

Surveillance des systèmes complexes à engrenages par l'analyse cepstrale synchrone

Monitoring of complex gear system by synchronous cepstral analysis

par M. EL BADAoui, F. GUILLET, J. DANIÈRE

LASPI, IUT de Roanne, Université Jean Monnet
20, av. de Paris, 42334 Roanne
laspi@univ-stetienne.fr

résumé et mots clés

Dans cet article nous étudions les possibilités offertes par le cepstre d'énergie en diagnostic vibratoire des réducteurs à engrenages. Nous présentons un modèle approché de structure des signaux issus d'un capteur accélérométrique, à partir duquel nous calculons partiellement l'expression théorique du cepstre d'énergie. Cette expression nous permet de définir un révélateur de défauts indépendant de l'amplitude des signaux, du rapport signal à bruit et de la position du capteur. Nous montrons que l'utilisation de signaux acquis sous échantillonnage angulaire permet au cepstre de conserver sa résolution maximale et autorise la réalisation de moyennes synchrones pour isoler chaque engrènement d'un réducteur complexe. Enfin nous présentons quelques applications de notre procédure de surveillance.

Cepstre d'énergie, engrenages, bruits, moyenne synchrone, séparation des engrènements.

abstract and key words

This article shows the possibilities offered by the use of energy cepstrum for gear box vibratory diagnosis. A model of the signals generated by an accelerometric sensor will be established on which the theoretical expression of the energy cepstrum is partially calculated. This will make it possible to develop a detection tool which we will neither be affected by the signal amplitude, nor the noise to signal ratio nor the position of the sensor. It is shown that the use of an angular sampled signal enables the cepstrum to preserve its full resolution and allows the realization of synchronous averaging to isolate each gear mesh. Some applications of the monitoring procedure are presented.

Power cepstrum, gear, noises, synchronous average, toothmeshing separation.

1. introduction

Le cepstre d'énergie introduit en 1963 par Bogert [1] fût d'abord utilisé pour la détection ou la suppression d'échos [2], [3] et [4]. Il est également utilisé en diagnostic vibratoire des machines tournantes [5], [6] et [7], car la présence de défauts induit dans les signaux à traiter des motifs récurrents (échos), souvent à

basses ou très basses fréquences. Dans ce même contexte, le cepstre est un précieux complément du spectre, car à l'inverse de ce dernier, il est d'autant plus précis que les fréquences sont basses, car sa variable générique est une période. Il est également d'autant plus sensible que les fréquences sont basses. En effet, en présence de plusieurs contributions périodiques dans le signal, la hauteur des pics apparaissant à chaque période est directement liée à l'énergie développée par chaque contribution pendant sa

période propre, donc directement liée à la période. Dans ce qui suit nous discutons des possibilités offertes par le cepstre d'énergie pour le diagnostic vibratoire des réducteurs à engrenages. Ce diagnostic est basé sur quelques propriétés d'invariance des pics du cepstre. Nous utilisons le fait que ces propriétés sont quasiment indépendantes de la nature des signaux pour calculer l'expression théorique des amplitudes et positions des pics exploités. Cette expression nous permet de définir un révélateur robuste d'avaries. Nous montrons que l'efficacité du cepstre est maximale lorsque les signaux traités sont acquis sous échantillonnage angulaire (analyse cepstrale synchrone) et que dans le cas de réducteurs complexes, l'échantillonnage angulaire permet par moyennage synchrone d'isoler chaque engrenement. Enfin nous présentons quelques cas de diagnostic par le cepstre.

2. modélisation des signaux reçus par le capteur

Les calculs que nous développons ont pour unique but de retrouver théoriquement certains comportements du cepstre d'énergie d'un signal accélérométrique prélevé sur un système comportant plusieurs engrenements. Ces comportements ont déjà été observés et utilisés en diagnostic [5], [6] et [7], à savoir que :

- 1) le cepstre comporte autant de peignes de pics positifs décroissants qu'il y a d'organes tournants dans le système. Ces peignes sont au pas de chacune des périodes de rotation.
- 2) l'existence d'un peigne de pics est exclusivement due à la présence d'une périodicité dans le signal.
- 3) l'amplitude d'un peigne augmente lorsque l'énergie émise par l'organe correspondant augmente, par exemple dans le cas où l'organe développe un défaut.
- 4) la somme des premiers pics de chaque peigne est constante, de ce fait lorsque l'amplitude d'un peigne augmente c'est au détriment des autres.

Compte tenu des remarques précédentes, la structure des signaux sera modélisée en utilisant les deux hypothèses suivantes :

- Le signal émis par un système complexe d'engrenages est la somme des signaux émis par chacun des organes tournants.
- le signal émis par un organe tournant est périodique à la période de rotation de cet organe.

Dans l'absolu, la deuxième hypothèse est fautive car une dent d'une roue quelconque ne se retrouvera pas, à chaque période de rotation, en contact avec les mêmes zones de matière des voisines. Cependant, elle tend à être vraie dans le cas limite où les roues présentent des défauts ponctuels : par exemple un défaut sur une dent, avec une parfaite homogénéité ailleurs sur les autres dents.

C'est précisément ce type de défauts (générant des signaux large bande) que peut mettre en évidence l'analyse cepstrale.

Dans le cas d'un seul engrenement, ce modèle de structure n'est pas en contradiction avec le modèle proposé par Capdessus [6] qui s'appuie sur les travaux de Mark [8]. Il a l'avantage par rapport à celui-ci, de permettre le calcul théorique du cepstre d'énergie. Cette modélisation sera justifiée a posteriori par une bonne concordance théorie expérience.

Nous exprimons donc le signal émis par un réducteur comportant M organes tournants par :

$$s(t) = \sum_{k=1}^M p_k(t) * em_{a_k} + b(t) \quad (1)$$

où $p_k(t)$ est le signal émis pendant la période a_k de l'organe tournant numéro k et em_{a_k} est un peigne de N_k impulsions de dirac au pas a_k que l'on appellera terme d'échos multiples exprimable par :

$$em_{a_k} = \sum_{n=0}^{N_k-1} \delta_{na_k} \quad (2)$$

N_k est tel que la durée du signal N_s est comprise entre $N_k a_k$ et $(N_k + 1) a_k$. $b(t)$ est un bruit indépendant des $p_k(t)$.

A partir des signaux synthétisés selon l'équation (1), il est possible de vérifier que les comportements 3) et 4) évoqués plus haut sont, en bonne approximation, indépendants de la nature des signaux $p_k(t)$ et ne sont donc liés qu'à leur répétitivité et leur énergie. Pour cela nous avons calculé le cepstre d'énergie d'un signal non bruité de taille 1024, comportant les périodicités 20 et 63, c'est-à-dire de la forme :

$$s = p_{20} * em_{20} + p_{63} * em_{63}.$$

Nous avons fait varier le rapport des énergies des deux contributions et ce pour trois types différents de signaux : p_{20} et p_{63} sont soit des diracs, soit des bruits blancs, soit une exponentielle et une sinusoïde amortie.

