.
- $\mathbf{b}(t) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$: Bruit additif.
- $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{M \times P}$: Matrice de transfert.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_P]$$

$$\mathbf{a}_k^T = [1, e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j\varphi_{M-1}}]$$

- Le signal reçu est à bande étroite autour de ν_0 .

Considérons de plus les hypothèses suivantes :

- $E\{\mathbf{b}(t)\} = \mathbf{0}$ et $E\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{0}$
- $E\{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^H\} = \sigma^2 \mathbf{Id}$ et $E\{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^T\} = \mathbf{0}$
- $E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H\} = \Gamma_1$

La mise en œuvre classique de l'algorithme MUSIC [11] [12] suppose de plus que les P sources sont décorrélées et que l'on a $P < M$.

Pour des signaux gaussiens et circulaires (ie $E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T\} = \mathbf{0}$), toute l'information est contenue dans la matrice interspectrale :

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H\} = \mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{Id} \quad (1)$$

La décomposition en éléments propres de \mathbf{R} permet de séparer deux sous-espaces, sous-espace signal et sous-espace bruit, engendrés respectivement par les P premiers vecteurs propres de \mathbf{R} et par les $M - P$ derniers vecteurs propres de \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}_s^H + \sigma^2\mathbf{U}_b\mathbf{U}_b^H \quad (2)$$

Soit $\mathbf{a}(\theta)$ le vecteur directionnel correspondant au modèle théorique des déphasages sur les différents capteurs pour une source de paramètre θ . Lorsque ce paramètre correspond au paramètre effectif d'une source reçue sur l'antenne, $\mathbf{a}(\theta)$ est orthogonal au sous-espace bruit. L'algorithme MUSIC utilise cette propriété et consiste à tester cette orthogonalité, ce qui revient à maximiser la fonctionnelle suivante :

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{\Pi}_b \mathbf{a}(\theta)} \quad (3)$$

avec :

$$\mathbf{\Pi}_b = \mathbf{U}_b\mathbf{U}_b^H$$

3.2. extension au cas de signaux non circulaires

La matrice interspectrale définie précédemment résume complètement les caractéristiques statistiques du signal reçu lorsque les sources sont gaussiennes circulaires. Cependant, si les signaux émis ne sont pas circulaires, alors :

$$E \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T \right\} = \Gamma_2 \quad (4)$$

En considérant toujours les P sources décorréelées, Γ_1 et Γ_2 sont nulles en dehors de leur diagonales principales. Il est possible d'écrire chaque élément (complexe) de Γ_2 comme étant égal à l'élément correspondant de Γ_1 (réel) multiplié par un terme de module et par un terme de phase. On a alors :

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \mathbf{M} \Phi \quad (5)$$

avec :

$$\bullet \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & m_P \end{bmatrix}$$

$$\bullet \Phi = \begin{bmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & e^{i\phi_P} \end{bmatrix}$$

Il faut donc pour ces signaux prendre en compte non seulement :

$$E \left\{ \mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H \right\}$$

mais aussi :

$$E \left\{ \mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^T \right\}$$

Ceci peut être réalisé en construisant le vecteur $\mathbf{y}_{nc}(t)$:

$$\mathbf{y}_{nc}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t)^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

Avec ce nouveau vecteur observation, il est possible de définir une matrice interspectrale contenant toutes les caractéristiques statistiques du signal reçu :

$$\mathbf{R}_{nc} = E \left\{ \mathbf{y}_{nc}(t)\mathbf{y}_{nc}(t)^H \right\} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{A}^H & \mathbf{A}\Phi\mathbf{M}\Gamma_1\mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}^*\Phi^*\mathbf{M}\Gamma_1\mathbf{A}^H & \mathbf{A}^*\Gamma_1\mathbf{A}^T \end{bmatrix} + \sigma^2\mathbf{Id} \quad (8)$$

\mathbf{R}_{nc} peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{R}_{nc} = \mathbf{A}_{nc}\Gamma_{nc}\mathbf{A}_{nc}^H + \sigma^2\mathbf{Id} \quad (9)$$

avec :

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_1 + \mathbf{M}\Gamma_1}{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\Gamma_1 - \mathbf{M}\Gamma_1}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^*\Phi^* & \mathbf{A}^*\Phi^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

$\mathbf{A}_{nc}\Gamma_{nc}\mathbf{A}_{nc}^H$ est de rang $2P$ et par suite on peut distinguer un sous espace signal et un sous espace bruit engendrés respectivement par les $2P$ premiers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} et par les $2M - 2P$ derniers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc}

L'expression (9) est analogue à l'expression (1) et la localisation angulaire à partir d'un algorithme de type MUSIC ne pose pas de problèmes dès lors que l'on dispose d'un vecteur directionnel, modèle du signal reçu. Nous présentons dans le paragraphe (3.3) un cas particulier de signaux non circulaires pour lesquels le vecteur directionnel se définit simplement.

