

Reconstruction d'images astronomiques à partir de séquences à faible flux : étude pour des mouvements gaussiens

Reconstruction of astronomical images from sequences at low photon level: study for Gaussian displacements

par Stéphanie CABANILLAS, Mireille GUILLAUME, et Philippe REFREGIER

Equipe Physique et Traitement de l'Image, Institut Fresnel, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille,
Domaine Universitaire de Saint-Jérôme, 13 397 Marseille cedex 20 France

résumé et mots clés

Nous avons récemment présenté [1] une méthode de reconstruction d'image spatiale dégradée par du flou de bougé à partir d'une séquence d'images acquises à très faible niveau de photons. L'estimation des déplacements du capteur permet de reconstruire une image nette après recalage. Cette méthode, optimale au sens du maximum de vraisemblance (MV), ne prend pas en compte les connaissances *a priori* que l'on peut posséder sur les mouvements du capteur. Nous présentons ici les résultats obtenus en cherchant l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) pour les translations des images de la séquence. Nous avons calculé cet estimateur dans deux situations concrètes, premièrement dans le cas où le mouvement est aléatoire de densité de probabilité gaussienne et non corrélé (d'une image à l'autre de la séquence), et deuxièmement dans le cas où le mouvement est aléatoire, de densité de probabilité gaussienne, et corrélé. Nous précisons dans cet article les conditions expérimentales pour lesquelles la nouvelle approche, qui repose sur l'estimateur du MAP, permet d'obtenir des résultats meilleurs que ceux acquis précédemment avec l'estimateur du MV. Nous présentons des résultats pour des déplacements du capteur de grande ampleur et pour trois images ayant des caractéristiques différentes : deux images du ciel à faible flux utile dont l'une des deux est pauvre en objets et une troisième image d'un groupe d'étoiles, avec des objets plus étalés et un flux utile plus important que dans les images précédentes.

traitement d'image, reconstruction d'images, bruit de poisson, séquence d'images, faible flux, théorie bayésienne de l'estimation, maximum de vraisemblance, maximum *a posteriori*, images astronomiques.

abstract and key words

We have recently presented a method for blurred spatial image reconstruction from a sequence of randomly shifted and very low photon level images. Each image displacement estimation allows one to reconstruct a clean image after matching the sequence. This method, optimal in the Maximum Likelihood (ML) sense, did not take into account the *a priori* knowledge available on sensor movement. We address here the results obtained when calculating the Maximum *a posteriori* estimate for the translations of the sequence images. We calculate the MAP estimate within two situations, when the movement to correct is either Gaussian and non-correlated, or Gaussian and correlated. In this article, we specify the experimental conditions for which the new approach based on MAP estimate allows one to obtain better results than those obtained by the MV one. Furthermore, we present new results for large movements (of 33 pixels standard deviation for 256×256 images), and for three images with different object's size and different background flow : two images of the sky at low photon level, one of which has new objects, and a third image with larger stars and higher photon level than the previous images.

image processing, image reconstruction, Poisson noise, image sequence, low photon, estimation Bayesian theory, maximum likelihood, maximum *a posteriori*, astronomical images.

1. introduction

La déconvolution myope d'images floues et dégradées par du bruit est un problème classique et largement traité, en particulier dans le cadre de l'imagerie astronomique [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] et de l'imagerie médicale [9]. Deux grandes classes de méthodes sont généralement utilisées : les méthodes itératives du type des méthodes de Ayers et Dainty [10], [11], qui sont utilisées pour restaurer des images dégradées par la turbulence atmosphérique, et sont fondées sur la corrélation (interférométrie Speckle, triple corrélation, méthode de Knox-Thompson [2]), et les méthodes d'optimisation numérique sous contrainte [12], [13], [14], [15] pour rechercher un estimateur au sens du MV ou du MAP, à partir d'un modèle décrivant l'image mesurée.

Nous avons récemment présenté [1] une étude pour la reconstruction d'images astronomiques acquises dans le cadre de l'expérience FOCA¹, qui est une mission d'observation du ciel dans l'ultraviolet à partir d'un ballon stratosphérique. Cette méthode est proche des méthodes d'optimisation numérique citées plus haut ; cependant aucune de ces méthodes ne correspond exactement à notre problème, en effet pour nous, l'origine du flou n'est pas la turbulence atmosphérique mais le mouvement du capteur, ce qui conduit à une modélisation différente. Les données FOCA sont acquises par un détecteur de photons embarqué dans la nacelle du ballon stratosphérique. Les photons recueillis aux instants $t = t_0 + n\Delta t$, ($n = 1, 2, \dots$) par le capteur permettent de former une image pendant un temps d'exposition $\Delta t = 20$ ms dans le cas de l'expérience FOCA. On obtient ainsi une séquence d'images à très faible flux (typiquement 100 photons par image), chaque image étant décalée par rapport aux autres en raison du mouvement du capteur. L'image finale est reconstruite par sommation des images de la séquence après correction du mouvement. La détermination des vecteurs de déplacement des images est ainsi prépondérante pour la qualité de l'image reconstruite.

Dans le but de simplifier les calculs, et en accord avec le type d'images observées, nous faisons différentes hypothèses.

- 1) Le bruit présent dans les images est décrit par la loi de Poisson. Nous considérons uniquement la nature discrète du bruit. En particulier, nous ne cherchons pas à corriger la fonction d'étalement des appareils d'optique, celle-ci étant par ailleurs bien connue.
- 2) La scène est invariante pendant la totalité du temps d'acquisition. En effet, la turbulence atmosphérique est négligeable.
- 3) Les images sont périodiques. Cette hypothèse, classique en traitement d'images, permet de s'affranchir des effets de bords qui interviennent lors des translations. De plus elle s'applique bien aux images du ciel considérées dans l'expérience FOCA.
- 4) Les rotations sont négligeables et le mouvement est dû aux seules translations.

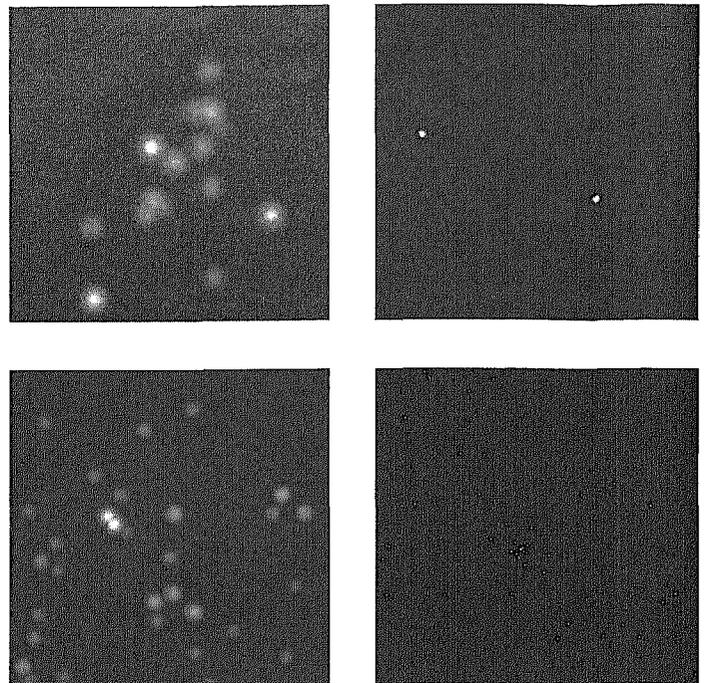


Figure 1. – En haut, images de référence I_1, I_2 (extraction d'une sous-image de taille 256×256 de I_2). En bas, image de référence I_3 et une image bruitée (avec $\lambda = 10^{-4}$ soit avec 31 photons) et décalée d'une séquence créée sur I_3 .

Nous avons utilisé pour les simulations trois images astronomiques qui sont montrées sur la figure 1. Dans l'image I_1 nous considérons un groupe de 15 étoiles (gaussiennes) de largeur à mi-hauteur égale à 5 pixels, dont l'intensité maximale est distribuée suivant une densité de probabilité uniforme, leur position étant répartie autour d'une position moyenne avec une densité de probabilité gaussienne. Dans cette image de taille 256×256 , 61 % en moyenne des photons proviennent du rayonnement diffus du fond du ciel (« bruit de fond »), et 39 % en moyenne des photons proviennent des étoiles (objets). L'image I_2 correspond à la modélisation précise d'images du ciel dans des régions pauvres en objets et à très faible flux utile. Pour cette image de taille 1024×1024 , les étoiles sont positionnées aléatoirement suivant une densité de probabilité uniforme, leur intensité maximale suit une loi exponentielle, et elles ont une largeur à mi-hauteur de 1,8 pixels. Le nombre d'objets est de 150, et dans l'image, 91 % en moyenne des photons sont issus du fond du ciel, alors que 9 % en moyenne sont issus des objets. Cette situation est celle de régions interstellaires observées dans la mission FOCA, mais également dans d'autres missions d'observation à partir d'un capteur embarqué². Nous avons enfin utilisé pour les simulations l'image I_3 . Elle correspond à la modélisation d'images de la voie lactée et à faible flux utile. Pour cette image de taille 256×256 , les étoiles sont positionnées aléatoirement

1. FOcal Corrector Anastigmat, expérience conduite par le CNES

2. Ce type d'images est également observé dans la mission GALEX, Galaxy Evolution Explorer, qui est une mission d'observation spatiale internationale.

suivant une densité de probabilité uniforme, leur intensité maximale suit une loi exponentielle, et elles ont une largeur à mi-hauteur de 3,5 pixels. Le nombre d'objets est de 31, et dans l'image, 65% en moyenne des photons sont issus du fond du ciel, alors que 35% en moyenne sont issus des objets.