La figure 1 représente : en a) la hauteur relative du pic à la période 20 du cepstre de s et en b) la somme des premiers pics des deux peignes, le tout en fonction de la racine carrée de l'énergie relative c'est-à-dire de :

$$\sqrt{E(p_{20})} / (\sqrt{E(p_{20})} + \sqrt{E(p_{63})})$$

On peut en effet constater que les caractères du cepstre, utilisés en diagnostic sont relativement bien indépendants de la nature des signaux. On remarque que l'amplitude du pic à une période donnée est pratiquement proportionnelle à la racine carrée de l'énergie émise par l'organe tournant correspondant pendant cette période et que la somme des pics pour différentes périodes est pratiquement constante, égale à 0.5.

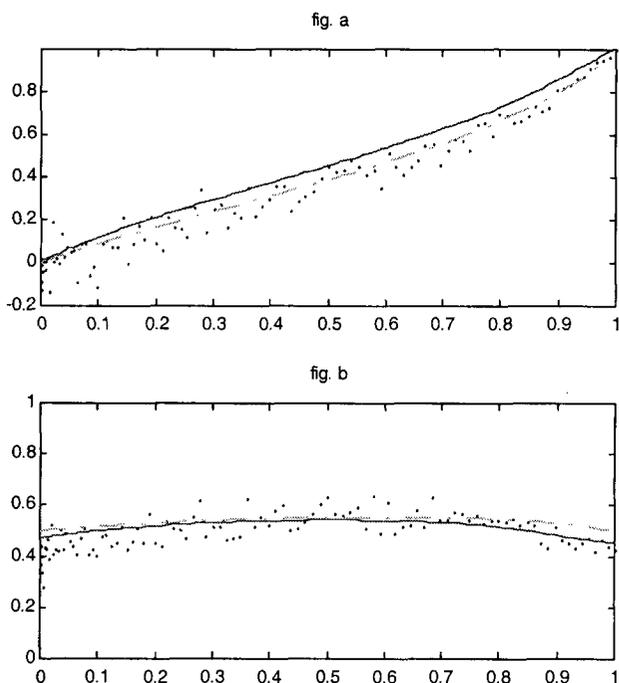


Figure 1. – A partir du cepstre d'un signal non bruité de taille 1024 et comportant les périodicités 20 et 63 et en fonction de la racine carré de l'énergie relative du signal p_{20} , en a) : la hauteur relative du pic à la période 20; en b) : la somme des pics aux périodes 20 et 63. En trait plein : p_{20} est une exponentielle et p_{63} une sinusoïde amortie. En trait pointillé p_{20} et p_{63} sont des diracs. En points : p_{20} et p_{63} sont deux réalisations différentes de bruits blancs gaussiens.

3. calcul du cepstre d'énergie des signaux d'engrènements

3.1. le cepstre d'énergie

Le cepstre d'énergie d'un signal $s(t)$ est défini par [3] :

$$\tilde{s} = TF^{-1} [\ln |S(\nu)|] \quad (3)$$

avec $S(\nu) = TF [s(t)]$, où le symbole TF représente la Transformation de Fourier.

Le cepstre d'énergie transforme le produit de convolution en addition, si $s = s_1 * s_2$ alors $\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$. Il a été utilisé au départ comme détecteur d'écho : si $s(t)$ est un signal contenant un motif et son écho de gain g , tel que $|g| \leq 1$ décalé de la quantité a alors :

$$s(t) = m(t) + g.m(t - a) = m * (\delta_0 + g.\delta_a) = m * e_{a,g} \quad (4)$$

On appellera $e_{a,g}$ le terme d'écho simple de décalage a et de gain g . Son cepstre d'énergie est donné par [9] :

$$e_{a,g}^{\sim} = \sum_{n \in Z^*} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot |n|} g^n \delta_{na} \quad (5)$$

Le cepstre d'énergie est pair, donc on somme sur Z^* , dans la suite on ne représentera que la partie $t \geq 0$. Numériquement si le décalage a correspond à un nombre entier d'échantillons, $e_{a,g}^{\sim}$ présente l'aspect d'un jeu de pics alternés, définis par un seul échantillon et distants de a . Le cepstre possède intrinsèquement une résolution temporelle optimale car les effets de bords n'existent pas pour la fonction $\ln |S(\nu)|$ puisqu'elle est réelle, paire et périodique de période unité en fréquence réduite. La figure 2 représente le cepstre d'énergie d'un terme d'écho simple de décalage a correspondant à 50 échantillons. L'allure du cepstre rend aisée l'estimation de a , surtout si le signal m est de type large bande : en effet si $|M(\nu)| = cte$, \tilde{m} se résume à un seul échantillon à l'origine. Si inversement on suppose m purement sinusoïdal de taille infinie, s l'est également donc \tilde{s} n'existe pas. De toute manière il est impossible de « voir » un écho dans une somme de deux sinusoïdes de taille infinie.

Le cepstre d'énergie d'un signal de durée finie est de durée infinie, en conséquence, le calcul numérique du cepstre utilisant la transformée de Fourier discrète sera soumis au repliement.

Dans le cas d'un écho distribué selon une distribution d , le terme d'écho sera noté $e_d = \delta_0 + d$, alors son cepstre d'énergie est donné par [9] :

$$\tilde{e}_d = \sum_{n \in Z^*} \frac{(-1)^{n-1}}{2 \cdot |n|} .d^{*n} \quad (6)$$

Où d^{*n} signifie que la distribution d est convoluée n fois par elle-même, là encore, le gain de l'écho $g = \int d(t)dt$ doit être inférieur ou égal à l'unité en module. La Figure 3 montre l'exemple du cepstre d'un écho distribué selon une porte centrée sur l'échantillon 50 calculé numériquement.

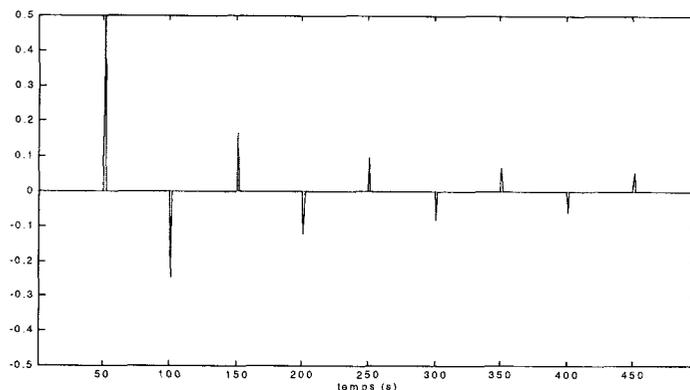


Figure 2. – Cepstre d'énergie d'un écho simple de décalage $a = 50$.

