

Le calcul des spectres de puissance des processus à caractère cyclostationnaire

Calculation of Power Spectra for Processes with Cyclostationary Characteristics

par Bernard LACAZE

ENSEEIH/GAPSE
2, rue Charles Camichel
F-31071 Toulouse cedex

résumé et mots clés

Les transmissions codées se font, la plupart du temps, à l'aide de processus pilotés par une horloge périodique. On donne les hypothèses minimales permettant d'obtenir un calcul simple et général du spectre de puissance du processus stationnarisé.

Spectres de puissance, Cyclostationnarité, Codage.

abstract and key words

Modulated transmission is most often achieved by the application of a periodic function. This paper gives the minimum hypotheses allowing a simple and general calculation of the spectrum of the stationarized signal.

Power spectrum, Cyclostationarity, Coding.

1. introduction

De nombreux modèles utilisés dans les systèmes de télécommunication ont un caractère cyclostationnaire dès lors qu'ils sont pilotés par une horloge périodique. C'est le cas du PAM (Pulse-Analog Modulation), du PWM (Pulse-Width Modulation), du PPM (Pulse-Point Modulation) et, en général, des PCM (Pulse-Code Modulation). Les versions stationnarisées de ces processus possèdent un spectre de puissance qui est rarement calculé analytiquement, même dans des ouvrages de base tels que [1], [2], [3], [4]. Quand ils le sont, c'est cas par cas et avec des hypothèses restrictives (d'indépendance notamment des « motifs »). Des articles récents illustrent parfaitement cette thèse [5], [6]. Les hypothèses prises dans ces articles peuvent être simplifiées, à condition de prendre suffisamment en compte les propriétés de périodicité statistique propres à ces processus.

Bien entendu, les résultats bruts obtenus sont connus. Le seul but de cet article est de donner une méthode de calcul générale et optimale et de dégager clairement les conditions minimales permettant d'appliquer cette méthode.

Dans le paragraphe 2, on donne les hypothèses de base caractérisant les processus évoqués plus haut (PAM, PWM, ...). Pour fixer les idées, chacun des processus cités est illustré par une figure, qui en montre une réalisation partielle.

Les deux paragraphes suivants seront consacrés au calcul des fonctions d'autocorrélation et du spectre de puissance.

Enfin, on appliquera les formules obtenues à divers cas particuliers. Pour simplifier l'écriture, la période d'horloge a été prise égale à 1. La transformation des formules obtenues, dans le cas où elle est différente de 1, est triviale.

2. hypothèses

2.1. Les processus étudiés relèvent du modèle suivant :

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(t-n) \quad (1)$$

où les fonctions aléatoires $A_n(t)$ sont réelles ou complexes, continues en moyenne quadratique, et vérifient les hypothèses suivantes :

Calcul des spectres de puissance

$$H_1 \quad A_n(u) = 0 \quad \forall u \notin [0, 1[$$

$$H_2 \quad E[A_n(t)] = \alpha(t)$$

est une quantité indépendante de n (et bien sûr nulle à l'extérieur de $[0, 1[$).

$$H_3 \quad \text{Cov}(A_m(u), A_{m+n}(v)) = E[A'_m(u) A_{m+n}^*(v)] = \beta_n(u, v)$$

où $A'_m(u) = A_m(u) - \alpha(u)$.

est une quantité indépendante de m (et bien sûr nulle si u ou v n'appartient pas à $[0, 1[$).

$$H_4 \quad \beta_n(u, v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

la convergence étant uniforme en (u, v) .

L'hypothèse H_1 indique que, dans la somme (1), et à un instant t donné, un seul terme est susceptible d'être non nul. D'ailleurs, cette hypothèse autorise l'écriture simplifiée :

$$Z(t) = A_{\bar{t}}(\underline{t}) \quad (2)$$

où $t = \bar{t} + \underline{t}$, \bar{t} étant la partie entière de t (l'entier le plus proche inférieur ou égal à t) et \underline{t} sa partie fractionnaire. Cette écriture permet une simplification des calculs car elle supprime notamment les sommations multiples.

Les hypothèses H_2 et H_3 donnent au processus $Z(t)$ son caractère cyclostationnaire.

En effet, elles impliquent la périodicité par rapport à t des quantités suivantes :

$$E[Z(t)] = E[A_{\bar{t}}(\underline{t})] = \alpha(\underline{t})$$

$$\begin{aligned} E[Z(t)Z^*(t-\tau)] &= E[A_{\bar{t}}(\underline{t})A_{\bar{t}-\tau}^*(\underline{t}-\tau)] \\ &= \beta_{\bar{t}-\tau-\bar{t}}(\underline{t}, \underline{t}-\tau) - \alpha(\underline{t})\alpha^*(\underline{t}-\tau) \end{aligned}$$

L'hypothèse H_4 exprime le fait que la corrélation entre les « motifs » $A_m(u)$ et $A_n(v)$ devient d'autant plus faible qu'ils sont éloignés dans le temps. C'est une hypothèse beaucoup plus faible que l'indépendance qui est, la plupart du temps, prise en compte dans la littérature.

Comme on le remarquera, elle ne complique pas les formules générales données dans les paragraphes suivants.