Nous utilisons une notation à une dimension pour les images et nous notons $s_p(i)$ la valeur de l'image s_p au pixel i . Cette valeur est égale au nombre de photons mesurés en ce point. Notons $S = (s_1, s_2, \dots, s_p, \dots, s_P)$ la séquence d'images à faible flux. $\mu(i)$ est le flux moyen, c'est à dire l'espérance du nombre de photons mesurés au pixel i divisé par le temps d'exposition Δt d'une image s_p . Le flux de lumière du ciel est supposé constant en chaque point pendant le temps d'observation total ΔT ($\Delta T \approx 15$ mn pour FOCA). A cause de la nature discrète des photo-événements, chaque image à faible flux est bruitée par un bruit de Poisson dont la loi de probabilité s'écrit en chaque pixel (lorsque ces images sont décalées d'une quantité j_p) :

$$P[s_p(i)|\mu(i), j_p] = \exp[-\Delta t \cdot \mu(i - j)] \frac{[\Delta t \cdot \mu(i - j)]^{s_p(i)}}{s_p(i)!} \quad (1)$$

La vraisemblance de la mesure de l'image s_p est

$$\mathcal{L}(s_p, \mu, j_p) = \prod_i P[s_p(i)|\mu(i), j_p].$$

Ainsi l'estimateur j_p^{MV} du maximum de vraisemblance est la valeur de j_p qui optimise cette probabilité.

En réalité, la valeur de $\mu(i)$ est inconnue puisqu'elle est proportionnelle à l'image à estimer. Pour cela nous considérerons la fonction de vraisemblance de la mesure pour l'ensemble de la séquence :

$$\mathcal{L}(S, \mu, \mathbf{J}) = \prod_p \prod_i P[s_p(i)|\mu(i), j_p],$$

où $\mathbf{J} = (j_1, j_2, \dots, j_P)$. La relation $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(S, \mu, \mathbf{J})}{\partial \mu(i)} = 0$ permet d'obtenir l'estimateur du MV pour le flux $\mu(i)$ au pixel i :

$$\mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i) = \frac{1}{P \cdot \Delta t} \sum_{p=1}^P s_p(i + j_p). \quad (2)$$

L'image reconstruite $r_{\mathbf{J}}^{MV}(i)$ est définie comme étant proportionnelle au paramètre estimé de la loi de poisson $\mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i)$:

$$r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) = \Delta T \cdot \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i) = \frac{\Delta T}{P \cdot \Delta t} \sum_{p=1}^P s_p(i + j_p). \quad (3)$$

L'estimateur de l'ensemble des décalages \mathbf{J}_{MV}^{MV} est alors obtenu pour le maximum de la fonction de log-vraisemblance, en considérant l'ensemble des pixels des images de la séquence, généralisée en remplaçant μ par son estimateur $\mu_{\mathbf{J}}^{MV}$.

$$\mathcal{L}(S, \mu_{\mathbf{J}}^{MV}, \mathbf{J}) = \prod_p \prod_i \{P[s_p(i)|\mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i), j_p]\},$$

et

$$\mathbf{J}_{MV}^{MV} = \arg \max_{\mathbf{J}} \{\mathcal{L}(S, \mu_{\mathbf{J}}^{MV}, \mathbf{J})\}. \quad (4)$$

Nous avons montré [1] qu'on obtient alors :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MV} = \arg \max_{\mathbf{J}} \sum_p \left[\sum_i s_p(i + j_p) \ln[\lambda r_{\mathbf{J}}^{MV}(i)] - \sum_i \lambda r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) - \sum_i \ln[s_p(i + j_p)!] \right]. \quad (5)$$

λ est le paramètre de bruit et est défini comme étant le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta T}$.

Les images étant supposées périodiques, le terme $\sum_i \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i)$ est indépendant de \mathbf{J} , et, l'addition d'un terme constant ne modifiant pas le résultat de l'optimisation, \mathbf{J}_{MV}^{MV} est donc déterminé par l'équation suivante :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MV} = \arg \min_{\mathbf{J}} \left\{ - \sum_i r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) \cdot \ln[r_{\mathbf{J}}^{MV}(i)] \right\} \quad (6)$$

Par la suite, dans un souci de simplification, nous poserons

$$C_{MV}(\mathbf{J}) = \left\{ \sum_i r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) \cdot \ln r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) \right\},$$

et nous considérerons l'optimisation de $C_{MV}(\mathbf{J})$:

$$\mathbf{J}_{MV}^{MV} = \arg \max_{\mathbf{J}} \{C_{MV}(\mathbf{J})\}. \quad (7)$$

On remarque que $C_{MV}(\mathbf{J}) = -E$, E étant définie comme l'entropie empirique. Maximiser le critère revient donc à minimiser l'entropie empirique, qui est ici une quantité négative.

Nous avons déjà présenté des résultats obtenus pour de faibles translations [1] et sans connaissance sur le mouvement du capteur. Or, en réalité, tous les mouvements ne sont pas réalisables physiquement, et il est possible de connaître la probabilité *a priori* d'un mouvement. Nous voulons à présent introduire cet *a priori* sur le mouvement du capteur pour étudier s'il est possible d'améliorer encore la reconstruction de l'image par rapport à l'approche du MV présentée dans [1]. Nous allons considérer tout d'abord des mouvements gaussiens décorrelés et chercher l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) pour ces mouvements, puis nous déterminerons l'estimateur du MAP lorsque les mouvements sont gaussiens et corrélés. Nous présentons également les résultats de la reconstruction pour des translations de plus grande ampleur que celle considérée dans l'article [1], c'est à dire de l'ordre de 40 pixels pour des images de tailles 256×256 et 1024×1024 pixels.

Algorithme d'optimisation

L'estimateur \mathbf{J}_{MV}^{MV} est calculé à l'aide d'un algorithme itératif déterministe d'optimisation. A chaque itération, la recherche du maximum de $C_{MV}(\mathbf{J})$ est effectuée pour chaque image p dans un voisinage donné de la position précédente j_p . Pour cela, nous avons considéré des déplacements discrets (i.e. avec un pixel de précision). L'adéquation entre la taille de la fenêtre de recherche et l'amplitude des mouvements permet d'éviter de rester piégé dans les maxima locaux du critère. En effet, nous avons précé-

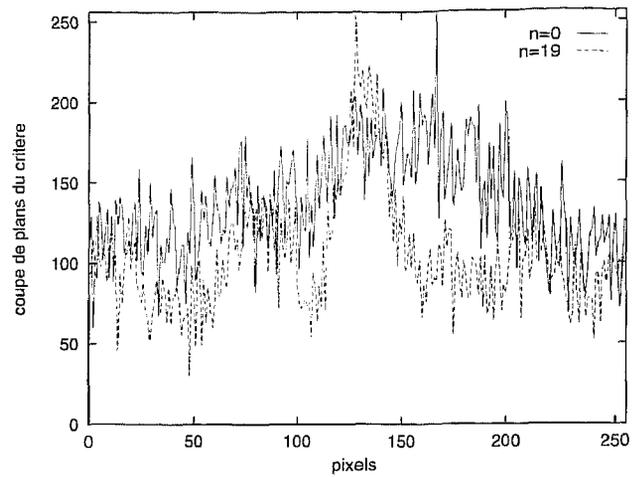
demment étudié, dans le cas de l'algorithme du MV, l'influence de la taille de la fenêtre de recherche [16] sur l'estimation de J par le MV. Cette étude a fait apparaître que, si la taille de la fenêtre est trop faible, il peut apparaître un dédoublement de l'image reconstruite. Ce phénomène disparaît en revanche lorsqu'on augmente cette taille et à partir d'une taille suffisante, nous n'obtenons pas une meilleure précision dans l'estimation en l'augmentant encore, alors que le temps de calcul croît considérablement pour l'algorithme du MV. Le choix de la fenêtre de recherche se fait de manière empirique, en recherchant un compromis entre la minimisation du temps de calcul et le risque de converger vers un maximum local du critère ou de ne pas recalculer toutes les images. Dans nos simulations, nous avons choisi une taille de fenêtre de recherche de 10×10 pixels pour des déplacements d'écart type 8 pixels et une taille de 100×100 pixels pour des déplacements d'écart type 33 pixels. La convergence est atteinte lorsque la variation de $C_{MV}(J)$ est nulle au cours d'une itération. Deux exemples de valeurs de $C_{MV}(J)$ sont montrés sur les figures 2-a et 2-b pour les images I_1 et I_2 . En abscisse sont reportées les valeurs j_p (centrées autour de 128) des déplacements (par rapport à l'image de référence) de l'image courante $s_p(i + j_p)$ de la séquence suivant la ligne qui passe par le maximum du critère. En ordonnée sont reportées les valeurs du critère, recalées dynamiquement entre 0 et 255. Tout d'abord, nous constatons la présence d'un pic marqué pour l'optimum des valeurs du critère. Deuxièmement, la fonctionnelle à maximiser est plus bruitée pour l'image I_2 que pour l'image I_1 . Pour cette image I_2 , la taille des objets est plus petite que pour I_1 . Le nombre des images de la séquence étant élevé, et l'algorithme de recherche étant effectué de manière systématique dans un domaine qui peut être assez important (100×100 pixels pour nos simulations) pour éviter de rester piégé dans des maxima secondaires, il est impératif d'optimiser le temps de calcul.

Cette optimisation a été obtenue en considérant non plus les images $s_p(i)$ mais plutôt les adresses des photons qui constituent ces images. Pour plus de détails, une description de l'algorithme est présentée dans [1] pour la recherche du maximum de la vraisemblance, et sa généralisation pour le critère du MAP peut se faire aisément en ajoutant au calcul de la variation de la vraisemblance le calcul du terme correcteur pour les déplacements (voir 2.2.1 et 3.1).