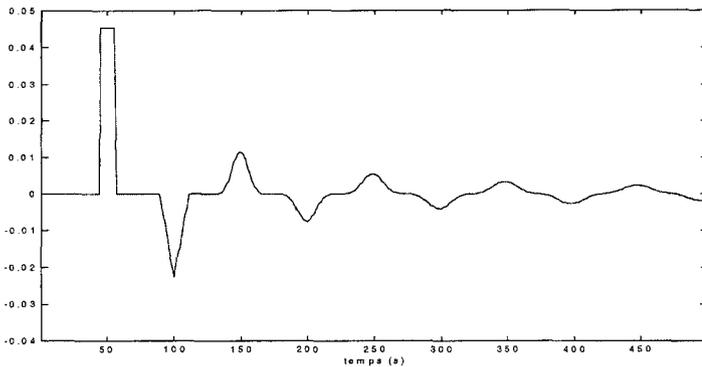


Figure 3. – Cepstre d'énergie d'un écho distribué selon une porte.

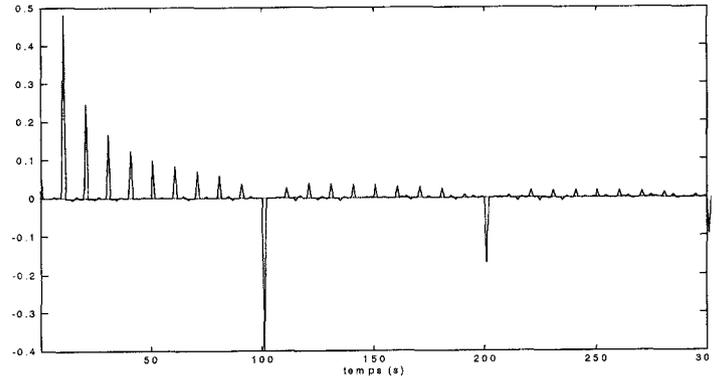


Figure 4. – Cepstre d'énergie (calculé numériquement) d'un écho multiple de période a=10

3.2. cepstre d'énergie du terme d'échos multiples

Le terme $em_a = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{na}$ possède comme transformée de fourier :

$$TF[em_a] = EM_a(\nu) = \frac{(1 - e^{-2\pi i \nu Na})}{(1 - e^{-2\pi i \nu a})} = \frac{TF[e_{Na,-1}]}{TF[e_{a,-1}]}$$

Où $e_{Na,-1}$ et $e_{a,-1}$ sont des termes d'écho simple de gain -1 et de décalage respectivement Na et a . En vertu de la définition (3) on aura :

$$e\tilde{m}_a = e_{N\tilde{a},-1} - e_{\tilde{a},-1}$$

c'est-à-dire :

$$e\tilde{m}_a = - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2 \cdot |n|} \cdot \delta_{nNa} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2 \cdot |n|} \cdot \delta_{na} \quad (8)$$

Ce cepstre est composé d'un peigne positif décroissant au pas a et d'un peigne négatif décroissant au pas Na . Pour illustrer ce résultat, la figure 4 représente le cepstre d'un terme d'écho multiple prolongé par des zéros jusqu'à une taille $N_s = 1024$ très supérieure à $Na = 100$ de manière à minimiser l'effet du repliement du peigne négatif.

Comme en réalité la taille du signal N_s est comprise entre $(N + 1)a$ et Na le peigne négatif sera replié en des positions dépendant de la valeur de N_s , en conséquence, seul le peigne positif est exploitable, dans la mesure où ses pics n'occupent pas des positions de repli. La figure 5 illustre le cas réaliste d'un cepstre d'échos multiples calculé numériquement sur une taille comprise entre $(N + 1)a$ et Na avec $N_s = 2048$ et $a = 30$.

Cas particulier où la taille du peigne est égale à la taille du signal ($N_s = Na$) : Dans ce cas em_a devient un peigne de diracs de pas a , de durée infinie, c'est-à-dire la distribution *cha*, que l'on notera pgn_a . Comme sa transformée de fourier est le *cha* fréquentiel son cepstre d'énergie n'existe pas puisqu'il dépend du logarithme d'une quantité nulle sur un support de mesure non nulle, à moins

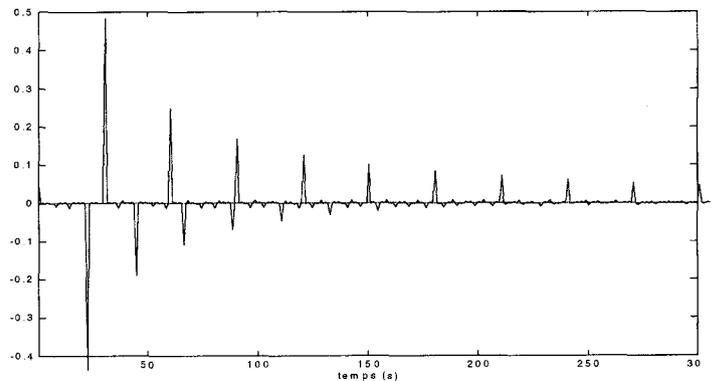


Figure 5. – Cepstre d'énergie d'un écho multiple calculé sur une taille $N_s = 2048$ tel que $Na < N_s < (N + 1)a$ et de période $a=30$.

que ce peigne soit accompagné d'une autre composante, que nous supposons blanche pour simplifier (impulsion ou bruit blanc). Si on note $pgn_{a,b}$ le *cha* additionné d'une composante blanche b de transformée de fourier $B(\nu)$, alors un rapide calcul conduit à :

$$TF[pgn_{a,b}(t)] = \frac{1}{a} \cdot PGN_{\frac{1}{a}}(\nu) + B(\nu) \quad (9)$$

Pour le cepstre d'énergie on calcule le logarithme de l'expression (9) on trouve alors :

$$\ln \left| \frac{1}{a} \cdot PGN_{\frac{1}{a}}(\nu) + B(\nu) \right| = \ln |B(\nu)| + \ln \left| 1 + \frac{1}{a \cdot B(\nu)} \right| \cdot PGN_{\frac{1}{a}}(\nu) \quad (10)$$

on en déduit donc

$$pg\tilde{n}_{a,b}(t) = \ln |B(\nu)| \cdot \delta_0 + a \cdot \ln \left| 1 + \frac{1}{a \cdot B(\nu)} \right| \cdot pgn_a(t) \quad (11)$$

Dans le contexte numérique, ce résultat dépend en fait étroitement de la taille N_s du signal, car dans le domaine fréquentiel l'impulsion de dirac est un échantillon de hauteur N_s , il faut donc

remplacer $\frac{1}{a}$ par $\frac{N_s}{a}$ (sauf en indice). C'est à dire utiliser la formule :

$$pgn_{a,b}(t) = \ln |B(\nu)| \cdot \delta_0 + \frac{a}{N_s} \cdot \ln \left| 1 + \frac{N_s}{a \cdot B(\nu)} \right| \cdot pgn_a(t)$$