Notons enfin que cette approche est tout à fait distincte des travaux utilisant les données conjuguées comme par exemple ceux présentés dans [8]. Dans [8], Kundu propose une modification de l'algorithme MUSIC utilisant les données directes et les données conjuguées mais dans le but de limiter les erreurs d'estimation de la matrice interspectrale standard dues à un nombre fini d'observations. Ceci ne concerne pas les signaux non circulaires et ne fait pas intervenir $E \left\{ \mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^T \right\}$ mais $E \left\{ \mathbf{y}(t)^*\mathbf{y}(t)^T \right\}$.

3.3. modulation d'amplitude

Considérons le cas de signaux à moyenne nulle, modulés en amplitude. Le signal $s_p(t)$ émis par la source p s'écrit :

$$s_p(t) = e_p(t)e^{-2i\pi\nu_0 t}$$

Après démodulation et filtrage passe-bas, le signal en bande de base peut s'écrire sous la forme :

$$x_p(t) = e_p(t)e^{i\Psi_p}$$

Ces signaux ne sont évidemment pas circulaires et de plus :

$$E \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H \right\} = \Gamma_1 \quad (12)$$

et

$$E \left\{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T \right\} = \Gamma_1 \Phi \quad (13)$$

$$\text{avec } \Phi = \begin{bmatrix} e^{i2\Psi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i2\Psi_2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & e^{i2\Psi_P} \end{bmatrix}$$

Cet exemple de signaux correspond à la situation pour laquelle $\mathbf{M} = \mathbf{Id}$. Dans ce cas précis, les termes de l'expression (9) se simplifient :

$$\bullet \Gamma_{nc} = \Gamma_1$$

$$\bullet \mathbf{A}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^*\Phi^* \end{bmatrix}$$

Cette situation est particulièrement intéressante puisque la dimension du sous-espace signal est P alors que la dimension de l'observation est $2M$. Compte tenu de la diversité d'antenne, il est alors possible de localiser jusqu'à $2(M - 1)$ sources (à comparer à $M - 1$ sources avec MUSIC standard).

La mise en œuvre de l'algorithme est très similaire à celle de la formulation standard. Après la décomposition en éléments

propres de \mathbf{R}_{nc} , on définit les sous espaces signal et bruit à partir respectivement des P premiers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} et des $2M - P$ derniers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} :

$$\mathbf{R}_{nc} = \mathbf{U}_{s,nc} \mathbf{\Lambda}_{nc} \mathbf{U}_{s,nc}^H + \sigma^2 \mathbf{U}_{b,nc} \mathbf{U}_{b,nc}^H$$

Le vecteur modèle se déduit de l'expression de \mathbf{A}_{nc} :

$$\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}(\theta)^* \cdot e^{2i\Psi} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ce vecteur directionnel dépend de la direction d'arrivée mais aussi de la phase de la source p .

Puisque les vecteurs propres associés au bruit sont orthogonaux à \mathbf{A}_{nc} , on a :

$$\mathbf{U}_{b,nc}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) = 0$$

lorsque θ et Ψ correspondent aux paramètres effectifs d'une source. Ceci conduit donc à la fonctionnelle à maximiser :

$$f(\theta, \Psi) = \frac{1}{\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)^H \mathbf{U}_{b,nc} \mathbf{U}_{b,nc}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)} \quad (15)$$

La fonctionnelle (15) est à deux dimensions. Cependant, pour chaque valeur de θ donnée, il est possible de calculer analytiquement la valeur de Ψ maximisant (15). La maximisation de (15) se réduit donc à la maximisation de la fonctionnelle à une dimension (cf annexe) :

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \Pi_1 \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^T \Pi_2 \mathbf{a}(\theta)^* - 2 \|\mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta)\|} \quad (16)$$

avec

- $\mathbf{a}(\theta)$ vecteur directionnel classique

- $\mathbf{U}_{b,nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$

- $\Pi_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$

- $\Pi_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$

Cette fonctionnelle, sans augmenter exagérément la complexité de l'algorithme MUSIC, permet de prendre en compte les spécificités des signaux non circulaires et les performances de l'estimateur, comme nous le montrons dans le chapitre suivant, en sont significativement améliorées.