2.2. On définit les transformées de Fourier suivantes :

$$\begin{cases} a(\omega) = \int_0^1 \alpha(u) e^{-i\omega u} du \\ B_n(\omega) = \int_0^1 A_n(u) e^{-i\omega u} du - a(\omega) = \int_0^1 A'_n(u) e^{-i\omega u} du \end{cases} \quad (3)$$

La continuité par morceaux de $\alpha(u)$ et la continuité en moyenne quadratique de $A_n(u)$ suffisent à assurer l'existence de ces quantités. On notera que :

$$E[B_n(\omega)] = 0 \quad (5)$$

$$E[B_m(\omega)B_{m+n}^*(\omega)] = \iint_{(0,1)^2} \beta_n(u, v) e^{i(v-u)\omega} dudv \quad (6)$$

Cette dernière quantité est indépendante de l'indice m d'après H_3 et tend (uniformément) vers 0 d'après H_4 , lorsque n va à l'infini.

3. la fonction d'autocorrélation

3.1. version stationnarisée de $Z(t)$

Φ étant une v.a. uniformément répartie sur $[0, 1[$ indépendante des $A_n(u)$, une version stationnarisée $U(t)$ de $Z(t)$ est définie par ($t = \bar{t} + \underline{t}$) :

$$U(t) = Z(t + \Phi) = A_{\bar{t}+\Phi}(\underline{t} + \Phi) \quad (7)$$

La moyenne, la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance calculés dans la suite sont ceux de $U(t)$. Les spectres de puissance de $Z(t)$ et de $U(t)$ sont identiques dans la mesure où la puissance (dans une bande) est définie comme une moyenne temporelle prise (théoriquement) sur un temps infini. Un changement de phase (constant sur chaque réalisation) n'a pas d'influence sur cette moyenne. D'autre part, si l'on choisit une phase uniformément répartie, c'est pour deux raisons. La première, c'est qu'elle stationnarise le processus et, ainsi, qu'elle permet de considérer le spectre de puissance comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. La seconde raison est que la loi uniforme est, parmi les lois qui stationnarisent le processus, celle qui conduit aux calculs les plus simples.

Rappelons que : $t = \bar{t} + \underline{t}$, où \bar{t} est la partie entière de t . Tout d'abord, on peut écrire :

$$E[A_{\bar{t}+\Phi}(\underline{t} + \Phi) | \Phi = \varphi] = E[A_{\bar{t}+\varphi}(\underline{t} + \varphi)] = \alpha(\underline{t} + \varphi) \quad (8)$$

ce qui serait faux (évidemment) sans l'hypothèse d'indépendance entre Φ et les $A_n(u)$. En conséquence :

$$E[U(t)] = E[E(U(t) | \Phi)] = \int_0^1 \alpha(\underline{t} + \varphi) d\varphi \quad (9)$$

d'après (8) et puisque la densité de probabilité de Φ est 1 sur $(0, 1)$ et 0 ailleurs.

\underline{u} étant la partie fractionnaire de u , notons que $\alpha(\underline{u})$ est une fonction périodique de période 1 (puisque $\underline{u+1} = \underline{u}$). Donc, dans (9), on peut remplacer $\underline{t} + \varphi$ par φ (puis φ) sans changer les bornes de l'intégrale :

$$E[U(t)] = \int_0^1 \alpha(\varphi) d\varphi = a(0) \quad (10)$$

Cet argument concernant la périodicité sera constamment repris dans la suite.

3.2. De même :

$$E[U(t)U^*(t-\tau)] = \int_0^1 E \left[A_{t+\varphi}(t+\varphi) A_{t+\varphi-\tau}^*(t+\varphi-\tau) \right] d\varphi \quad (11)$$

Lorsque l'on change φ en $\varphi+1$, $t+\varphi$, $t+\varphi-\tau$, et $t+\varphi-\tau-\overline{t+\varphi}$ ne changent pas. En conséquence, d'après H_3 , la quantité dans l'intégrale (11) est périodique en φ de période 1; en posant $t+\varphi = u$ et sans changer les bornes d'intégration, (11) devient :

$$K_U(\tau) = \int_0^1 E [A_0(u) A_{u-\tau}^*(u-\tau)] du \quad (12)$$

quantité où n'apparaît plus t ; ou encore, avec les notations utilisées dans H_2 et H_3 (paragraphe 2.1) :

$$K_U(\tau) = \int_0^1 [\beta_{u-\tau}(u, u-\tau) + \alpha(u)\alpha^*(u-\tau)] du \quad (13)$$

(10) et (12) montrent notamment que $U(t)$ est bien stationnaire (au sens large).

Pour pouvoir associer à $K_U(\tau)$ un spectre de puissance $S_U(\omega)$ tel que :

$$K_U(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} dS_U(\omega) \quad (14)$$

il est nécessaire et suffisant (th. Bochner-Khinchine) que $K_U(\tau)$ soit continue, ce qui sera toujours le cas pratiquement.

4. le spectre de puissance

4.1. (13) se décompose sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_U(\tau) = K_1(\tau) + K_2(\tau) \\ K_1(\tau) = \int_0^1 \alpha(u) \alpha^*(u-\tau) du \\ K_2(\tau) = \int_0^1 \beta_{u-\tau}(u, u-\tau) du \end{array} \right. \quad (15)$$

$K_1(\tau)$ est périodique, de période 1, et $K_2(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ (H_4). $K_1(\tau)$ fournit le spectre de raies de $U(t)$ et $K_2(\tau)$ le spectre de bande. $K_1(\tau)$ est un produit de convolution. A condition que α soit

suffisamment régulière (par exemple L^2), on peut lui appliquer l'identité de Parseval des séries de Fourier sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a(2\pi k)|^2 e^{2i\pi k\tau} \\ a(\omega) = \int_0^1 \alpha(u) e^{-i\omega u} du \end{array} \right. \quad (16)$$

d'où le « spectre de raies » de $U(t)$:

$$s_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a(2\pi k)|^2 \delta(\omega - 2\pi k) \quad (17)$$

On notera que $s_1(\omega)$ ne dépend que du moment d'ordre 1 du « motif » $A_n(u)$, et ne dépend pas notamment des liaisons éventuelles entre les divers « motifs » (qui sont caractérisés par la suite de fonctions $\beta_n(u, v)$).