Dans le cas où b est un bruit blanc gaussien d'écart type σ_b , et pour $\frac{N_s}{a \cdot B(\nu)} \gg 1$ ($\frac{N_s}{a}$ est toujours supérieur à 1).

alors, on a :

$$pgn_{a,b}(t) = \ln |B(\nu)| \cdot \delta_0 + \frac{a}{N_s} \left[\ln \left(\frac{N_s}{a} \right) - \ln |B(\nu)| \right] \cdot pgn_a(t) \quad (13)$$

$|B(\nu)|$ suit la loi de rayleigh et son espérance mathématique vaut : $E[|B(\nu)|] = \frac{1}{2} \sigma_b \sqrt{\pi N_s}$ on en déduit un estimateur pour $\ln |B(\nu)|$:

$$E[\ln |B(\nu)|] = \frac{\ln(N_s \cdot \sigma_b^2) - \gamma}{2} \quad (14)$$

avec $\gamma = 0.577215$ constante d'euler.

L'expression 13 devient :

$$pgn_{a,b}(t) = \frac{\ln(N_s \cdot \sigma_b^2) - \gamma}{2} \cdot \delta_0 + \frac{a}{N_s} \left[\ln \left(\frac{N_s}{a} \right) - \frac{\ln(N_s \cdot \sigma_b^2) - \gamma}{2} \right] \cdot pgn_a(t) \quad (15)$$

La figure 6 montre l'exemple d'un cepstre d'énergie calculé numériquement et estimé sur 100 réalisations du bruit additif, dans le cas particulier où $N_s = N \cdot a = 500$ avec $a = 50$. Le bruit blanc gaussien additionnel et d'écart type $\sigma_b = 0.01$. On vérifie que ce cepstre est composé d'un peigne de pics au pas a , d'amplitude constante égale à 0.407 (valeur théorique : 0.409) et d'un pic à l'origine ($t = 0$) d'amplitude -1.371 (valeur théorique -1.378).

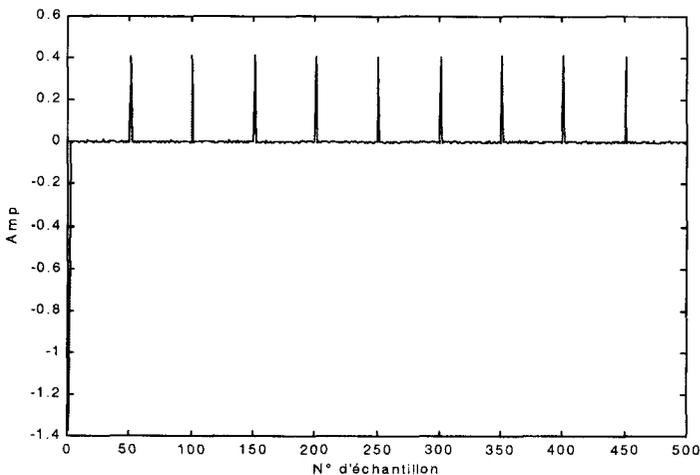


Figure 6 : Cepstre d'énergie d'un peigne de dirac de taille $N_s=500$, de période $a=50$ additionné à un bruit blanc gaussien d'écart type $\sigma_b=0.01$.

L'amplitude du peigne dépend de la période a et de la taille du signal, en conséquence ce cas particulier est à éviter dans le contexte du diagnostic qui est basé sur le suivi de l'amplitude des peignes du cepstre.

3.3. cepstre d'un signal d'engrèvements multiples non bruité

Dans ce cas le signal vibratoire est modélisé par :

$$s(t) = \sum_{k=1}^M p_k(t) * em_{a_k} \quad (16)$$

Le comportement des peignes du cepstre étant en bonne approximation indépendant de la nature des signaux, les calculs qui suivent seront simplifiés en utilisant à la place des $p_k(t)$, des diracs d'amplitude p_k , de transformées de Fourier constantes P_k . Cela revient également à supposer que si les $p_k(t)$ sont des bruits blancs, leurs transformées de Fourier sont constantes telles que : $P_k = E[|P_k(\nu)|]$

L'amplitude du signal n'affecte que la valeur à l'origine du cepstre, cette valeur ne présentant aucun intérêt pour le diagnostic, nous supposons pour alléger l'écriture que cette amplitude est telle que :

$$\sum_{k=1}^M P_k = 1 \quad (17)$$

Pour un signal de taille N_s remarquons que l'expression de $s(t)$ est incomplète, il y manque en effet les M périodes partielles complétant le signal de $N_k a_k$ à N_s . Nous allons montrer que la présence ou non de ces périodes partielles n'affectent pas la partie positive des peignes (partie utilisée pour le diagnostic). En effet, pour simplifier, si on se place dans le cas d'un seul organe tournant,

le signal complet s'écrit : $x(t) = p_1(t) * \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{na} + p_2(t) * \sum_{n=0}^N \delta_{na}$.

où $p_2(t)$ correspond au signal présent dans la dernière période partielle et où $p_1(t)$ correspond au complément à la période entière. Sa transformée de Fourier $X(\nu)$ a pour expression :

$$X(\nu) = \frac{1 - P_1 \cdot e^{-2\pi i \nu N a} - P_2 \cdot e^{-2\pi i \nu (N+1)a}}{1 - e^{-2\pi i \nu a}}$$

Comme dans le cas de l'équation (7), le dénominateur est responsable dans le cepstre du peigne positif décroissant au pas a . Le numérateur est considéré comme étant la transformée de Fourier d'un écho distribué sur deux échantillons négatifs de hauteurs P_1 à l'abscisse $N a$ et P_2 à l'abscisse $(N+1)a$. Cette distribution est responsable dans le cepstre de pics négatifs d'abscisse différent de na pour $n < N$, elle n'altère donc pas le peigne positif.