4. principales propriétés, illustrations

Cette section illustre les principales caractéristiques de l'algorithme proposé. Ces résultats, non exhaustifs, sont obtenus à partir de simulations. Sauf cas particulier, ces simulations correspondent à la situation suivante :

- Antenne linéaire de 4 capteurs équidistants.
- Distance intercapteurs = $\frac{\lambda}{2}$

- λ : Longueur d'onde du signal à la fréquence de travail.
- Signaux émis : Modulation d'amplitude autour de la fréquence de travail.
- Les P sources sont décorréelées.
- Toutes les sources sont de même puissance et le rapport signal sur bruit est de 20 dB.
- Le bruit additif est blanc spatialement.
- Le nombre de sources est supposé connu.
- La matrice interspectrale globale est estimée à partir de 100 observations.

4.1. nombre de sources

Comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre précédent, le nombre maximal de sources identifiables est égal à $2(M - 1)$. Il est donc possible de localiser plus de sources que de capteurs. Ceci est illustré sur la figure (1). L'antenne est ici constituée de 4 capteurs et 5 sources ont été simulées. Leurs directions d'arrivée sont égales respectivement à -60° , -30° , -10° , 20° et 50° . Comme on peut le constater sur la figure, ces 5 sources sont parfaitement localisées. Ceci serait impossible avec des signaux non circulaires puisque le nombre maximal de sources localisables serait alors égal à 3.

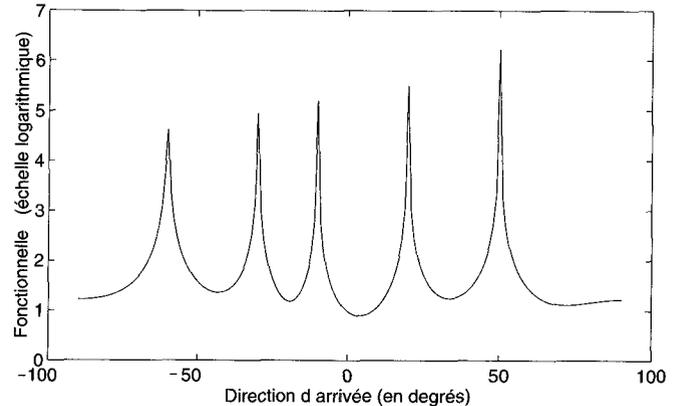


Figure 1. – Localisation de 5 sources à l'aide de 4 capteurs.

4.2. bruiteurs

Un point important concerne le comportement de l'algorithme en présence de sources circulaires, sources que nous appellerons par la suite bruiteurs.

En considérant l'expression de \mathbf{R}_{nc} (9), un bruiteur correspond au cas particulier où $M = 0$. En présence de bruiteurs uniquement, $\mathbf{\Gamma}_{nc}$ s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_1 \end{bmatrix}$$

Il est alors facile de vérifier que la dimension du sous-espace signal, en présence de N bruiteurs, est égale à $2N$. De même, si P sources non circulaires et N bruiteurs sont présents, la dimension du sous espace signal est égale à $P + 2N$.

Cependant, le vecteur modèle $\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)$ est colinéaire au sous-espace signal engendré par les bruiteurs (et donc orthogonal au nouveau sous-espace bruit). La mise en œuvre de la fonctionnelle (16) donne donc encore de bons résultats, sous réserve, évidemment, d'adapter de façon adéquate la dimension du sous-espace signal.

Ceci est illustré sur la figure (2). Une source circulaire (de gisement -30°) et deux sources non circulaires (de gisements 10° et 50°) sont simulées. La dimension du sous-espace signal est ici égale à 4 et les 3 sources sont correctement localisées. On peut noter que dans cette situation (4 capteurs, un bruiteur), il serait possible de localiser au maximum 5 sources non circulaires en plus du bruiteur.