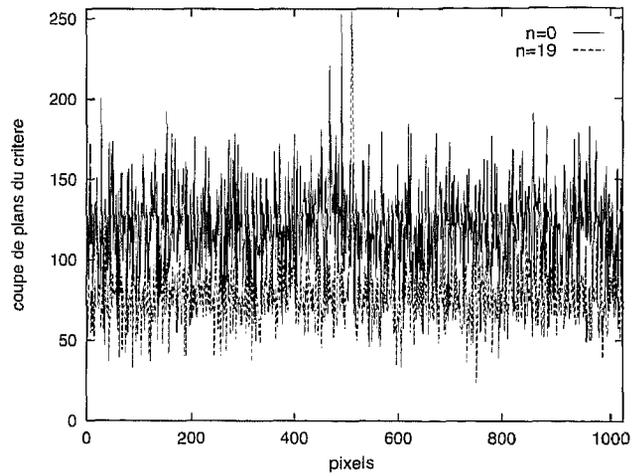
Les temps de calcul sur station SUN Ultra 30 sont reportés dans le tableau 1.

Tableau 1. – Temps de calcul sur les images I_1 et I_2 . P est le nombre d'images dans la séquence, les déplacements sont distribués suivant une densité de probabilité uniforme entre $-A$ et $+A$, tf est la taille de la fenêtre de recherche, n est le nombre d'itérations.

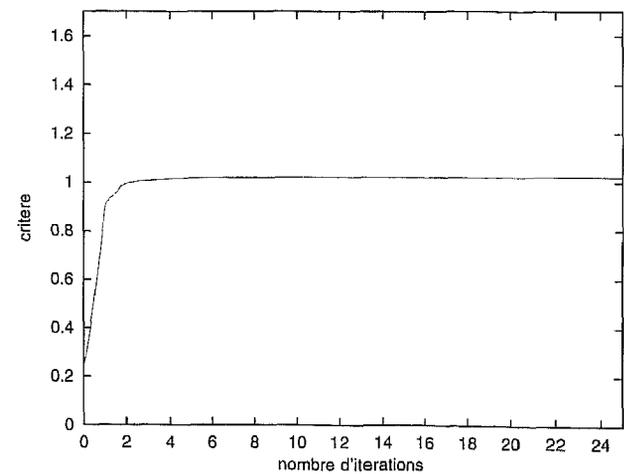
paramètres	I_1	I_2
$P=2000, A=10, tf=10, n=25$	1h45	4h
$P=2000, A=40, tf=100, n=25$	19h	39h30
$P=500, A=40, tf=100, n=25$	3h30	8h45



a



b



c

Figure 2. – (a) (resp.(b)) : valeurs de $C_{MV}(J)$ aux itérations $n=0$ et 19, lorsque j_p varie suivant la direction Ox pour I_1 (resp. I_2) ; (c) : évolution de $\frac{C_{MV}(J)}{C_{MV}(vrai)}$ au cours des itérations, pour I_1

Sur la figure 2-c, nous avons reporté l'évolution du critère normalisé $\frac{C_{MV}(\mathbf{J})}{C_{MV}(vrai)}$ en fonction des itérations pour l'image I_1 , où $C_{MV}(vrai)$ est la valeur de ce critère pour l'image somme $\sum_p s_p(i + j_p)$ après un recalage exact. Nous pouvons constater la convergence du critère au bout de quelques itérations.

2. étude pour des mouvements décorrelés

2.1. résultats obtenus avec l'estimateur du MV

Nous présentons ici des résultats obtenus en optimisant le critère $C_{MV}(\mathbf{J})$ lorsque les déplacements du capteur sont décorrelés et décrits par une densité de probabilité uniforme ou gaussienne.

2.1.1. déplacements aléatoires de densité de probabilité uniforme

Nous avons utilisé une séquence de 2000 images pour les simulations que nous décrivons dans la suite. Le capteur est en mouvement aléatoire de densité de probabilité uniforme. Nous pouvons ainsi évaluer les résultats de l'algorithme de recalage dans des conditions optimales pour l'estimation par le maximum de vraisemblance ($P(\mathbf{J}) = \text{constante}$, \mathbf{J} étant le vecteur des décalages initiaux). L'image de référence est I_1 , le nombre moyen de photons dans une image de la séquence est 96. Nous comparons les résultats obtenus pour des déplacements distribués suivant une densité de probabilité uniforme entre -10 et +10 pixels et entre -40 et +40 pixels.

Petits déplacements :

L'image reconstruite $r_{\mathbf{J}}^{MV}(i) = \frac{\Delta T}{P \cdot \Delta t} \sum_{p=1}^P s_p(i + j_p)$ par sommation des images bruitées de la séquence avant correction du mouvement (image floue) et après correction du mouvement (image restaurée) est présentée sur la figure 3-a.

Sur la figure 4-a nous avons reporté les valeurs vraies des déplacements j_1, j_2, \dots, j_P suivant la direction horizontale Ox , ainsi que les écarts (déplacements résiduels) entre les valeurs estimées grâce à l'algorithme du MV et ces valeurs vraies.

Grands déplacements :

Nous considérons à présent des déplacements initiaux distribués suivant une densité de probabilité uniforme entre -40 et +40 pixels.

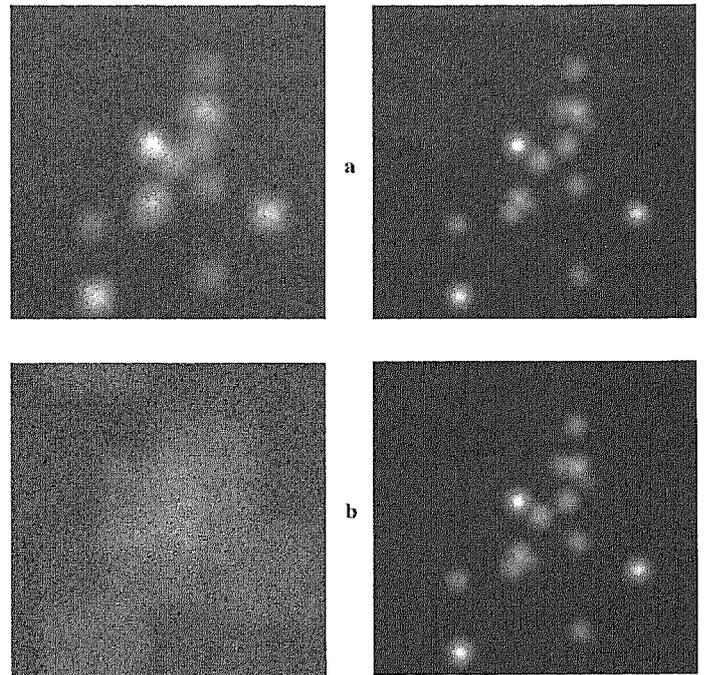


Figure 3. – Image floue et image restaurée (a) : pour un mouvement uniforme avec $A = 10$ pixels, (b) : pour un mouvement uniforme avec $A = 40$ pixels.

L'image floue et l'image restaurée sont présentées sur la figure 3-b. Sur la figure 4-b nous avons représenté les positions vraies des images de la séquence suivant la direction horizontale Ox , ainsi que les écarts entre valeurs estimées et valeurs vraies.

Dans le tableau 2, nous avons reporté la valeur de l'entropie empirique normalisée à convergence de l'algorithme, obtenue lorsque le critère $C^{MV}(\mathbf{J})$ reste constant au cours d'une itération entière. Elle converge en quelques itérations vers une valeur proche de 1, ce qui signifie que l'entropie empirique de l'image reconstruite après recalage est proche de celle de l'image déterminée à partir de la séquence non décalée. La minimisation de l'entropie empirique est le critère de recalage obtenu en appliquant le principe du maximum de vraisemblance. Toutefois ce critère n'est pas directement relié à la qualité visuelle de l'image reconstruite, aussi, nous allons introduire d'autres critères pour évaluer la qualité de cette image.

L'étude des décalages résiduels, entre les images de la séquence et l'image de référence, après convergence de l'algorithme (figure 4), conduit à différentes constatations. Tout d'abord, les images sont globalement recalées autour d'une position moyenne qui peut être non nulle, ce qui met en évidence une dérive globale au cours du recalage, en particulier pour les mouvements de grande ampleur. Cette dérive n'est pas gênante pour notre étude, aussi nous n'avons pas essayé de la corriger. Par ailleurs, la grande majorité des images de la séquence, initialement décalées avec un écart type Ei de 8.39 pixels (resp. 32.99 pixels), sont recalées avec une erreur finale Ef égale à 2.87 pixels (resp. 2.80 pixels) environ, l'erreur finale étant définie comme l'écart type des décalages résiduels