Revenons au cas du signal d'engrènement multiple non bruité modélisé par (16), sa transformée de Fourier s'écrit :

$$S(\nu) = \sum_{k=1}^M \frac{1 - e^{-2\pi i \nu N_k a_k}}{1 - e^{-2\pi i \nu a_k}} P_k \quad (18)$$

on a alors :

$$S(\nu) = \frac{\sum_{k=1}^M \left[P_k (1 - e^{-2\pi i \nu N_k a_k}) \prod_{j \neq k} (1 - e^{-2\pi i \nu a_j}) \right]}{\prod_{j=1}^M (1 - e^{-2\pi i \nu a_j})} \quad (19)$$

Le numérateur est de la forme $1 + \sum_j c_j \exp(-2\pi i \nu d_j)$ un calcul élémentaire sur ce polynôme montre que : $\sum_j c_j = -1$, c'est-à-dire la TF de $\delta_0 + \sum_j c_j \delta_{d_j} = \delta_0 + d$, donc d'un terme d'écho distribué selon d de gain -1 , alors : $S(\nu) = \frac{TF[e_d]}{\prod_{j=1}^M TF[e_{a_j, -1}]}$

Le cepstre d'énergie s'écrit donc :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^M \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2 \cdot |n|} \delta_{na_k} \right] - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2 \cdot |n|} \cdot d^{*n} \quad (20)$$

Le premier terme de cette expression montre qu'il existe dans \tilde{s} , M peignes positifs décroissants au pas a_k . Nous focalisons maintenant sur les M peignes décroissant au pas a_k caractéristiques de chaque organes tournants. En conséquence nous n'examinons de l'expression d^{*n} que les termes d'abscisses na_k capables d'altérer les peignes précédents, c'est-à-dire de ne retenir de d , que les termes d'abscisse a_k . La TF de ces termes se trouvent au numérateur, noté Num , de l'équation (19) dans lequel on élimine le terme $e^{-2\pi i \nu N_k a_k}$:

$$\begin{aligned} Num &= \sum_k \left[P_k \cdot \prod_{n \neq k} (1 - e^{-2\pi i \nu a_n}) \right] + \dots \\ &= \sum_k \left[P_k \cdot (1 - \sum_{n \neq k} e^{-2\pi i \nu a_n}) \right] + \dots \\ &= 1 - \sum_k \left[P_k \sum_{n \neq k} e^{-2\pi i \nu a_n} \right] + \dots \\ &= 1 - \sum_k \left[\left(\sum_{n \neq k} P_n \right) e^{-2\pi i \nu a_k} \right] + \dots \\ &= 1 - \sum_k [(1 - P_k) \cdot e^{-2\pi i \nu a_k}] + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$S(\nu) = \frac{1 - \sum_{k=1}^M [(1 - P_k) \cdot e^{-2\pi i \nu a_k}] + \dots}{\prod_{j=1}^M (1 - e^{-2\pi i \nu a_j})} \quad (21)$$

Donc le cepstre du signal s'écrit :

$$\tilde{s}(t) = \sum_{k=1}^M \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{2 \cdot |n|} \delta_{na_k} - \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(1 - P_k)^n}{2 \cdot |n|} \cdot \delta_{na_k} \right] + \dots \quad (22)$$

La partie explicitée de ce résultat est la partie exploitable \tilde{s}_e de \tilde{s} . Seul y apparaissent les termes participant à l'édification de la partie positive du peigne associé à chaque périodicité. Cette partie exploitable \tilde{s}_e est donnée par :

$$\tilde{s}_e(t) = \sum_{k=1}^M \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1 - (1 - P_k)^n}{2 \cdot |n|} \cdot \delta_{na_k} \right] \quad (23)$$

On y retrouve M peignes positifs décroissants au pas a_k caractéristiques de chaque organe en rotation.

Pour illustrer ces résultats, nous calculons le cepstre d'énergie d'un signal simulé sur la base de l'équation (16) avec $M = 2$. Les $p_k(t)$ sont des bruits blancs, gaussiens, d'écart type σ_k . On remplace P_k par l'espérance mathématique du module de la TF de $p_k(t)$, alors compte tenu de la condition (17) cela revient à écrire :

$$P_k = \frac{\sigma_k \sqrt{a_k}}{\sum_{i=1}^M \sigma_i \sqrt{a_i}} \quad (24)$$

On constate que l'équation (23) reproduit bien la partie exploitable du cepstre, comme en témoigne la figure 7 qui exhibe les 10000 premiers points du cepstre d'énergie calculé sur 65535 points d'un

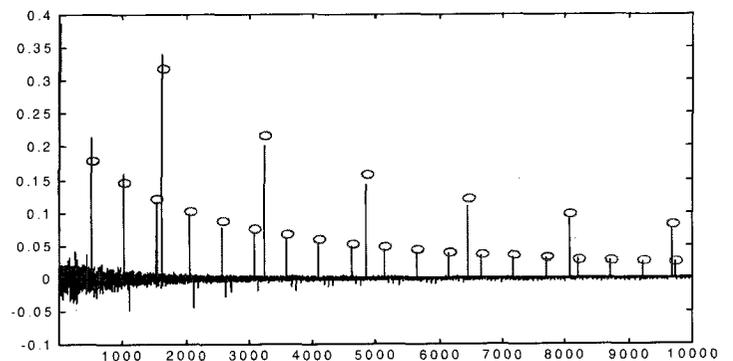


Figure 7. – Cepstre d'énergie d'un signal construit selon l'équation (1) sans le bruit. Les « O » représentent les positions théoriques des sommets des pics cepstraux.

signal contenant les deux périodicités 512 et 1613, p_1 et p_2 sont d'écart type unité. Les « 0 » indiquent la position théorique des sommets des pics cepstraux selon l'équation (23).

Le premier pic de chaque peigne a pour amplitude $A_k = P_k/2$, cette amplitude est proportionnelle à la racine carrée de l'énergie émise pendant une période a_k par l'organe tournant k . On remar-

que que la somme des M premiers pics définie par : $spp = \sum_{k=1}^M A_k$,

a pour valeur 0.5. Ce résultat remarquable est utilisé pour faire du diagnostic : lorsque un organe tournant à la période a_i développe un défaut, l'énergie qu'il émet augmente, donc le pic cepstral d'abscisse a_i augmentera au détriment des pics d'abscisse $a_{k \neq i}$.

3.4. cepstre du signal d'engrètements multiples en présence de bruit

Le calcul du cepstre d'énergie d'un signal additionné d'un bruit est un problème complexe et non complètement résolu [10]. Nous esquissons ici le calcul du cepstre d'énergie d'une combinaison linéaire d'échos multiples en présence de bruit. Ce calcul a pour objectif d'expliquer l'évolution de la somme des premiers pics spp en fonction du rapport signal à bruit.

Le signal est alors exprimé par l'équation (1) où $b(t)$ est un bruit indépendant des p_k .