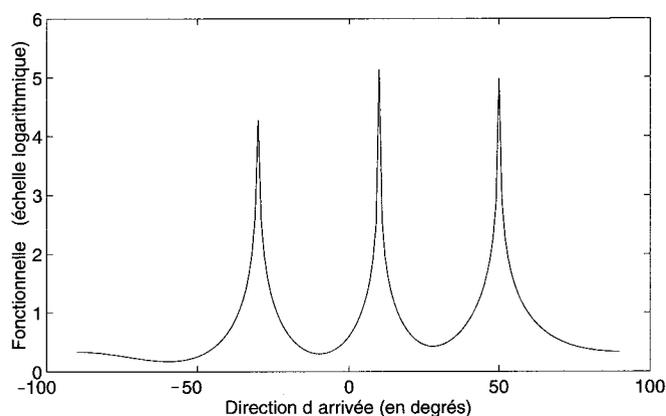


Figure 2. – Localisation de 2 sources non circulaires et d'un bruiteur.

4.3. variance d'estimation

Un autre point particulièrement intéressant de cet algorithme concerne la variance d'estimation des directions d'arrivée. Nous avons en effet constaté sur de nombreuses simulations que la variance d'estimation est plus faible en utilisant l'algorithme MUSIC non circulaire qu'en utilisant l'algorithme MUSIC standard. Ceci est illustré avec les figures (3) et (4).

Deux sources de directions d'arrivée égales à -6° et 0° sont simulées. La figure (3) représente les résultats de MUSIC non circulaire sur 100 réalisations de cette simulation et la figure (4) les résultats de MUSIC standard sur ces mêmes 100 réalisations. Les croix représentent les directions d'arrivée estimées à partir des maxima des deux fonctionnelles.

La variance d'estimation pour MUSIC non circulaire est de l'ordre de 0.03° alors que celle de MUSIC standard est de l'ordre de 0.20° , soit 7 fois plus importante. Ceci se traduit sur les figures par une dispersion très importante des directions d'arrivée estimées par MUSIC standard vis-à-vis de celles estimées par MUSIC non circulaire.

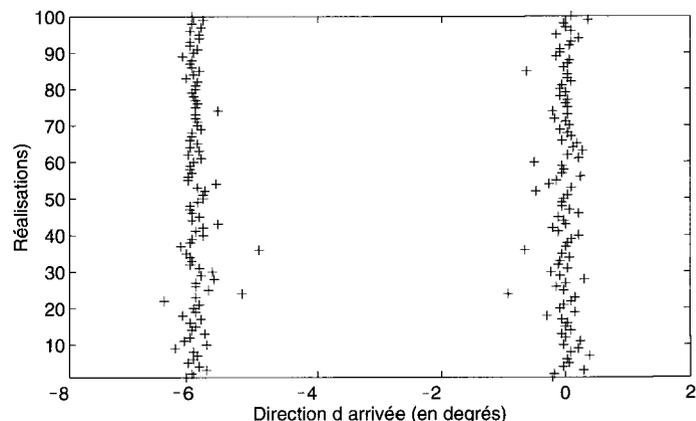


Figure 3. – Localisation avec MUSIC non circulaire.

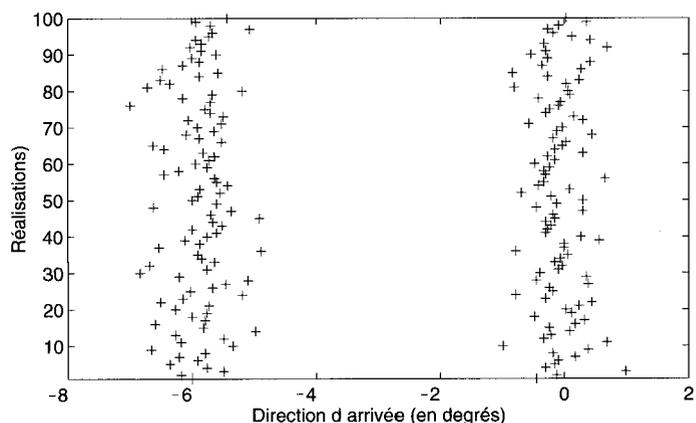


Figure 4. – Localisation avec MUSIC standard.

4.4. résolution

La résolution, de façon similaire à la variance d'estimation, est sensiblement meilleure avec MUSIC non circulaire. Par résolution, on entend ici la capacité de l'algorithme de séparer deux sources proches, cette caractéristique étant liée à la variance d'estimation.

Sur les figures (5) et (6), les deux sources simulées sont localisées à -3° et 0° . Comme pour les figures (3) et (4), 100 réalisations ont été effectuées et les croix représentent les directions d'arrivée estimées à partir des maxima des deux fonctionnelles.