Reconstruction d'images astronomiques à partir de séquences à faible flux

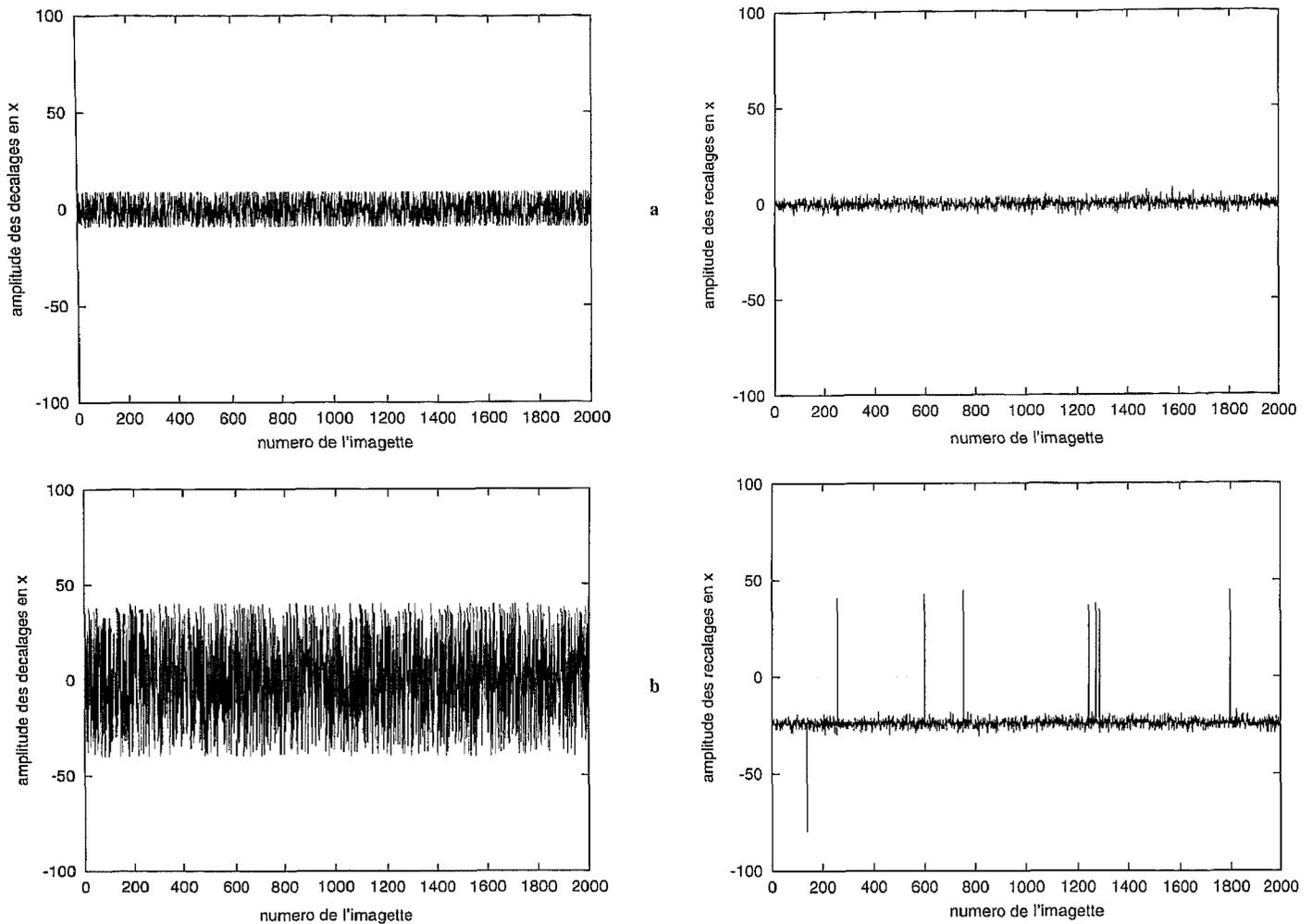


Figure 4. – Mouvement uniforme suivant Ox ; à gauche : déplacements vrais et à droite écart entre les déplacements estimés et les déplacements vrais (a) : pour $A = 10$ pixels, (b) : $A = 40$ pixels.

après le recalage. Enfin, on observe que quelques images (moins de 1%) conservent après correction un décalage supérieur à $3 \times Ef$ de la position de recalage moyenne. Nous dirons que ces images sont non recalées. Il nous a paru pertinent de séparer ces deux classes d'images pour évaluer le résultat, en calculant d'une part l'écart type du décalage résiduel uniquement sur les images recalées (erreur finale inférieure à $3 \times Ef$), et d'autre part en introduisant comme critère empirique complémentaire la proportion d'images recalées (rapport entre le nombre d'images recalées et le nombre d'images total). Il semblerait que les images non recalées correspondent à des déplacements non isotropes (de sens opposé à celui de la dérive). Une étude plus approfondie serait nécessaire pour mieux caractériser ces images non recalées afin d'éventuellement trouver une méthode pour leur détection automatique. L'écart type des déplacements est reporté dans le tableau 2, avant (Ei) et après (Ef) le recalage, ainsi que la proportion d'images recalées.

Tableau 2. – Recalage par l'algorithme du MV d'une séquence de 2000 images bruitées ($\lambda = 1, 5 \cdot 10^{-4}$) et décalées (suivant un mouvement initial uniforme avec $A = 10$ ou $A = 40$) par rapport à l'image de référence I_1 . Tableau résumé des résultats.

C_{MV} , mvt uniforme, $P = 2000$	$A=10, tf=10$	$A=40, tf=100$
écart type du mouvement initial Ei	8.39	32.99
critère $\frac{C_{MV}(J)}{C_{MV}(vrai)}$ à convergence	1.0549	1.0534
Ef pour les images recalées	2.87	2.80
proportion d'images recalées	100%	99.6%

En utilisant les critères empiriques pour caractériser les résultats du recalage, nous vérifions que l'écart type des déplacements résiduels est le même pour les deux séquences, indépendamment de l'amplitude du mouvement initial. Enfin on remarque que pour les grands déplacements une faible minorité d'images ne sont pas recalées, ce qui n'altère que très peu la qualité visuelle de l'image reconstruite. En conclusion, l'algorithme permet la reconstruction d'une image de bonne qualité pour les deux mouvements considérés, avec un écart type des déplacements résiduels de 2.8 pixels environ pour les images recalées

2.1.2. mouvements aléatoires de densités de probabilité uniforme et gaussienne

L'estimateur du MV est optimal lorsque la densité de probabilité de la grandeur à estimer est uniforme. En réalité, la densité de probabilité décrivant les mouvements aléatoires du capteur est gaussienne. Nous proposons ici de comparer les résultats obtenus avec

l'algorithme du MV lorsque les mouvements sont aléatoires de densité de probabilité gaussienne et aléatoires de densité de probabilité uniforme, et de grande ampleur. L'image considérée est I_2 . Le nombre d'images de la séquence est $P = 2000$, le nombre moyen de photons est de 247 pour une image de la séquence.

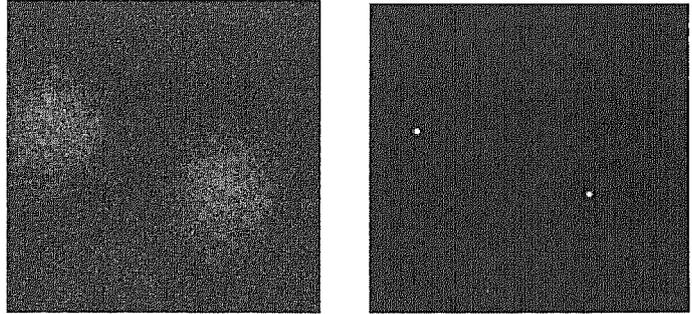


Figure 5. – Image reconstruite avant recalage et après recalage (extraction d'une image de taille 256×256).