4.2. D'après H_4 , $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_2(\tau) = 0$; la composante correspondante $S_2(\omega)$ du spectre de puissance $S_U(\omega)$ de $U(t)$ est donc continue [7, p. 20]. En revenant aux variables aléatoires, (15) s'écrit :

$$K_2(\tau) = E \left\{ \int_0^1 A'_0(u) A_{u-\tau}^* du \right\}$$

où $A'_n(u) = A_n(u) - \alpha(u)$ est une quantité nulle à l'extérieur de $[0, 1]$; on a encore :

$$K_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} A'_0(u) A_n^*(u-\tau-n) du \right\} \quad (18)$$

Les expressions entres $\{ \}$ sont des produits de convolution. Si l'on suppose que l'on peut appliquer la formule de Parseval de la transformation de Fourier, à chacune des intégrales, (18) s'écrit, en utilisant (4), c'est-à-dire la relation $B_n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_n(u) e^{-i\omega u} du$:

$$K_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} B_0(\omega) B_n^*(\omega) e^{i\omega(\tau+n)} d\omega \right\}$$

soit :

$$K_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E (B_0(\omega) B_n^*(\omega)) e^{i\omega(\tau+n)} d\omega$$

d'où le spectre de puissance $S_2(\omega)$ associé à $K_2(\tau)$ défini par sa densité $s_2(\omega) = S_2'(\omega)$:

Calcul des spectres de puissance

$$s_2(\omega) = \frac{dS_2}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[B_0(\omega) B_n^*(\omega)] e^{+i\omega n} \quad (19)$$

où (6) :

$$E(B_0(\omega) B_n^*(\omega)) = \iint_{(0,1)^2} \beta_n(u, v) e^{i(v-u)\omega} dudv$$

Lorsque les « motifs » $A_n(u)$ sont liés, il en est de même de leurs transformées de Fourier $B_n(\omega)$, et la somme (19) n'a aucune raison de se simplifier. C'est le cas des codes AMI, Miller,...

4.3. remarque

Lorsque les motifs $A_n(u)$ sont non corrélés, il en est de même des transformées de Fourier $B_n(\omega)$. Dans ce cas, (18) ne comporte qu'un terme non nul et se simplifie de façon que :

$$s_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} E(|B_0(\omega)|^2)$$

d'où, dans ce cas :

$$\begin{cases} s(\omega) = \frac{1}{2\pi} E(|B_0(\omega)|^2) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a(2\pi k)|^2 \delta(\omega - 2\pi k) \\ a(\omega) = \int_0^1 E(A_0(u)) e^{-i\omega u} du \\ E(|B_0(\omega)|^2) = \iint_{(0,1)^2} e^{i(v-u)\omega} \text{Cov}(A_0(u), A_0(v)) dudv \end{cases} \quad (20)$$

5. exemples

5.1. PAM (Pulse Amplitude Modulation), biphasé, ASK, PSK, ..., AMI

a) Dans ces divers cas, on a :

$$A_n(u) = C_n f(u)$$

$$E(C_n) = m$$

$$\text{Cov}(C_\ell, C_{\ell-n}) = \rho_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n} s'(\omega) d\omega$$

$f(u)$ est une fonction définie sur $(0, 1)$.

$$\text{Soit : } F(\omega) = \int_0^1 e^{-i\omega u} f(u) du.$$

$F(\omega)$ est la transformée de Fourier du motif $f(u)$, $s'(\omega)$ le spectre de puissance de la suite stationnaire (au sens large) $\{C_n - m, n \in \mathbb{Z}\}$ (th. d'Herglotz, [8, p. 474]). Inversement, on a :

$$s'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \rho_n e^{-i\omega n}$$

On a donc, immédiatement :

$$\begin{cases} a(\omega) = mF(\omega) \\ s_1(\omega) = |m|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F(2\pi k)|^2 \delta(\omega - 2\pi k) \end{cases}$$

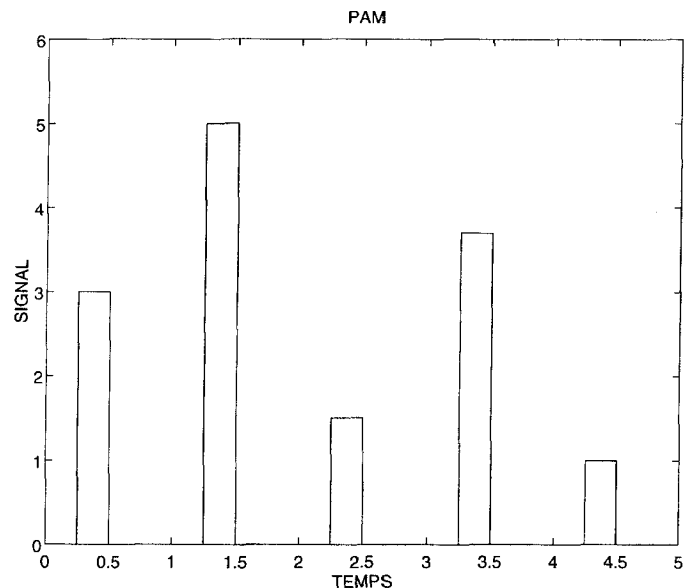
et :

$$\begin{cases} B_n(\omega) = (C_n - m) F(\omega) \\ E[B_0(\omega) B_n^*(\omega)] = \rho_{-n} |F(\omega)|^2 \\ s_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho_{-k} e^{+i\omega k} \end{cases}$$

d'où : $s_2(\omega) = |F(\omega)|^2 s'(\omega)$.