Dans les trois quarts des réalisations, la fonctionnelle de MUSIC standard ne présente qu'un seul maximum et les deux sources ne sont donc pas résolues (figure 6). Par contre, la fonctionnelle de MUSIC non circulaire localise correctement les deux sources dans presque toutes les réalisations (figure 5).

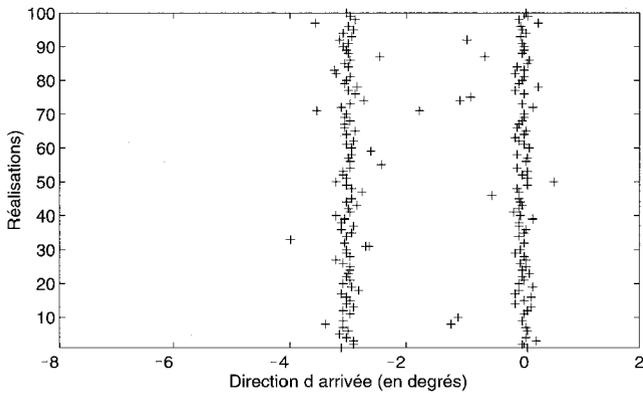


Figure 5. – Localisation avec MUSIC non circulaire.

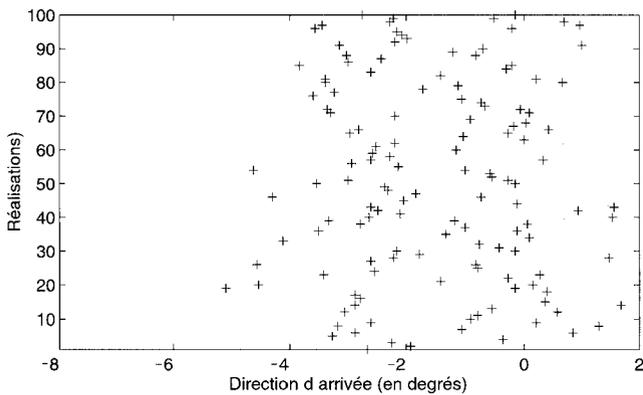


Figure 6. – Localisation avec MUSIC standard.

5. conclusion

Nous avons présenté une approche permettant d'introduire la caractéristique de non circularité de certains signaux dans l'estimation de la localisation angulaire de sources. Les principaux avantages liés à cette introduction concernent le nombre de sources identifiables, la variance d'estimation et la résolution.

L'algorithme utilisé ici est une extension de l'algorithme MUSIC mais d'autres traitements, tel que l'algorithme de Capon ou la formation de voies, pourraient être envisagés à partir de la matrice interspectrale non circulaire.

ANNEXE

L'objet de cette annexe est de calculer, pour une valeur de θ donnée, la valeur de Ψ qui maximise :

$$f(\theta, \Psi) = \frac{1}{\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)^H \mathbf{U}_{b.nc} \mathbf{U}_{b.nc}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)} \quad (17)$$

ou encore qui minimise

$$f(\theta, \Psi) = \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)^H \mathbf{U}_{b.nc} \mathbf{U}_{b.nc}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) \quad (18)$$

avec

- $\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}(\theta)^* \cdot e^{2i\Psi} \end{bmatrix}$
- $\mathbf{U}_{b.nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$

En développant (18), on obtient

$$\hat{\theta}, \hat{\Psi} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}, \Psi \in \mathbb{R}} \left[\mathbf{a}(\theta)^H \Pi_1 \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^T \Pi_2 \mathbf{a}(\theta)^* + 2\Re \{ \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) e^{2i\Psi} \} \right] \quad (19)$$

avec

- $\Pi_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H$
- $\Pi_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H$

Les deux premiers termes de l'expression (19) étant indépendants de Ψ , le minimum de (18) pour une valeur de θ donnée s'obtient en minimisant :

$$\Re \{ \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) e^{2i\Psi} \} \quad (20)$$

Ce minimum est obtenu lorsque :

$$2\Psi = \pi - \text{Phase} \{ \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) \} \quad (21)$$

On a alors $\mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) e^{2i\Psi}$ réel et négatif et

$$\Re \{ \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) e^{2i\Psi} \} = -\| \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) \| \quad (22)$$

La maximisation de (18) revient donc à chercher :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}} \left[\mathbf{a}(\theta)^H \Pi_1 \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^T \Pi_2 \mathbf{a}(\theta)^* - 2\| \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) \| \right] \quad (23)$$

ou à maximiser la fonctionnelle :