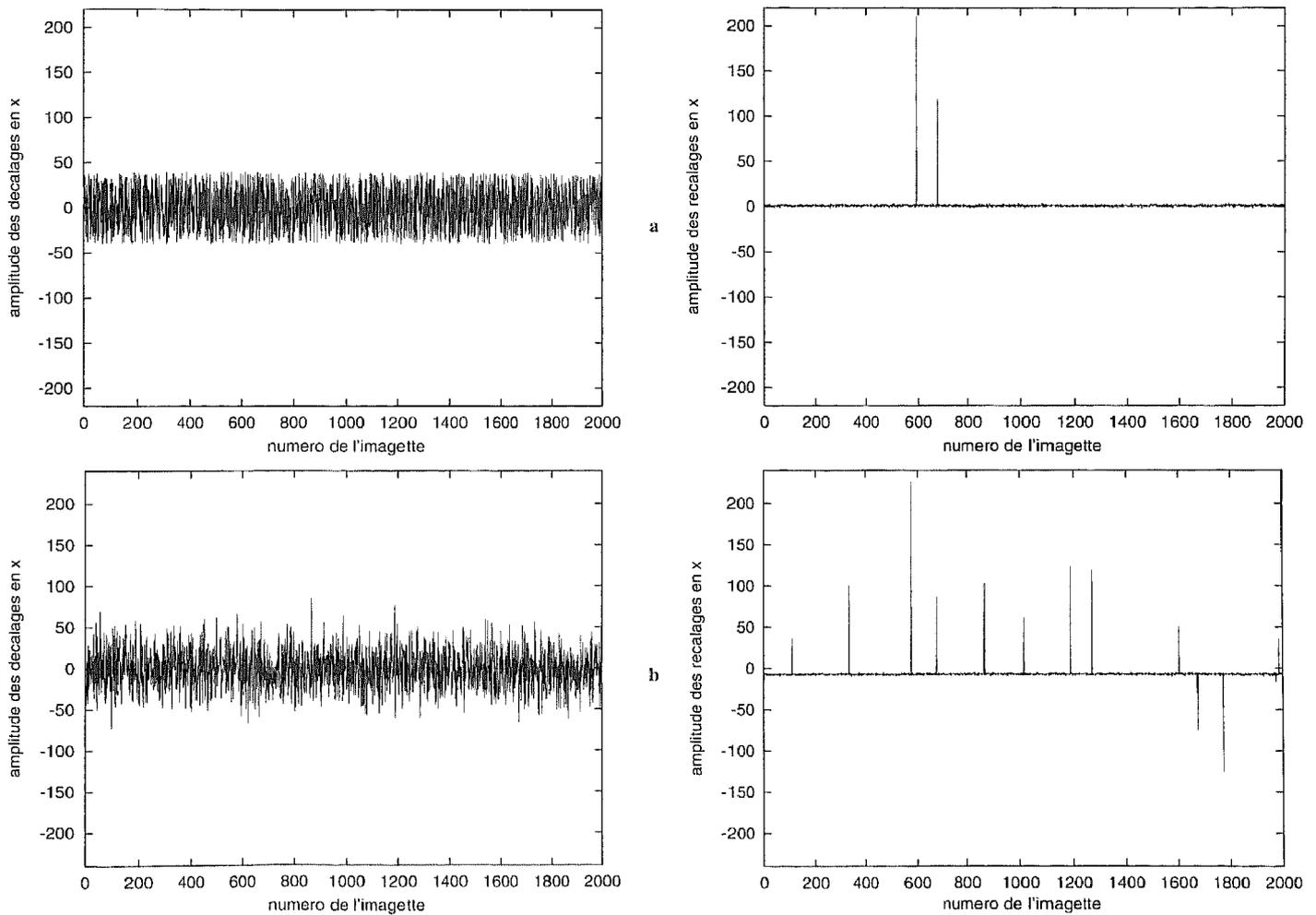


Figure 6. – Déplacements initiaux, puis mouvement résiduel après correction, pour des déplacements de densité de probabilité (a) : uniforme et (b) : gaussienne.

Tableau 3. – Recalage par l'algorithme du MV d'une séquence de 2000 images bruitées ($\lambda = 9, 23.10^{-4}$) et décalées (suivant un mouvement uniforme ou gaussien) par rapport à l'image de référence I_2 . Tableau résumé des résultats.

C_{MV} , $P = 2000$, $tf = 100$	mvt uniforme	mvt gaussien
écart type du mouvement initial $E\bar{i}$	32.99	32.66
critère $\frac{C_{MV}(\mathbf{J})}{C_{MV}(\text{vrai})}$ à convergence	1.0406	1.0394
E_f pour les images recalées	1.09	1.09
proportion d'images recalées	99.9%	99.2%

L'image floue pour un mouvement gaussien et l'image restaurée sont présentées sur la figure 5. Nous avons extrait une image de taille 256×256 pour plus de visibilité. Les décalages suivant une direction Ox sont montrés sur la figure 6, et les résultats suivant les trois critères retenus sont présentés dans le tableau 3.

L'étude des positions des images de la séquence après correction fait apparaître différents points. Ainsi une majorité d'images de la séquence sont recalées autour d'une position moyenne non nulle. Par ailleurs, l'écart type de l'erreur résiduelle pour les images recalées est le même pour les deux mouvements. Enfin le nombre d'images non recalées est légèrement plus important pour le mouvement gaussien que pour le mouvement uniforme. Nous observons donc que l'algorithme du MV permet, dans les cas uniforme et gaussien, de recalcr la séquence d'images avec la même erreur résiduelle à condition de ne considérer que les images recalées. La proportion d'images non recalées est légèrement plus grande lorsque le mouvement est gaussien, sans que cela dégrade notablement l'image reconstruite.

2.2. résultats obtenus avec l'estimateur du MAP

2.2.1. estimateur du MAP pour les déplacements gaussiens non corrélés

Dans cette partie, nous considérons le cas où le capteur possède un mouvement aléatoire gaussien de variance et de valeur moyenne connues, et non corrélé d'une image à l'autre de la séquence. Nous introduisons cette connaissance *a priori* pour calculer l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP). D'après la théorie bayésienne de l'estimation, l'estimateur j_p^{MAP} recherché doit optimiser la quantité :

$$P(\mathbf{s}_P | \mu, j_p) \cdot P(j_p) = \mathcal{L}(\mathbf{s}_P, \mu, j_p) \cdot P(j_p), \quad (8)$$

avec $P(j_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(j_p - \bar{j})^2}{2\sigma^2}\right]$, où σ et \bar{j} sont l'écart

type et la valeur moyenne des déplacements j_p (décalages initiaux des images bruitées de la séquence par rapport à l'image de référence). L'estimateur du déplacement j_p de l'image \mathbf{s}_P est alors :

$$j_p^{MAP} = \arg \max_{j_p} \left\{ \prod_i \{P[s_p(i) | \mu(i), j_p] \cdot P(j_p)\} \right\} \quad (9)$$

Le paramètre $\mu(i)$ étant inconnu, nous considérerons comme précédemment l'estimateur du maximum de vraisemblance $\mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i) = \frac{1}{P \cdot \Delta t} \sum_{p=1}^P s_p(i + j_p)$, et l'estimateur du maximum *a posteriori* pour \mathbf{J} qui est alors :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \left\{ \prod_i \prod_p \{P[s_p(i) | \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i), j_p] \cdot P(j_p)\} \right\}. \quad (10)$$

En considérant les seuls termes dépendants de \mathbf{J} , on obtient :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \left\{ \left\{ \sum_i \left[\sum_{p=1}^P s_p(i + j_p) \right] \cdot \ln \left[\sum_{p=1}^P s_p(i + j_p) \right] \right\} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_p (j_p - \bar{j})^2 \right\} \quad (11)$$

ou, avec les notations précédentes :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \left\{ C_{MV}(\mathbf{J}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_p (j_p - \bar{j})^2 \right\}. \quad (12)$$

Par la suite, nous noterons

$$C_{MAP}(\mathbf{J}) = C_{MV}(\mathbf{J}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_p (j_p - \bar{j})^2$$

le critère à optimiser pour la détermination des déplacements \mathbf{J} et :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \{C_{MAP}(\mathbf{J})\}. \quad (13)$$

Les critères $C_{MAP}(\mathbf{J})$ et $C_{MV}(\mathbf{J})$ diffèrent uniquement par le terme additif $\frac{1}{2\sigma^2} \sum_p (j_p - \bar{j})^2$. Ce terme sera grand pour des valeurs des déplacements éloignées de la valeur moyenne \bar{j} et son rôle est de défavoriser ces déplacements trop improbables des images de la séquence par rapport à l'image de référence.

2.2.2. comparaison des résultats obtenus avec les deux estimateurs J_{MV}^{MV} et J_{MV}^{MAP} dans le cas d'un mouvement gaussien

1. variation du paramètre de bruit λ

Nous avons utilisé pour les simulations l'image de référence I_3 . Sur cette image, nous avons réalisé plusieurs séquences de 1000 images avec des paramètres de bruit $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta T}$ différents (tableau 4).

Tableau 4. – A partir de l'image de référence I_3 , des séquences de 1000 images bruitées sont créées en faisant varier le paramètre de bruit λ . Dans ce tableau, nous reportons le nombre moyen de photons par image de la séquence en fonction de ce paramètre λ

λ	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-5}$
Nb photons/image	911	606	304	152	92	61	31	15

Les décalages initiaux des images par rapport à I_3 sont aléatoires de densité de probabilité gaussienne et d'écart type 32,67 pixels. Nous avons appliqué les algorithmes du MAP et du MV sur ces séquences d'images, en considérant une fenêtre de recherche de taille 100×100 pixels pour l'estimation des décalages des images par rapport à I_3 . Les résultats (figure 7) ont été moyennés sur deux réalisations des décalages initiaux.

Sur la figure 7, nous représentons l'erreur finale calculée pour la totalité des images, en fonction de λ . On remarque que les résultats obtenus (dans les mêmes conditions initiales), par les deux algorithmes MAP et MV, sont très proches pour des valeurs de λ supérieures à $3 \cdot 10^{-4}$, avec une erreur finale légèrement plus faible pour le MAP. Pour $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ ou $\lambda = 10^{-4}$, l'utilisation d'une connaissance *a priori* sur \mathbf{J} permet une meilleure estimation de \mathbf{J} et donc d'obtenir une meilleure image restaurée. Pour $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$, les résultats sont insatisfaisants pour les deux estimateurs. Nous considérerons dans la suite, la valeur $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ comme une valeur limite pour la bonne reconstruction des images dans de telles conditions expérimentales.

2. variation du nombre P d'images dans une séquence

Nous proposons maintenant de tester les deux algorithmes du MAP et du MV dans les mêmes conditions expérimentales que dans la section précédente, mais pour $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$ et avec des séquences constituées de P images, où P varie de 1000 à 200. Les résultats présentés sur la figure 8 ont été moyennés sur deux réalisations des décalages initiaux.

Sur la figure 8, nous présentons l'erreur résiduelle totale après recalage. On constate que l'erreur finale est plus faible et varie moins en fonction de P dans le cas de décalages estimés par l'algorithme du MAP. Par exemple pour $P = 400$, l'amélioration apportée par le MAP sur le MV est de 34 %.

3. variation du « bruit de fond » de l'image de référence

Nous avons utilisé pour les simulations l'image de référence I_3 sur laquelle nous avons considéré deux pourcentages différents de photons issus du rayonnement diffus du fond du ciel. Nous avons réalisé une séquence de 1000 images bruitées avec les mêmes conditions expérimentales que précédemment ($\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$, fenêtre de recherche de taille 100×100 pixels, et écart type initial du mouvement gaussien de 32,67 pixels). Les résultats présentés dans le tableau 5 ont été moyennés sur deux réalisations des décalages initiaux.

Plus le nombre de photons issus du rayonnement diffus du fond du ciel est important, plus la reconstruction de l'image est évidemment difficile, mais on peut également remarquer que le MAP conduit à de meilleurs résultats que le MV.