b) Dans le cas du PAM [1, p. 70], on prend :

$$f(u) = \begin{cases} 1 & u \in [0, h[\\ 0 & u \notin [0, h[\quad 0 < h < 1 \end{cases}$$



$$f(u) = \begin{cases} 1 & u \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & u \notin \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$C_0 = 3, \quad C_1 = 5, \quad C_2 = 1.5, \quad C_3 = 3.7, \quad C_4 = 1$$

$$F(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega h}}{i\omega} \quad F(0) = h$$

d'où

$$\begin{cases} s_1(\omega) = |m|^2 \left(h^2 \delta(0) + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\sin \pi k h}{\pi k} \right)^2 \delta(\omega - 2\pi k) \right) \\ s_2(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega/2} \right)^2 s'(\omega) \end{cases}$$

Notons que $s'(\omega)$ est dans cette formule une fonction périodique de période 2π (constante lorsque les C_n sont non corrélés). Rappelons que le fait de lier les C_n ne change en rien le spectre de raies $s_1(\omega)$. Enfin, les v.a. ne sont pas obligatoirement discrètes comme dans les exemples qui suivent.

c) Dans le cas du biphasé (ou code Manchester) [12, p. 157], on prend :

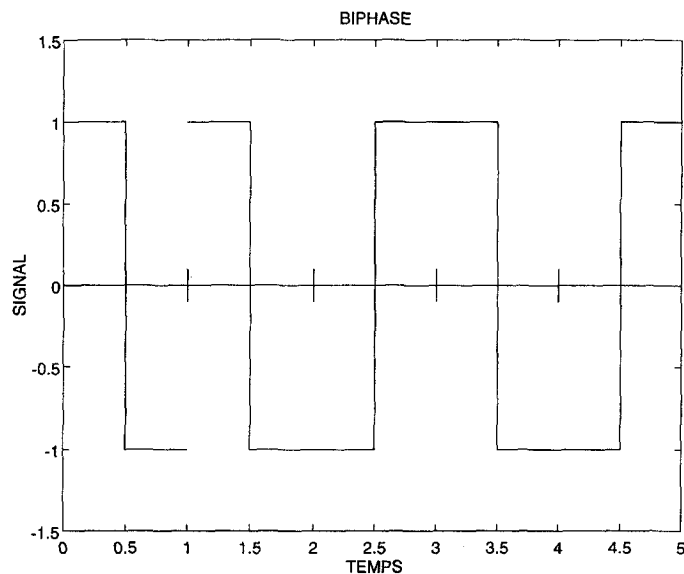
$$f(u) = \begin{cases} 1 & u \in (0, 1/2) \\ -1 & u \in (1/2, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P[C_n = 1] = p \\ P[C_n = -1] = 1 - p = q \end{cases}$$

On en déduit, sans effort (pour des C_n non corrélés);

$$s_1(\omega) = \frac{4(2p-1)^2}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \delta(\omega - 2(2k+1)\pi)$$

$$s_2(\omega) = \frac{1 - (2p-1)^2 \sin^4(\omega/4)}{2\pi (\omega/4)^2}$$



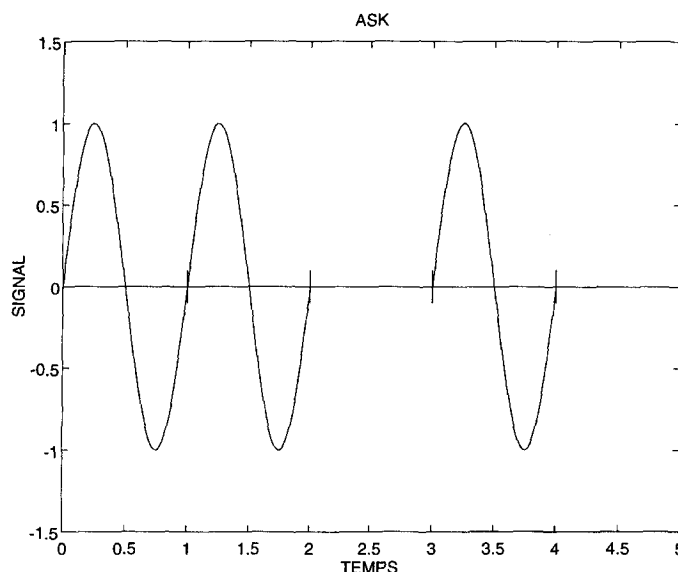
$$f(u) = \begin{cases} 1 & u \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & u \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1, C_4 = -1$$

Les codes RZ et NRZ [12, p. 157], sont du même type que le biphasé (ils sont binaires) tout en ayant une occupation spectrale moins favorable.

d) Dans le cas du code binaire ASK (Amplitude Shift Keying), on prendra :

$$\begin{cases} f(u) = \sin 2\pi \ell u & \ell \in N^* \\ C_n = 0 \text{ ou } 1 \text{ avec probabilité } p \text{ et } 1-p \end{cases}$$



$$f(u) = \sin 2\pi u \quad (l = 1)$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0$$