En reprenant l'équation (21) on peut dire que sa transformée de Fourier a pour expression :

$$S(\nu) = \frac{1 - \sum_{k=1}^M [(1 - p_k) \cdot e^{-2\pi i \nu a_k}] + \dots}{\prod_{i=1}^M (1 - e^{-2\pi i \nu a_i})} + B(\nu) \quad (25)$$

Si $b(t)$ est blanc, supposé de TF constante B , un calcul semblable au précédent montre que la partie exploitable du cepstre est donnée par :

$$\tilde{s}_e(t) = \sum_{k=1}^M \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1 - \left(\frac{1 - P_k + B}{1 + B} \right)^n}{2 \cdot |n|} \cdot \delta_{na_k} \right] \quad (26)$$

Le bruit a pour effet de diminuer l'amplitude des peignes, en particulier, les premiers pics de chacun d'eux ont pour amplitude $A_k = P_k/2 \cdot (1 + B)$ et leur somme vaut :

$$spp = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + B} \quad (27)$$

Elle ne dépend donc que du rapport signal à bruit, si $b(t)$ est blanc gaussien, d'écart type σ_b , en estimant B comme les P_k on

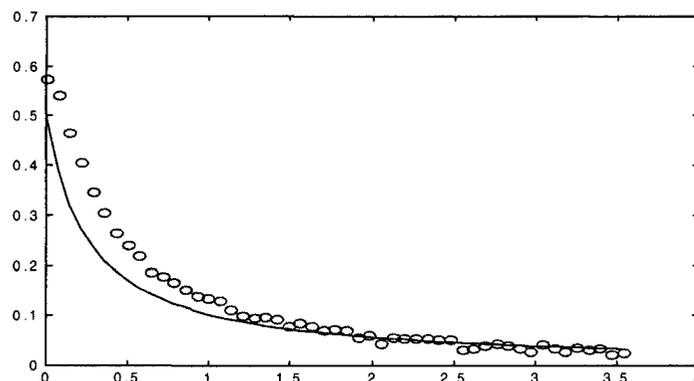


Figure 8. – Somme des premiers pics cepstraux spp d'un signal comportant 2 périodicités 512, et 1613 en fonction du rapport des écarts type bruit à signal. La courbe continue représente l'estimation théorique de la spp .

prendra :

$$B = \frac{\sigma_b \sqrt{N_s}}{\sum_{k=1}^M \sigma_k \sqrt{a_k}} \quad (28)$$

la figure 8 représente l'évolution de la somme des premiers pics cepstraux d'un signal construit selon l'équation (1), dont les périodes a_k sont égales à 512 et 1613. Les simulations sont faites pour des signaux $p_k(t)$ qui sont des bruits blancs gaussien (le signal) auxquels on a additionné un bruit blanc gaussien indépendant (le bruit). En abscisse, nous avons le rapport des écarts type bruit sur signal.

Notons qu'en réalité la chute de la spp peut être due non seulement au bruit de mesure, mais aussi à la présence dans le signal acquis d'une partie indépendante des engrètements, par exemple les bruits de roulements.

3.5. utilisation du cepstre d'énergie pour le diagnostic

De nombreuses simulations nous ont permis de constater que les expressions théoriques obtenues précédemment reproduisent assez bien les cepstres calculés lorsque $M = 2$, mais de moins en moins bien lorsque M augmente. Cependant les caractères essentiels du cepstre révélés par nos calculs demeurent : l'amplitude des premiers pics est proportionnelle à la racine des énergies développées pendant une période et leur somme ne dépend que du rapport signal à bruit.

Numériquement les pics cepstraux sont matérialisés par un ou deux échantillons au plus à condition que les périodes successives de chaque organe tournant soient rigoureusement constantes. Dans le cas réel si les périodes admettent une distribution quelconque, il convient d'associer aux amplitudes figurant dans l'équation (26), les surfaces des pics cepstraux expérimentaux. Ce fait peut être justifié aussi bien par l'équation (6) qui montre que le premier pic du cepstre reproduit la distribution d'un écho simple,

que par l'équation (26) qui peut être interprétée comme la partie positive du cepstre d'un écho multiple à période distribuée. S'il y a élargissement d'un pic, il y aura alors réduction de sa hauteur dans la même proportion, c'est-à-dire un risque de disparition dans le bruit. En conséquence, pour préserver la résolution optimum du cepstre nous préconisons son utilisation sur des signaux acquis sous échantillonnage angulaire grâce à l'emploi d'un codeur optique incrémental placé sur l'arbre d'entrée du réducteur; de cette manière, les périodes angulaires sont constantes et indépendantes d'éventuelles variations de vitesse de rotation [11].

L'échantillonnage angulaire procure également l'avantage important de pouvoir isoler dans un système complexe d'engrenages, chacun des engrenements, individuellement, par moyennage synchrone : le signal est divisé en sections dont la taille correspond à l'angle développé par un nombre de dents égal au plus petit commun multiple (*ppcm*) des nombres de dents de chacune des deux roues participant à l'engrènement, la moyenne de ces sections est constructive pour la participation de chacune de ces roues et destructrice pour les autres et pour le bruit. La surveillance d'un système complexe revient alors à calculer le cepstre correspondant à chaque engrènement isolé de la manière précédente, ce qui revient à se placer chaque fois dans le cas $M = 2$. Il est alors possible de définir comme révélateur de défaut l'évolution temporelle de la différence relative des surfaces normalisées des deux premiers pics associés à chaque roue :

$$d(t) = \frac{\frac{A_1(t)}{A_1(0)} - \frac{A_2(t)}{A_2(0)}}{\frac{A_1(t)}{A_1(0)} + \frac{A_2(t)}{A_2(0)}} \quad (29)$$

où $A_1(t)$ et $A_2(t)$ sont les surfaces des pics dont les abscisses sont les périodes des roues 1 et 2.

On suppose qu'à $t = 0$ le réducteur ne présente aucun défaut, $d(t)$ tend vers -1 lorsque la roue 2 présente un défaut, et vers $+1$ lorsqu'il s'agit de la roue 1. Remarquons que $d(t)$ peut rester proche de zéro lorsque les deux roues développent chacune simultanément un défaut, ce fait (peu probable) peut être révélé en suivant la somme des amplitudes : $s(t) = A_1(t) + A_2(t)$: dans ce cas, le rapport signal à bruit augmente et $s(t)$ tendra vers 0.5. Dans le cas d'un système à plusieurs engrènements cette ambiguïté peut être facilement levée en examinant les engrènements voisins. En général l'indicateur $d(t)$ révélera un défaut s'il dépasse un seuil fixé en fonction de l'écart type sur son estimation, cet écart type (difficile à prévoir théoriquement) peut être évalué expérimentalement pendant une phase de fonctionnement sain du réducteur.

Dans le cas $M = 2$, nous avons constaté un accord théorie-simulations satisfaisant, nous verrons plus loin (applications) que l'accord théorie-expériences est également assez bon. En conséquence nous pouvons dire qu'en moyenne le révélateur d est indépendant de l'amplitude du signal global, de la position du capteur et du rapport signal à bruit. Par contre, sa variance dépend du rapport signal à bruit.

4. applications

4.1. réducteur à deux trains d'engrenages

Les résultats présentés ici ont uniquement pour but de montrer l'allure de cepstres d'énergie obtenus à partir de signaux expérimentaux, ainsi que la séparation des engrènements dans un système complexe. Lors de cette expérience aucun défaut n'a été enregistré.