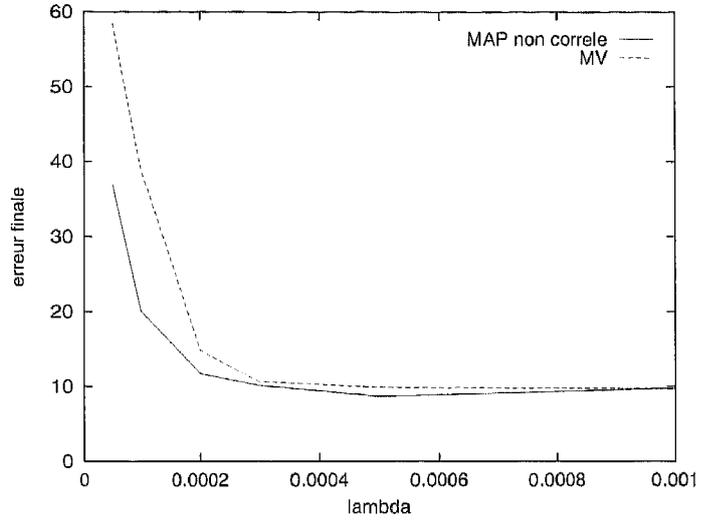


Figure 7. – Evolution de l'erreur finale sur toutes les images, en fonction du paramètre de bruit λ . Cette erreur est calculée par les deux algorithmes MAP et MV.

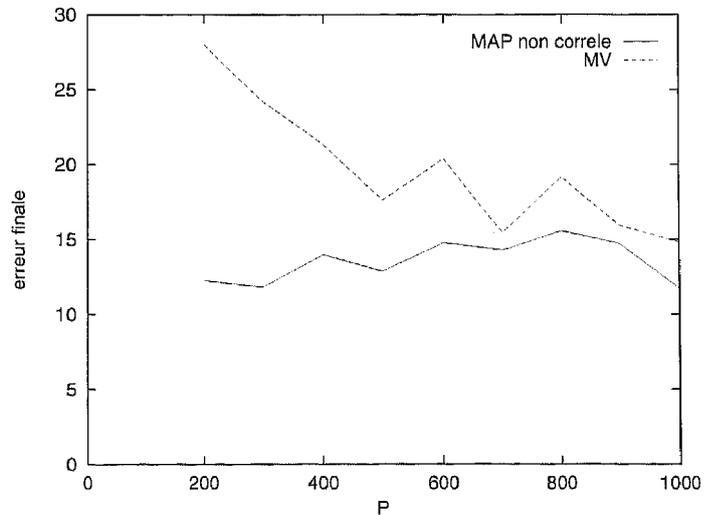


Figure 8. – Evolution de l'erreur finale sur toutes les images, en fonction du nombre P d'images dans une séquence. Cette erreur est calculée par les deux algorithmes MAP et MV.

Tableau 5. – Par les algorithmes du MV ou du MAP, on recalc des séquences de 1000 images bruitées ($\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$) et décalées (suivant une densité de probabilité gaussienne d'écart type initial 32,67 pixels) par rapport à l'image de référence I_3 . Tableau résumé des résultats pour deux pourcentages de photons issus du rayonnement diffus du fond du ciel.

photons issus du fond du ciel	65%		80%	
	MAP	MV	MAP	MV
erreur initiale	32.67			
erreur finale sur la totalité des images	11.72	14.81	24.27	39.20

Tableau 6. – Par les algorithmes du MV ou du MAP, on recalc des séquences de 1000 images bruitées ($\lambda = 2 \cdot 10^{-4}$) et décalées (suivant une densité de probabilité gaussienne d'écart type initial 32,67 pixels) par rapport à l'image de référence I_3 . Tableau résumé des résultats pour deux tailles de fenêtre de recherche.

taille de la fenêtre de recherche	100 × 100		200 × 200	
	MAP	MV	MAP	MV
erreur initiale	32.67			
erreur finale sur la totalité des images	11.72	14.81	5.30	24.05
proportion d'images recalées	98.8	98.3	99.8	99.3

4. recherche quasi-exhaustive

Avec les mêmes conditions expérimentales que précédemment, nous avons testé les algorithmes du MAP et du MV sur la séquence d'images, en considérant une fenêtre de recherche de taille 100 × 100 pixels pour l'estimation des décalages, puis une taille de 200 × 200. Les résultats présentés ci-après ont été moyennés sur deux réalisations des décalages initiaux. D'après le tableau 6, on constate qu'une recherche quasi-exhaustive détériore les résultats du MV, alors qu'elle les améliore pour le MAP. La taille de la fenêtre de recherche peut être choisie en recherchant un compromis entre le temps de calcul (de 3H pour une taille 100 × 100 et de 11H pour une taille 200 × 200) et la précision désirée pour la reconstruction.

5. conclusion

Nous avons considéré dans cette partie le cas d'un mouvement gaussien et non corrélé. On a montré que pour un paramètre de bruit λ largement supérieur à $2 \cdot 10^{-4}$, les résultats du MV et du MAP sont très proches. Par contre, pour un λ de $2 \cdot 10^{-4}$, le MAP est plus performant. L'écart entre les résultats des deux algorithmes augmente d'autant plus que le nombre P d'images de la séquence diminue ou que le nombre de photons issus du rayonnement diffus du fond du ciel augmente. Dans tous les cas, les meilleures performances sont obtenues pour le MAP avec une recherche exhaustive.

3. étude de mouvements corrélés

Dans de nombreuses situations expérimentales, le mouvement du capteur est corrélé. En particulier, l'étude de la fonction d'autocorrélation du mouvement estimé pour les données FOCA fait apparaître une corrélation temporelle. Nous allons appliquer la même démarche que précédemment et introduire la densité de probabilité qui résulte de la connaissance *a priori* que l'on possède sur un mouvement gaussien corrélé. Pour déterminer $P(\mathbf{J})$ nous allons modéliser le mouvement aléatoire gaussien par un processus autorégressif (AR) que nous choisirons d'ordre 1 pour les simulations. Nous supposons que le processus est ergodique et stationnaire. De plus, nous considérerons que le mouvement est causal, ce qui permet d'écrire :

$$j_p = a \cdot j_{p-1} + \sigma \cdot e_p, \quad (14)$$

où le temps t est défini par $t = p \cdot \Delta t$, où a et σ sont les coefficients de la modélisation AR et où e_p est un bruit blanc gaussien de variance égale à 1 et de moyenne nulle. En conséquence, j_p est également de moyenne nulle. Lorsque a est proche de 1 le mouvement est fortement corrélé alors que lorsque a est proche de 0 le mouvement est faiblement corrélé. Bien entendu, si $a = 0$, le mouvement est décorrélé et la grandeur aléatoire j_p est égale à la grandeur aléatoire $\sigma \cdot e_p$, ce qui revient au cas étudié en section 2.1.2. Les valeurs de e_p sont tirées aléatoirement suivant une densité de probabilité gaussienne centrée de variance égale à 1, puis les valeurs de j_p sont déterminées récursivement à l'aide de l'équation 14.

3.1. estimateur du MAP pour les déplacements

L'estimateur du MAP est la valeur de \mathbf{J} qui vérifie :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \left\{ \left[\prod_i \prod_p P(s_p(i) | \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i), j_p) \right] \cdot P(\mathbf{J}) \right\}. \quad (15)$$

D'après la relation 14, les valeurs de j_p dépendent des grandeurs aléatoires e_p qui sont décorrélées. Ainsi $P(\mathbf{J}) = \prod_p [P(e_p)]$,

avec $P(e_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{e_p^2}{2}\right]$ et on en déduit :

$$P(\mathbf{J}) = \prod_{p=1}^P \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(j_p - a \cdot j_{p-1})^2}{2 \cdot \sigma^2}\right].$$

Suivant la même démarche que dans la section 2.1.2, nous obtenons :

$$\mathbf{J}_{MV}^{MAP} = \arg \max_{\mathbf{J}} \left\{ \sum_i \{P \cdot \Delta t \cdot \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i) \cdot \ln[P \cdot \Delta t \cdot \mu_{\mathbf{J}}^{MV}(i)]\} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_p [(j_p - a j_{p-1})^2] \right\}. \quad (16)$$

Le critère à maximiser pour obtenir J_{MV}^{MAP} est

$$C_{MAP}(\mathbf{J}) = \left\{ C_{MV}(\mathbf{J}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_p (j_p - a \cdot j_{p-1})^2 \right\}.$$

Comme pour les décalages non corrélés des images de la séquence par rapport à l'image de référence, la prise en compte du mouvement dans l'algorithme de recherche se traduit par un terme additif. Le temps de calcul sur station de travail SUN Ultra 30 est de 8h45 pour 500 images dans la séquence (247 photons en moyenne par image) et une fenêtre de recherche de 100×100 pixels pour les déplacements.

3.2. comparaison des résultats obtenus avec les estimateurs C_{MV} et C_{MAP} lorsque le mouvement est gaussien et corrélé

1. étude en fonction de la corrélation des séquences.

Nous avons utilisé pour les simulations l'image de référence I_3 . Sur cette image, nous avons réalisé une séquence de 1000 images bruitées avec un paramètre de bruit $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}$, c'est-à-dire 92 photons par image.

Nous avons testé les deux algorithmes du MAP et du MV lorsque le mouvement initial est aléatoire de densité de probabilité gaussienne (écart type 32,67 pixels) et corrélé, et pour différentes valeurs du coefficient de corrélation a . La taille de la fenêtre de recherche a été choisie égale à 100×100 pixels.