Pour le code binaire PSK (Phase Shift Keying) [2, p. 80] :

$$\begin{cases} f(u) = \sin 2\pi \ell u & \ell \in N^* \\ C_n = 1 \text{ ou } -1 \text{ avec probabilité } p \text{ et } 1-p \end{cases}$$

Les formules (16) et (19) s'appliquent sans difficulté. Pour des C_n non corrélés, on obtient :

$$\begin{cases} s_1(\omega) = \frac{m^2}{4} (\delta(\omega - 2\pi \ell) + \delta(\omega + 2\pi \ell)) \\ s_2(\omega) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\pi \ell}{\omega^2 - 4\pi^2 \ell^2} \right)^2 \sin^2(\omega/2) \end{cases}$$

e) Le code AMI (Alternate Mark Inversion) [13, p. 100] appartient à la même catégorie. C'est un code ternaire (les valeurs prises sont $-1, 0, 1$) où :

$$f(u) = 1 \quad u \in (0, 1)$$

$$C_n = D_n \left[2 \left(\sum_{k=0}^n D_k \right)_{\text{mod } 2} - 1 \right] \quad n \geq 0$$

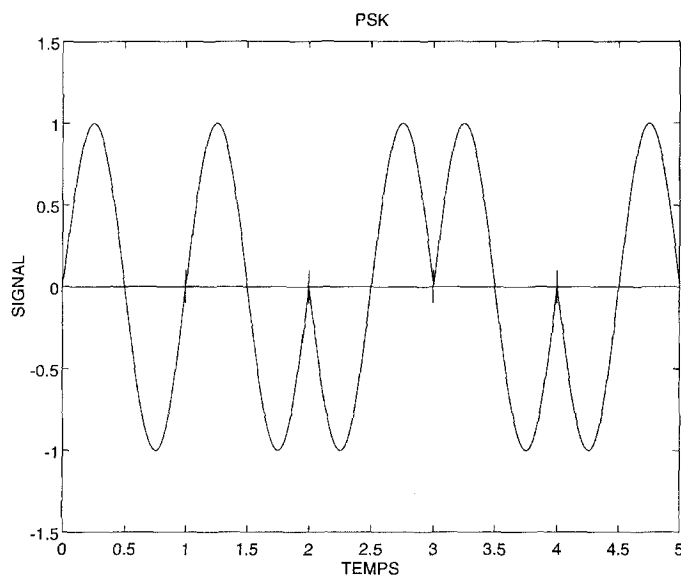
Calcul des spectres de puissance

Les D_n sont des v.a. (indépendantes) prenant les valeurs 1 et 0 avec probabilité 1/2. La définition se complète sans difficulté pour les $n < 0$. Bien entendu, les C_n sont des v.a. non indépendantes.

Dans ce cas, on obtient :

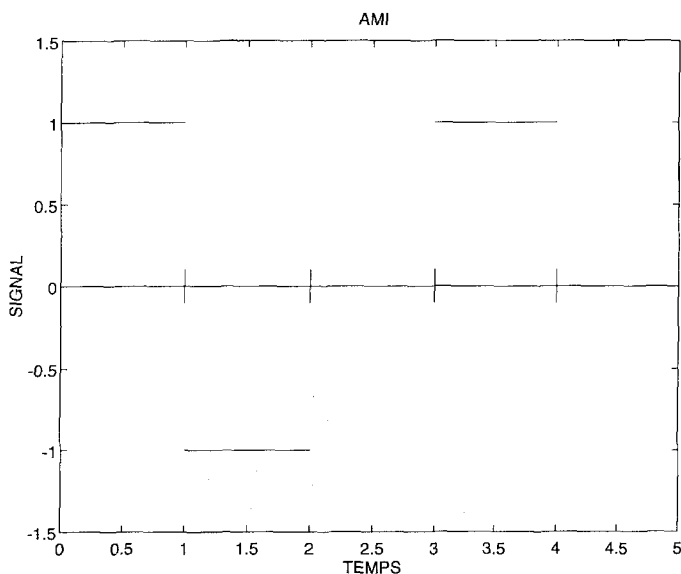
$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^4(\omega/2)}{(\omega/2)^2}$$

En changeant f , on obtient des codes ternaires plus généraux [11, p. 41].



$$f(u) = \sin 2\pi u \quad (l=1)$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1, C_4 = -1$$



$$f(u) = 1 \quad u \in (0, 1)$$

$$D_0 = 1, D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = 0$$

$$C_0 = 1, C_1 = -1, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0$$

5.2. PWM (ou PDM : Pulse Width Modulation ou Pulse Duration Modulation)

Dans ce cas, [12, p. 222] :

$$\begin{cases} A_n(u) = 1 & \text{pour } 0 \leq u < C_n \\ A_n(u) = 0 & \text{pour } u \geq C_n \end{cases}$$

où les v.a. $C_n, n \in \mathbb{Z}$, constituent une suite des v.a. réelles stationnaires (d'ordre 2 au sens strict) caractérisée par les lois de probabilité à une et deux dimensions, d'où l'on tire les quantités :

$$\begin{cases} \alpha(u) = P[C_n > u] \\ \beta_n(u, v) = P[C_m > u, C_{m+n} > v] - \alpha(u)\alpha(v) \end{cases}$$

avec $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(1) = 0$ (c'est-à-dire que les $C_n \in [0, 1]$).

Ces quantités permettent de calculer (3) et (6) et d'en déduire le spectre de puissance à l'aide de (17) et (19).