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \Pi_1 \mathbf{a}(\theta) + \mathbf{a}(\theta)^T \Pi_2 \mathbf{a}(\theta)^* - 2\| \mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) \|} \quad (24)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Picinbono : "On Circularity", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, n° 12, pp. 3473-3482, December 1994
- [2] B. Picinbono, P. Chevalier : "Widely Linear Estimation with Complex Data", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, n° 8, pp. 2030-2033, August 1995
- [3] P. Duvaut : "Processus et vecteurs complexes elliptiques", Quinzième colloque GRETSI, Juan-Les-Pin, pp. 129-132, Septembre 1995
- [4] P.O. Amblard, P. Duvaut : "Filtrage adapté dans le cas gaussien complexe non circulaire", Quinzième colloque GRETSI, Juan-Les-Pin, pp. 141-144, Septembre 1995
- [5] P.O. Amblard, M. Gaeta, J.L. Lacoume : "Statistics for complex variables and signals - Part I : Variables", *Signal Processing*, vol. 53, n° 1, pp. 1-13, August 1996
- [6] P. Marchand, P.O. Amblard, J.L. Lacoume : "Statistiques d'ordre supérieur à deux pour des signaux cyclostationnaire à valeurs complexes", Quinzième colloque GRETSI, Juan-Les-Pin, pp. 69-72, Septembre 1995

- [7] B. Picinbono : "Systèmes linéaires au sens large en traitement statistique du signal", Quinzième colloque GRETSI, Juan-Les-Pin, pp. 165-168, Septembre 1995
- [8] D. Kundu : "Modified MUSIC algorithm for estimating DOA of signals", *Signal Processing*, vol. 48, n°1, pp. 85-90, January 1996
- [9] P. Chevalier : "Optimal invariant and widely linear spatial filtering for radiocommunications", *EUSIPCO-96*, Trieste, September 1996
- [10] H.Krim, M. Vitberg : "Two Decades of Array Signal Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 67-94, July 1996
- [11] G. Bienvenu, L. Kopp : "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach", *IEEE ASSP*, vol. 31, n° 5, pp. 1235-1247, October 1983
- [12] R. O. Schmidt : "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *IEEE ASSP*, vol. 4, n° 3, pp. 273-280, 1983
- [13] S. Haykin : "Array Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985
- [14] T.J. Shan, M. Wax, T. Kailath : "On Spatial Smoothing for Direction-of-Arrival Estimation of Coherent Signals", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 33, n° 4 pp. 806-811, August 1985
- [15] M. Wax, T.J. Shan, T. Kailath : "Spatio-Temporal Spectral Analysis by Eigenstructure Methods", *IEEE trans. on ASSP*, ASSP-32, August 1984
- [16] H. Hung, M. Kaveh : "Focussing Matrices for Coherent Signal-Subspace Processing", *IEEE trans. on ASSP*, ASSP-36, pp. 1272-1281 August 1988
- [17] Chen, Y.S. Lin : "DAO estimation by fourth-order cumulant in unknown noise environment", *Proc. IEEE ICASSP*, vol. 4, pp. 296-299, Minneapolis, April 1993
- [18] W.A. Gardner : "Simplification of MUSIC and ESPRIT by Exploitation of Cyclostationarity" *Proc. of IEEE*, vol. 76, n° 7, pp. 845-847, 1988

Manuscrit reçu le 26 novembre 1996.

LES AUTEURS

Patrick GOUNON



Patrick Gounon est docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble. Depuis 1991, il est maître de conférence à l'ENSIEG où il enseigne le traitement du signal. Ses travaux de recherche concernent le traitement d'antenne et l'acoustique sous marine.

Jérôme GALY

Jérôme Galy, 27 ans, est actuellement en thèse de l'université Paul Sabatier de Toulouse. Ingénieur électronique ENAC (Ecole Nationale d'Aviation Civile) et titulaire du DEA traitement du signal en 1993, il prépare sa thèse sur l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur pour l'antibrouillage d'antenne satellite au sein du Laboratoire Avionique et Systèmes de l'ENSICA (Ecole nationale Supérieure d'Ingénieurs en Construction Aéronautiques) de Toulouse et du service Algorithmie Nouveaux Concepts (RD/RAN) de Thomson-Csf Airays.

C. ADNET



Claude Adnet a soutenu une thèse de doctorat, en traitement du signal en octobre 1990, à l'INPG (CEPHAG). Depuis 1992 il est ingénieur à Thomson/CSF/AIRSYS/RD filière algorithmie et nouveaux concepts.