Les acquisitions ont été réalisées sur un réducteur à denture hélicoïdale comportant deux trains d'engrenages (figure 9). Les signaux ont été acquis sous échantillonnage angulaire à 512 échantillons par tour de l'arbre moteur. Pour étudier de manière indépendante l'état de fonctionnement de chaque train d'engrenages, le cepstre d'énergie a été calculé à partir du même signal, après moyennage synchrone adapté à chacun d'eux.

La figure 10 correspond au cepstre d'énergie du signal vibratoire moyenné de manière synchrone selon le *ppcm* du premier engrènement. On fait apparaître ainsi les informations relatives à cet engrènement seulement. On reconnaît les deux peignes de pics associés aux roues R1 et R2 respectivement de périodes 512 et 1613. La figure 11 représente le cepstre d'énergie du signal

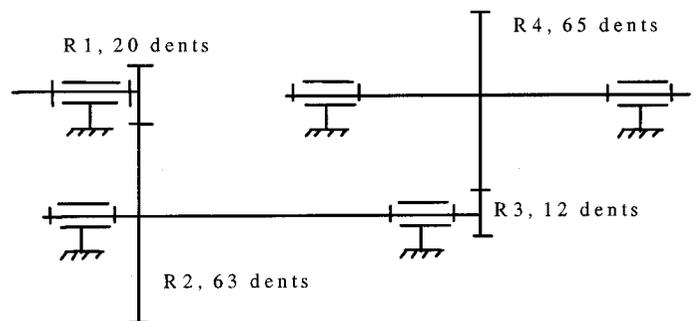


Figure 9. - Schéma cinématique du réducteur à deux trains d'engrenage.

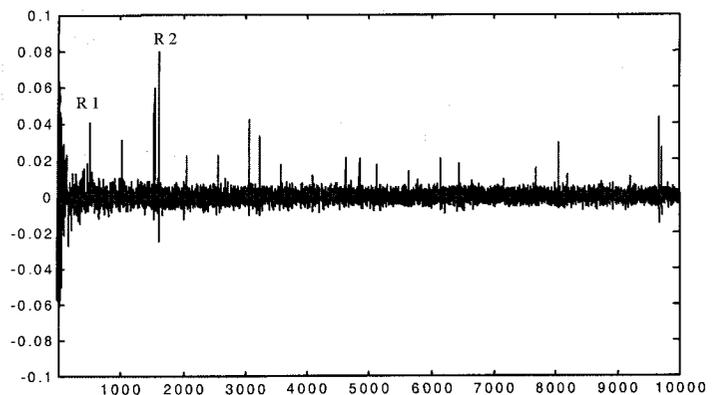


Figure 10. - Cepstre d'énergie calculé sur le signal vibratoire moyenné selon le *ppcm* du premier engrènement.

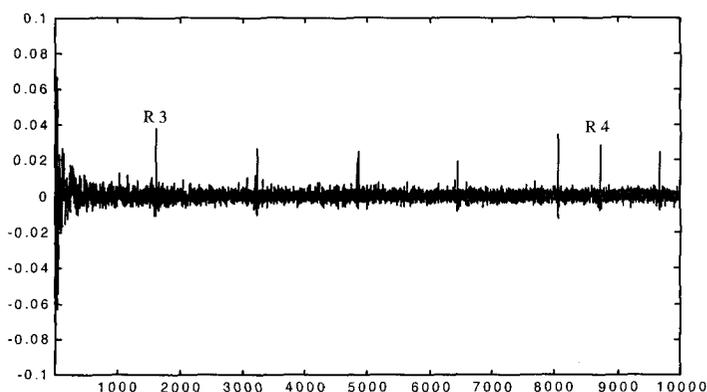


Figure 11. – Cepstre d'énergie calculé sur le signal vibratoire moyenné selon le ppcm du second engrenage.

moyenné selon le ppcm du second engrenement, on y reconnaît le peigne associé à la roue *R3* de période 1613 et le premier pic du peigne associé à la roue *R4* de période 8736.

4.2. réducteur à un train d'engrenages, cas de signaux très peu bruités

Les acquisitions ont été effectuées au CETIM¹ sur un réducteur à un train d'engrenages 20/21 fonctionnant 24h/24h jusqu'à sa destruction. L'essai a duré 12 jours avec une expertise mécanique journalière, les mesures ont été recueillies toutes les 24 heures. Ces signaux ont déjà été utilisés en plusieurs occasions pour essayer de définir des procédures de diagnostic [6] et [12]. La figure 12 montre l'évolution des pics cepstraux (A_1 et A_2), de leur somme et du révélateur $d(t)$ en fonction des jours d'acquisition. On constate que le pic cepstral de la roue qui développe le défaut (A_1) augmente au détriment de l'autre. La somme des premiers pics toujours voisine de 0.5 nous indique que les signaux

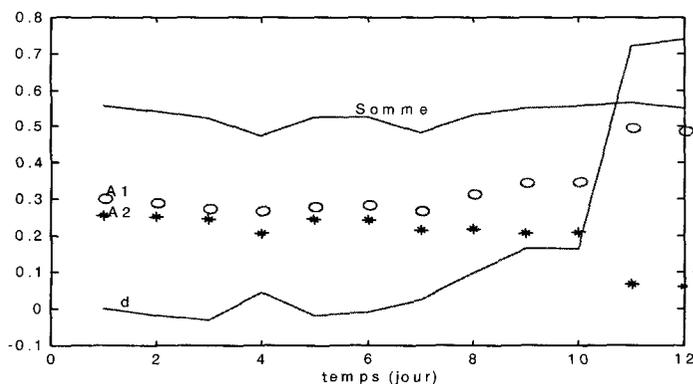


Figure 12. – Evolution des pics cepstraux A_1 , A_2 , de leur somme et du révélateur d en fonction des jours d'acquisition.

1. CETIM : Centre d'Etudes Techniques des Industries Mécaniques, 52 av. Felix Louat, 60300 senlis..

traités sont très peu bruités. On constate que l'évolution de la différence relative $d(t)$ indique clairement qu'à partir du huitième jour, la roue 1 développe un défaut. Ce résultat concorde avec le constat de l'expertise faite sur ce réducteur, qui indique, ce huitième jour l'apparition d'un début d'écaillage sur la dent 15/16. La performance de notre révélateur est alors comparable à la meilleure procédure définie dans la référence [12] : le test de sphéricité. Signalons que dans la référence [6] le cepstre d'énergie a été utilisé d'une manière qualitative seulement.

4.3. réducteur à un train d'engrenages, cas de signaux bruités

Les signaux accélérométriques ont été acquis à EDF

Etude et Recherche de Chatou² sur un réducteur à un train d'engrenages 56/15 à 15 dates différentes. Ces signaux ont été acquis et déjà exploités par Fontanive en 1992 [Fontanive]. La figure 13 montre l'évolution des pics cepstraux, de leur somme et du révélateur d en fonction des numéros d'essais.