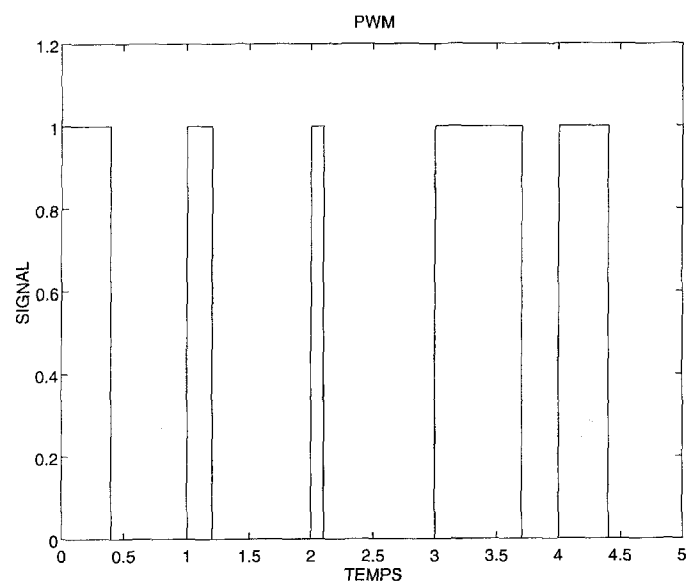
Par exemple, lorsque les $C_n, n \in \mathbb{Z}$, sont des v.a. indépendantes, uniformément réparties sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \alpha(u) = 1 - u & u \in (0, 1) \\ \beta_n(u, v) = 0 & n \neq 0 \\ \beta_0(u, v) = 1 - \sup(u, v) - (1 - u)(1 - v) & u \text{ et } v \in (0, 1) \end{cases}$$

d'où :

$$E[B_0(\omega)B_n^*(\omega)] = 0 \quad n \neq 0$$

$$E[|B_0(\omega)|^2] = \frac{1}{\omega^2} - \frac{4}{\omega^4} \sin^2(\omega/2)$$



$$C_0 = 0.4, C_1 = 0.2, C_2 = 0.1, C_3 = 0.7, C_4 = 0.4$$

et :

$$\begin{cases} s_1(\omega) = \frac{1}{4}\delta(0) + \sum_{k \neq 0} \frac{\delta(\omega - 2\pi k)}{(2\pi k)^2} \\ s_2(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2} - \frac{2\sin^2(\omega/2)}{\pi\omega^4} \quad \left(s_2(0) = \frac{1}{24\pi} \right) \end{cases}$$

5.3. PPM (Pulse Point Modulation)

a) Le code est défini par [5], [12, p. 222] :

$$A_n(u) = f(u - C_n)$$

où f est une fonction donnée à support étroit (petit devant 1).

Les v.a. C_n prennent un nombre fini de valeurs (ce qui n'a pas d'importance pour le calcul) et définissent la position de « l'impulsion » f dans la période $(n, n + 1)$. Posons :

$$\begin{cases} \psi(\omega) = E [e^{-i\omega C_n}] \\ \varphi_n(\omega) = E [e^{-i\omega(C_0 - C_n)}] \\ F(\omega) = \int_0^1 f(u) e^{-i\omega u} du \end{cases}$$

Alors :

$$a(\omega) = \psi(\omega) F(\omega)$$

$$B_n(\omega) = F(\omega) (e^{-i\omega C_n} - \psi(\omega))$$

d'où :

$$E [B_0(\omega) B_n^*(\omega)] = |F(\omega)|^2 (\varphi_n(\omega) - |\psi(\omega)|^2)$$

On déduit de (17) et (19) :

$$\begin{cases} s_1(\omega) = \sum_k |\psi(2\pi k) F(2\pi k)|^2 \delta(\omega - 2\pi k) \\ s_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 \sum_n e^{i\omega n} (\varphi_n(\omega) - |\psi(\omega)|^2) \end{cases}$$

Dans le cas où les C_n sont indépendants, $s_2(\omega)$ se réduit au terme $n = 0$:

$$s_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} |F(\omega)|^2 (1 - |\psi(\omega)|^2)$$

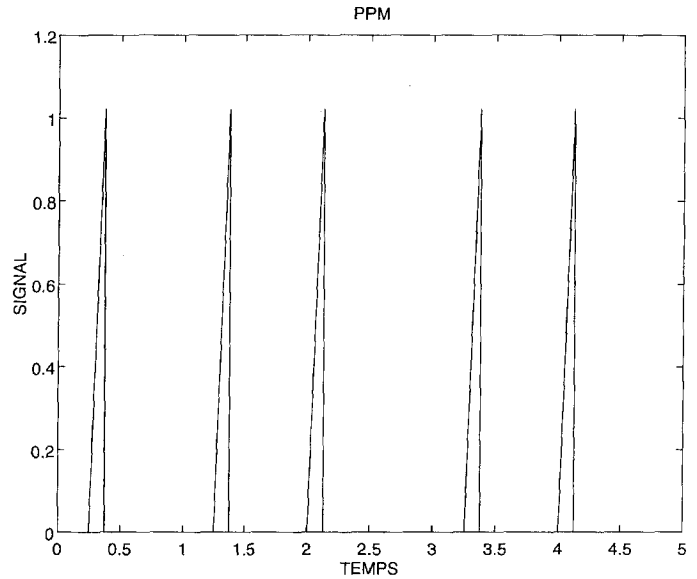
b) Lorsque le processus est affecté d'un jitter [5], [6], représenté par la suite de v.a. $\{D_n, n \in Z\}$ le nouveau processus a la même forme :

$$A_n(u) = f(u - C_n - D_n)$$

la seule différence étant pratiquement que les nouvelles v.a. D_n sont continues. Evidemment, les formules donnant le spectre sont inchangées, avec :

$$\begin{cases} \psi(\omega) = E [e^{-i\omega(C_n + D_n)}] \\ \varphi_n(\omega) = E [e^{-i\omega(C_0 + D_0 - C_n - D_n)}] \end{cases}$$