Sur la figure 9 l'erreur finale totale est reportée en fonction de a , obtenue en moyennant les résultats pour deux réalisations du mouvement initial. On remarque que plus le mouvement du capteur est

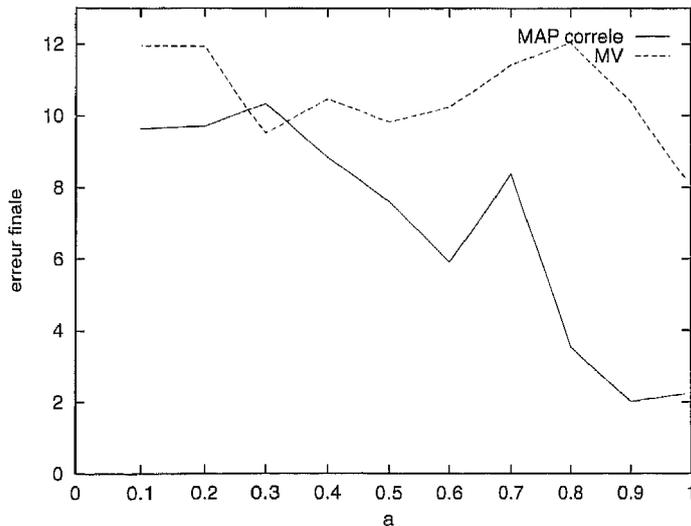


Figure 9. – Evolution de l'erreur finale sur toutes les images, en fonction du coefficient de corrélation a du mouvement du capteur. Cette erreur est calculée pour les deux algorithmes MAP et MV.

corrélé, plus l'amélioration apportée par le MAP par rapport au MV est importante. Pour une faible corrélation l'application de l'un ou l'autre des algorithmes est équivalente.

2. variation de la taille de la fenêtre de recherche

L'image de référence que nous considérons dans ce paragraphe est I_2 et possède 1024×1024 pixels. Nous avons testé l'algorithme de recalage pour les deux critères C_{MV} et C_{MAP} lorsque le mouvement initial est corrélé et gaussien avec un coefficient de corrélation a égal à 0.99, ce qui correspond à un temps de corrélation d'environ $100 \times \Delta t$. Nous avons simulé 2 réalisations du mouvement pour la même liste de photons, correspondant à deux séquences de 500 images (247 photons en moyenne par image) et d'écart type initial $Ei = 32.67$ pixels.

Nous présentons dans le tableau 7, les résultats pour ces 2 réalisations des décalages initiaux (« mvt1 » et « mvt2 ») et pour 2 tailles de fenêtre de recherche.

Les deux exemples de mouvements initiaux et de mouvements résiduels sont montrés sur la figure 10 pour une fenêtre de recherche de 100×100 pixels. Pour ces déplacements corrélés, l'étude des mouvements résiduels après reconstruction fait apparaître dans certains cas un recalage « par intervalles » de la séquence autour de positions moyennes différentes, ce qui se traduit par un dédoublement de l'image reconstruite. Avec le critère C_{MAP} , nous n'avons pas constaté d'image non recalée isolée (mouvement résiduel supérieur à $3 \times Ef$, Ef étant l'écart type des décalages résiduels).

En conclusion, l'avantage de l'estimation du MAP est l'absence d'images non recalées. En effet, celles-ci ne sont pas toujours décelables dans le cas de données réelles. Par contre, il peut y avoir dédoublement de l'image reconstruite lorsque les images se regroupent par intervalles (par exemple mvt 1, C_{MAP}). En revanche, il apparaît ici que l'amélioration de la précision de l'estimation du mouvement obtenue avec l'estimateur du MAP par rapport à l'estimateur du MV n'est pas significative, après correction, pour les images recalées ($Ef = 0,91$ en moyenne pour le MAP et 0,95 en moyenne pour le MV)

On constate qu'en augmentant la taille de la fenêtre de recherche (tableau 7), les images non recalées disparaissent pour le MV, mais on a toujours le phénomène de dédoublement pour le MAP. Cependant, si on est limité en temps de calcul, c'est-à-dire si l'on doit se contenter d'une taille de fenêtre faible, l'utilisation du MAP donne de meilleurs résultats que celle du MV.

4. application à des données réelles

L'expérience FOCA fournit des listes de photons issues de vols. Une des listes correspond à une séquence d'images prise au cours du vol 10 gap 8, effectué en mai 1994. La séquence est

Tableau 7. – Par les algorithmes du MV ou du MAP, on recalc des séquences de 500 images bruitées ($\lambda = 9,23 \cdot 10^{-4}$) et décalées (suivant un mouvement gaussien d'écart type initial 32,67 pixels et corrélé avec $\alpha = 0,99$) par rapport à l'image de référence I_2 . Tableau résumé des résultats pour deux tailles de fenêtre de recherche.

Taille fenêtre de recherche	100 × 100 pixels				200 × 200 pixels			
	mvt 1		mvt 2		mvt 1		mvt 2	
	MAP	MV	MAP	MV	MAP	MV	MAP	MV
Critère à convergence	0.8890	1.0367	1.0221	0.9546	0.8890	1.0367	1.0221	1.0374
E_i	32.67							
Ef sur la totalité des images	29.63	0.97	0.88	25.78	29.63	0.97	0.88	0.93
Ef des images recalées	0.95	0.97	0.88	0.94	0.95	0.97	0.88	0.93

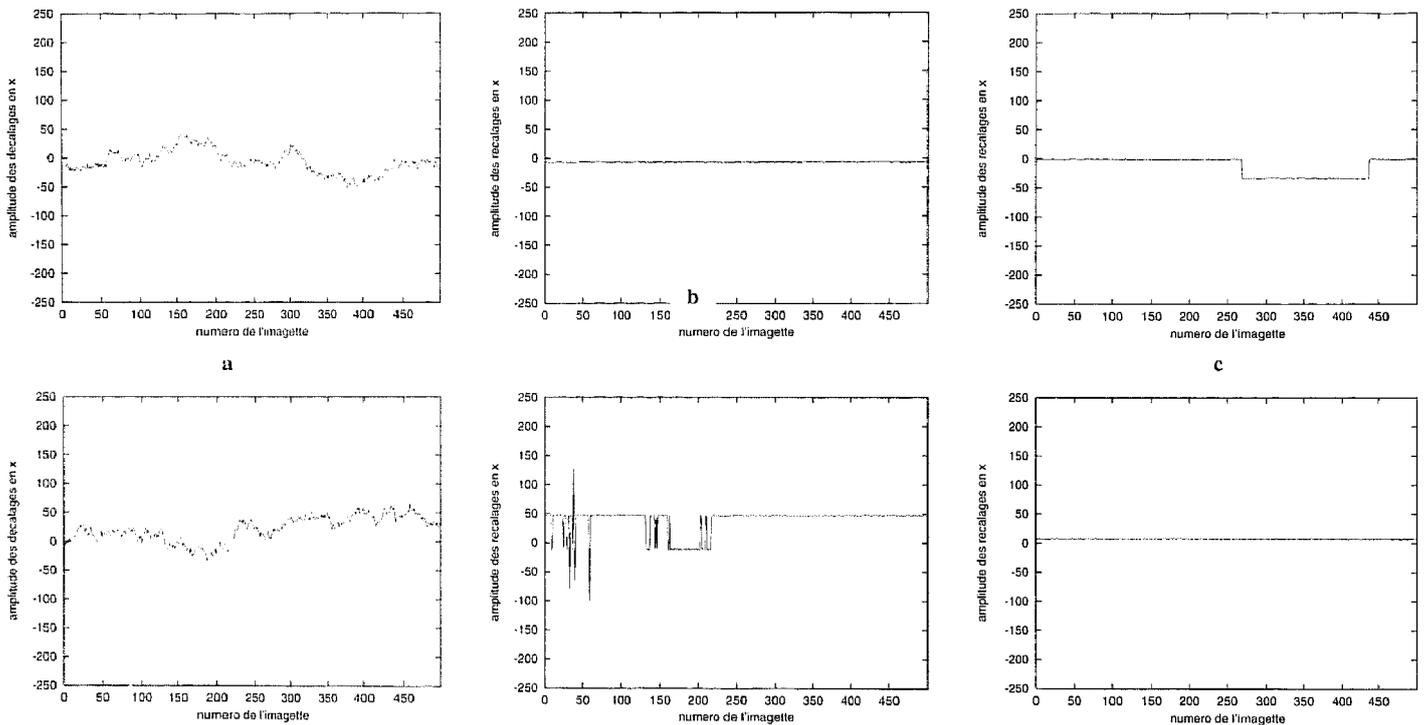


Figure 10. – (a) : exemples de mouvements initiaux (mvt 1 et mvt2), puis mouvements résiduels, calculés avec (b) : C_{MV} et (c) : C_{MAP} pour une fenêtre de recherche de 100×100 pixels.

composée de 39.993 trames et d'un nombre total de photons de 1.036.956. On y trouve donc en moyenne 26 photons par trame. Cette liste correspond à une image 1024×1024 de l'amas Messier 3 inscrit dans un champ circulaire. La largeur à mi-hauteur (FWHM) théorique des étoiles, due à la fonction d'étalement des appareils d'optique, est de 3,7 pixels.

A partir de cette liste nous avons créé une séquence de 7998 images composées de 5 trames chacune. Cette valeur est un bon compromis entre la quantité de photons par image de la séquence et la nécessité d'être en dessous du seuil du mouvement. Une première reconstruction de l'image vraie par l'algorithme du MV et une analyse précise des listes des décalages estimés, ont montré

que le capteur avait un mouvement gaussien d'écart type empirique d'environ 1,56 pixels et corrélé avec un coefficient de corrélation α estimé de 0,31. Nous avons donc appliqué les 3 algorithmes (MV, MAP non corrélé et MAP corrélé) sur ces données, en tenant compte des valeurs de σ et α pour le calcul des critères et en prenant une fenêtre de recherche de taille 10×10 pixels. Nous montrons sur la figure 11 une partie de l'image floue et de l'image reconstruite, et sur la figure 12, la coupe de l'étoile la plus intense du champ, avant et après recentrage par chacun des trois algorithmes. La qualité de la reconstruction est évaluée en calculant la largeur à mi-hauteur de l'étoile la plus intense (tableau 8).