Ces deux quantités se factorisent lorsque les suites C_n et D_n sont indépendantes.



$$f(u) = \begin{cases} 8u & u \in (0, \frac{1}{8}) \\ 0 & u \notin (0, \frac{1}{8}) \end{cases}$$

$$C_0 = \frac{1}{4}, C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{4}, C_4 = 0$$

5.4. FSK (Frequency Shift Keying) et diverses généralisations

a) Dans le cas du FSK (binaire), on définit deux motifs f et g distincts (en général des sinus ou cosinus de fréquences différentes), tels que :

$$\begin{cases} A_n(u) = f(u) & \text{lorsque } C_n = 1 \\ A_n(u) = g(u) & \text{lorsque } C_n = 0 \end{cases}$$

où la suite $\{C_n, n \in Z\}$ est stationnaire, caractérisée par les probabilités suivantes :

$$P[C_n = 1] = p \quad P[C_0 = C_n = 1] = r_n$$

$$P[C_n = 0] = 1 - p = q$$

la suite $\{r_n, n \in Z\}$ définit les liaisons entre les diverses v.a. C_n .

En posant :

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_0^1 f(u) e^{-i\omega u} du \\ G(\omega) = \int_0^1 g(u) e^{-i\omega u} du \end{cases}$$

on obtient : $a(\omega) = p F(\omega) + q G(\omega)$.

Calcul des spectres de puissance

et :

$$B_n(\omega) = \begin{cases} q(F(\omega) - G(\omega)) & \text{lorsque } C_n = 1 \\ p(G(\omega) - F(\omega)) & \text{lorsque } C_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } E[B_0(\omega)B_n^*(\omega)] = |F(\omega) - G(\omega)|^2 (\tau_n - p^2)$$

et :

$$\begin{cases} s_1(\omega) = \sum_k |pF(2\pi k) + qG(2\pi k)|^2 \delta(\omega - 2\pi k) \\ s_2(\omega) = |F(\omega) - G(\omega)|^2 s'(\omega) \end{cases}$$

$s'(\omega)$ étant le spectre de puissance (périodisé) de la suite de v.a. $\{C_n - p, n \in \mathbb{Z}\}$.

Notons que le modèle du § 5.1 est un cas particulier, lorsque les v.a. qui interviennent prennent deux valeurs (comme dans le biphase).

b) Evidemment, le FSK (binaire) se généralise facilement à m « motifs » (la plupart du temps, m est une puissance de 2). Dans ce cas, on posera :

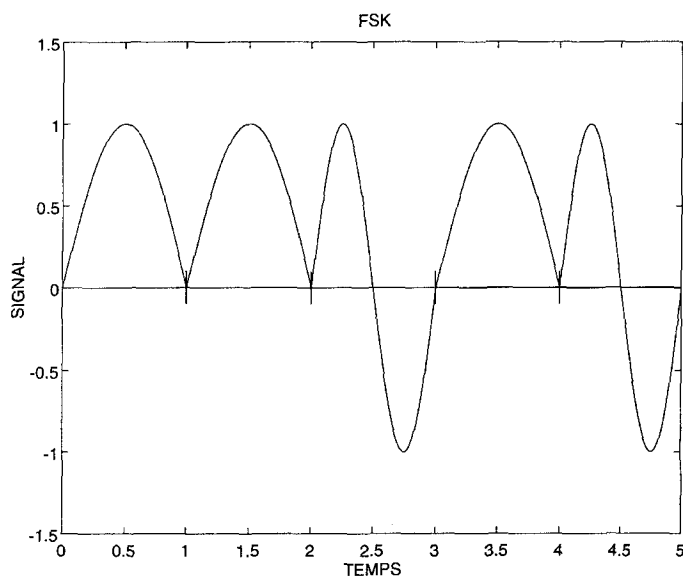
$$A_n(u) = f_\ell(u) \text{ lorsque } C_n = \ell$$

où les v.a. C_n prennent les valeurs $1, 2, \dots, m$ et les $f_j, j = 1, 2, \dots, m$ étant les divers motifs.

On trouvera aisément :

$$a(\omega) = \sum_{j=1}^m p_j F_j(\omega)$$

$$E[B_0(\omega)B_n^*(\omega)] = \sum_{j,k=1}^m F_j(\omega)F_k^*(\omega) p_j(p_{jkn} - p_k)$$



$$f(u) = \sin \pi u$$

$$g(u) = \sin 2\pi u$$

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 1, C_4 = 0$$

où :

$$\begin{cases} F_j(\omega) = \int_0^1 f_j(u) e^{-i\omega u} du \\ p_j = P(C_n = j) \\ p_{jkn} = P[C_n = k | C_0 = j] \end{cases}$$

Ce modèle contient un grand nombre de codes, en particulier les codes FSK à phase incohérente aussi bien qu'à phase continue. Par exemple, le code MSK ([1] p. 80 et figure 16 p. 81).