Tableau 8. – Largeur à mi-hauteur de l'étoile la plus brillante du champ, avant recalage et après reconstruction de l'image par les différents algorithmes.

	avant recalage	MV	MAP non corrélé	MAP corrélé
FWHM (pixels)	4.3	3.8	3.6	3.8

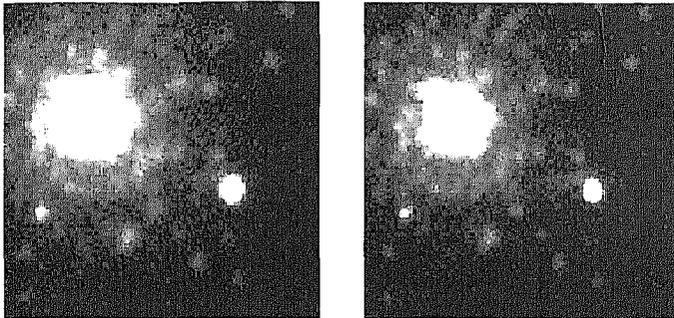
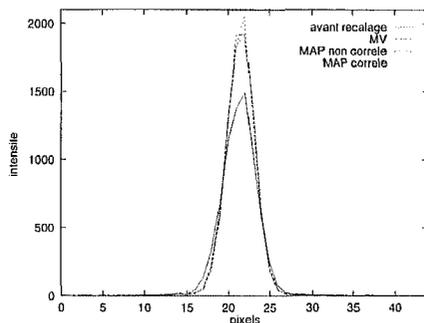

 Figure 11. – Image floue et image reconstruite par l'estimateur du MV. Il s'agit ici d'extractions 128×128 du champ 1024×1024 .


Figure 12. – Coupes d'intensité de l'étoile la plus brillante du champ, avant recalage et après reconstruction de l'image par les différents algorithmes.

Quel que soit l'algorithme de recalage appliqué à ces données réelles, on retrouve une valeur proche de la FWHM théorique. On n'observe pas ici de nette amélioration de la reconstruction lorsqu'on applique un algorithme du MAP, le MV donnant déjà de très bons résultats.

5. conclusion

Nous avons présenté les résultats obtenus avec un algorithme de recalage d'images à faible flux, optimal au sens du MV, pour des images astronomiques simulées et réelles ayant différentes caractéristiques (taille des objets, répartition des objets).

Nous avons évalué la qualité de l'image restaurée en calculant l'erreur de recentrage moyenne avant et après correction, puis en calculant l'écart type du mouvement résiduel uniquement sur les images recalées.

L'écart type de l'erreur résiduelle sur les images recalées dépend de la séquence d'images considérée et pour nos simulations, on

peut remarquer que cette erreur est plus importante pour la reconstruction de l'image contenant des objets plus étalés.

Nous avons vérifié que l'erreur de reconstruction d'une image à partir d'une séquence d'images, est la même pour des mouvements de faible ampleur et pour des mouvements de plus grande ampleur de ces images.

L'algorithme du MV est robuste lorsque les mouvements sont gaussiens. L'écart type des mouvements résiduels sur les images recalées est le même pour les mouvements de densités de probabilité uniforme et gaussienne. Cependant, le nombre d'images non recalées est plus important lorsque le mouvement est gaussien que lorsqu'il a une densité de probabilité uniforme.

Nous avons également déterminé l'estimateur optimal au sens du MAP lorsque le mouvement du capteur est gaussien et décorrélié, puis gaussien et corrélé. Nous avons comparé les estimateurs du MAP avec l'estimateur du MV.

Nous avons obtenu des résultats différents suivant les séquences d'images considérées. D'une manière générale, nous pouvons dire que lorsque l'algorithme du MV fournit de bons résultats alors la quasi-totalité des images sont recalées. En revanche, lorsque l'algorithme du MV ne permet pas d'obtenir une bonne reconstruction de l'image (il y a un nombre conséquent d'images non recalées), l'algorithme du MAP apporte une amélioration dans la reconstruction en diminuant le nombre d'images non recalées ainsi que l'amplitude des décalages non corrigés.

En conclusion, nous pouvons dire que pour les séquences considérées, l'amélioration obtenue avec les algorithmes optimaux au sens du MAP pour des mouvements non corrélés ou corrélés, peut être intéressant pour certaines conditions expérimentales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Guillaume, P. Melon, Ph. Refregier, and Llebaria A., « Maximum likelihood estimation of an astronomical image from a sequence at low photon levels, » *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 2841–2848 (1998).
- [2] K.T. Knox and B.J. Thompson, « Recovery of images from atmospherically degraded short exposure images, » *Astrophys. J.* **192**, L45–L48 (1974).
- [3] R.L. Gilliland, P.D. Edmonds, L. Petro, A. Saha, and M.M. Shara, « Stellar variability in the central populations of 47 tucanae from w/fpc observations with the hubble space telescope. i. project overview, reduction techniques, and first results, » *Astrophysical Journal* **447**, 191–203 (1995).
- [4] J.A. Morse, « A method for correcting aspect solution errors in rosat hri observations of compact sources, » *Publication of the Astronomical Society of the Pacific* **106**, 675–682 (1994).
- [5] R.E. Sequeira, J.A. Gubner, and B. E. A. Sala, « Image detection using low-level illumination, » *IEEE Trans. Image Processing* **2**, 18–26 (1994).
- [6] D.L. Snyder and T.L. Schluz, « High resolution imaging at low-light levels through weak turbulence, » *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1251–1265 (1990).

- [7] B.D. Hall, D. Reinhard, and R. Monot, « Optimum rate for a ccd detector, » *Review of Scientific instruments* **66**, 2668–2671 (1995).
- [8] G.M. Morris, « Scene matching using photon-limited images, » *J. Opt. Soc. Amer. A* **1**, 482–488 (1984).
- [9] D.S. Lalush and M.W. Tsui, «The importance of preconditioners in fast poisson-based iterative reconstruction algorithms for spect, » in *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging*, P.A. Moonier, ed., IEEE, New-York **3**, 1326–1330 (1995).
- [10] J.M. Northcott, G.R. Ayers, and J.C. Dainty, « Algorithms for image reconstruction from photon-limited data using the triple correlation, » *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 986–992 (1988).
- [11] G.R. Ayers, M.J. Northcott, and J.C. Danty, « Knox-thomson and triple correlation through atmospheric turbulence, » *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 963–985 (1988).
- [12] R.G. Lane, « Blind deconvolution of speckle images, » *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 1508–1514 (1992).
- [13] E. Thiebaut and J.M. Conan, « Strict *a priori* constraints for maximumlikelihood blind deconvolution », *J. Opt. Soc. Am.* **12**, 485–492 (1995).
- [14] T.J. Schulz and D.L. Snyder, Imaging a randomly moving object from quantum-limited data : applications to image recovery from second and third-order autocorrelations, » *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 801–807 (1991).
- [15] T.J. Schulz, B.J. Stribling, and J.J. Miller, *Optics Express* **1**, 355–362 (1997).
- [16] P. Melon. Recalage d'images spatiales : Etude des solutions optimales au sens de théorie de la décision. Rapport de stage (dea os, Aix-Marseille III), Laboratoire Signal et Image ENSPM, 1997.

Manuscrit reçu le 23 juillet 1999.

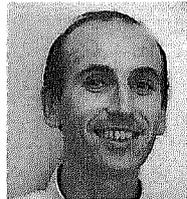
LES AUTEURS

Stéphanie CABANILLAS



Stéphanie Cabanillas est née en 1973. Elle est diplômée de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Recherche En Matériaux de l'Université de Bourgogne en 1997, et titulaire d'un DEA d'Instrumentation et d'Informatique de l'Image de l'Université de Bourgogne depuis 1997. Elle prépare une thèse de l'Université d'Aix-Marseille III en Traitement de l'Image à l'Institut Fresnel dans l'équipe Physique et Traitement de l'Image. Ses recherches portent sur l'approche bayésienne pour la reconstruction d'images astronomiques à partir de séquences d'images à faible niveau de photons.

Philippe RÉFRÉGIER



Philippe Réfrégier est diplômé depuis 1984 de l'Ecole Supérieure de Physique et Chimie Industrielles de la ville de Paris. Il a soutenu une thèse de l'Université de Paris Orsay en physique des solides en 1987. De 1987 à 1994, il a été membre du Laboratoire Central de Recherches de Thomson-CSF à Orsay. Depuis, il est professeur en traitement du signal à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille et anime l'équipe Physique et Traitement de l'Image de l'Institut Fresnel. Sa recherche porte principalement sur le traitement du signal et des images, la reconnaissance de formes et le traitement optique de l'information.

Mireille GUILLAUME



Mireille Guillaume est docteur en physique théorique de l'université Montpellier II, et ingénieur ISIM en automatique. Elle est actuellement maître de conférences à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille, où elle enseigne le traitement du signal. Elle effectue sa recherche en traitement d'images dans l'équipe Physique et Traitement de l'Image de l'Institut Fresnel, et ses domaines d'intérêt sont la reconstruction d'images astronomiques et l'estimation de paramètres dans des images multicanales.