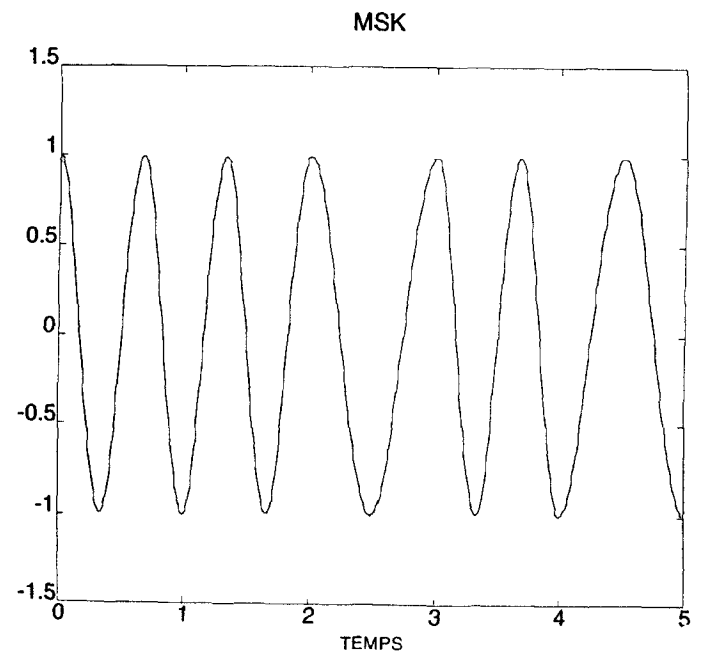
c) Ce code MSK peut être défini de la manière suivante :

$$f_1(u) = -f_2(u) = \cos 3\pi u$$

$$f_3(u) = -f_4(u) = \cos 2\pi u$$

Les v.a. à coder X_n sont indépendantes et prennent les valeurs équiprobables 0 et 1. Si : $K_n = \sum_{k=0}^n X_k$, alors :

$$\begin{cases} A_n(u) = f_1(u) & \text{pour } K_n \text{ pair, } X_n = 1 \\ A_n(u) = f_2(u) & \text{pour } K_n \text{ impair, } X_n = 1 \\ A_n(u) = f_3(u) & \text{pour } K_n \text{ pair, } X_n = 0 \\ A_n(u) = f_4(u) & \text{pour } K_n \text{ impair, } X_n = 0 \end{cases}$$



$$f_1(u) = -f_2(u) = \cos(3\pi u)$$

$$f_3(u) = -f_4(u) = \cos(2\pi u)$$

$$X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0$$

$$C_0 = 1, C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 1, C_4 = 4$$

La suite C_n forme une chaîne de Markov à 4 états (1, 2, 3, 4) de matrice de transition :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

telle que $M^n = E/4$ pour $n \geq 2$ ce qui implique $E[B_0(\omega)B_n^*(\omega)] = 0$ pour $n \geq 2$. Un calcul élémentaire conduit alors à :

$$s(\omega) = \frac{25\pi^3}{2} \frac{\omega^2 \sin^2 \omega}{(\omega^2 - 4\pi^2)^2 (\omega^2 - 9\pi^2)^2}$$

6. conclusion

Les exemples qui sont donnés dans le paragraphe précédent montrent que (presque) tous les processus utilisés dans les télécommunications peuvent être traités dans un cadre unique, dans la mesure où ils sont pilotés par une horloge. On trouvera les graphes des spectres de puissance dans divers ouvrages spécialisés, en particulier [10] et [12]. On aura noté que les calculs peuvent se faire sans les hypothèses habituelles d'indépendance entre les « motifs ». Cette condition n'est pas vérifiée dans la réalité, même dans le cas où les dispositifs de compression de l'information réduisent la redondance dans de grandes proportions. Bien entendu, il serait intéressant de voir pratiquement (par exemple par des simulations) quelle est l'influence réelle des liaisons entre motifs sur la bande occupée par la partie continue du spectre, puisque la partie discrète ne dépend que de la moyenne associée au processus (non stationnarisé).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Encyclopedia of Telecommunications*, Ac. Press, 1989.
- [2] W.A. Gardner, *Introduction to Random Processes with Applications to Signal and Systems*, 2nd ed., McGraw Hill, 1989.
- [3] B. Picinbono, *Signaux aléatoires*, Dunod, 1995.
- [4] J.C. Bic, D. Duponteil, J.C. Imbeaux, *Eléments de communications numériques*, Dunod, 1986.
- [5] J.M.H. Elmirghani, R.A. Cryan and F.M. Clayton, « Spectral characterisation and frame synchronisation of optical fibre digital PPM », *Elec. Lett.*, Vol. 28, n° 16, July 1992, pp. 1482-1483.
- [6] J.M.H. Elmirghani, R.A. Cryan and F.M. Clayton, « Spectral analysis of time jitter effects on the cyclostationary PPM format », *Signal Processing* 43, 1995, pp. 269-277.
- [7] E. Lukacs, *Characteristic functions*, Griffin, 1970.
- [8] J.L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, 1953.
- [9] S. Haykin, *Communications systems*, Wiley, 1983.
- [10] Proakis, *Digital communications*, McGraw Hill, 1983.
- [11] P.J. Wakeling, *Pulse Code Modulation*, Mills and Boon, 1992.
- [12] L.W. Couch II, *Digital and Analog Communication Systems* (4e Ed), MacMillan Pub Company, 1990.
- [13] M. Stein, *Les MODEMS pour la transmission des données*, Masson, 1991.

Manuscrit reçu le 27 Novembre 1995.

L'AUTEUR

Bernard LACAZE



Docteur de 3ème cycle en Electronique (1966). Docteur es Sciences Mathématiques (1971). Professeur des Universités depuis 1975 à l'INSA de Toulouse. Activités de recherche en théorie du signal et en mécanique statistique des gaz.