Entre le premier et le neuvième essai, il n'y a pas de défaut apparent et la somme des premiers pics est pratiquement constante et voisine de 0, 15. Cette faible valeur indique qu'il s'agit de signaux fortement bruités, ou comportant une contribution indépendante de l'engrènement. On remarque qu'au dixième essai, un défaut apparaît sur la roue 56 dents, le signal accélérométrique augmente par rapport au bruit (supposé de variance constante), en conséquence la somme des surfaces des premiers pics se rapproche de 0, 5.

Ces résultats correspondent à ceux de la référence [7], obtenus également à partir du cepstre d'énergie. Nous apportons en plus une justification théorique de ces résultats et la définition d'un indicateur indépendant de nombreux paramètres (position capteur, bruits, amplitude des signaux).

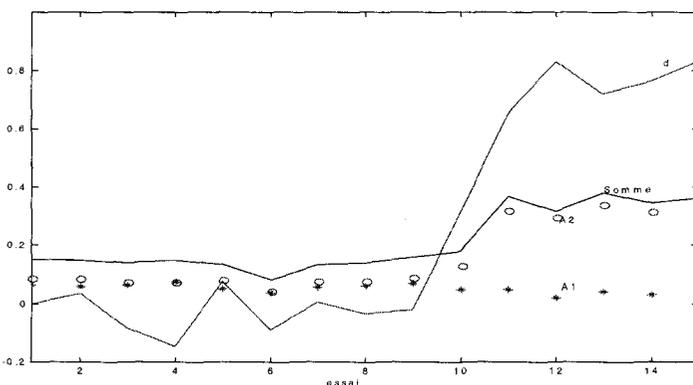


Figure 13. – Evolution des pics cepstraux A_1 , A_2 , de leur somme et du révélateur d en fonction des numéros d'essais.

2. EDF, Etudes et Recherches, 6 quai Watier Chatou.

5. conclusion

Les travaux que nous avons présentés, confirment que le cepstre d'énergie se révèle être un outil efficace, pour la surveillance des engrenages. Nous apportons, par rapport aux travaux antérieurs sur ce sujet, une justification théorique de la forme du cepstre d'énergie des signaux d'engrènement. Les résultats obtenus sont cohérents avec les observations expérimentales et permettent de définir un révélateur d'avaries très robuste, puisqu'il est indépendant de l'amplitude des signaux, du rapport signal à bruit (excepté pour sa variance) et de la position du capteur.

Ce révélateur présente une efficacité maximale lorsque les signaux traités sont acquis sous échantillonnage angulaire ce qui nécessite l'emploi d'un codeur optique. Dans ce cas la résolution cepstrale est maximale et il est possible, à partir du même signal, d'isoler chacun des engrènements par moyennage synchrone. Dans ce contexte un seul capteur peut être employé s'il est judicieusement placé pour « entendre » tous les engrènements.

L'outil que nous venons de définir n'est pas adapté à un diagnostic absolu et ponctuel, mais est plutôt destiné au suivi de réducteurs en cours d'utilisation. Il peut cependant rendre service en fin de chaîne de fabrication si le révélateur d est initialisé à partir d'un lot de réducteurs sains.

L'expérience tend à montrer que dans un réducteur en exploitation ce sont les défauts de roulements ou de paliers qui surgissent avant les défauts de dentures. L'isolement d'un engrènement par moyenne synchrone permettra la détection de ces défauts sur les deux axes concernés, à condition que leurs périodes soient des multiples entiers de la période de rotation, ce qui est le cas de certains défauts d'instabilités [14]. Par exemple, un défaut dont la période d'apparition est le double de la période de rotation provoquera une augmentation des pics cepstraux numéros 2,4,6,... du peigne associé à l'arbre concerné. Il peut donc être judicieux d'évaluer la quantité $d(t)$ non seulement pour les premiers pics cepstraux mais également pour quelques uns des pics suivants.

Nous poursuivons actuellement nos travaux, d'une part pour améliorer l'expression théorique du cepstre d'énergie des signaux d'engrènements en utilisant des modèles plus réalistes, et d'autre part pour améliorer le rapport signal à bruit au niveau du cepstre expérimental.

6. remerciements

Nous remercions le CETIM de Senlis et EDF, Etudes et Recherches de Chatou, pour avoir mis gracieusement à notre disposition les signaux accélérométriques acquis sur leurs bancs d'essais.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.P. Bogert, M.J.R. Healy, J.W. Tukey, "The quefrequency analysis of time series for echoes : Cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking", Proc. symp. time series analysis, M. Rosenblath (ed.), New York, Woley, 1963, pp 209-243.
- [2] D. G. Childers, D. P. Skinner, R. C. Kemerait, "The cepstrum : A guide to processing", Proceeding of the IEEE, vol. 65, No 10, October 1977.
- [3] A. V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, "Discrete-time signal processing", Prentice-Hall, p 815, Inc 1989.
- [4] J. T. Kim, R.H. Lyon, "Cepstral analysis as a tool for robust processing, deconvolution and detection of transients", Mechanical Systems and Signal Processing (1992) 6(1), 1-15.
- [5] R. B. Randall, "Cepstrum analysis and gearbox fault diagnosis", Edition 2, bulletin technique Brüel & Kjaer application note, 1980, pp. 1-19.
- [6] C. Capdessus, M. Sidahmed, "Analyse des vibrations d'un engrenages : cepstre, corrélation, spectre", Traitement du signal vol 8 N° 5 p 365 1992.
- [7] C. Fontanive, P. Prieur, "Surveillance et diagnostic des engrenages", Conférence internationale SFA/SFM, Senlis 27-29 octobre 1992 p 639.
- [8] W. D. Mark, "Analysis of the vibratory excitation of gear système : Basic theory", J. Acoust. Soc. Am., Mai 1978, vol. 63(5), pp. 1409-1430.
- [9] T. Fournel, J. Danière, M.J. Pigeon, M. Courbon, J. P. Schon, "Utilisation du cepstre d'énergie pour la vélocimétrie par images de particules", Traitement du signal vol.9 n°3 pp 267-271, 1992.
- [10] J. C. Hassab, R. Boucher, "A probabilistic analysis of time delay extraction by the cepstrum in stationary gaussian noise", IEE Transactions on information theory, vol IT 22 N° 4 July 1976.
- [11] F. Crapart, "Implantation d'algorithmes rapides sur processeur de traitement du signal. Application à l'analyse vibratoire de machines tournantes", Thèse de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, 1995.
- [12] K. Drouiche, M. Sidahmed, Y. Grenier, "Détection de défauts d'engrenages par analyse vibratoire", Traitement du signal vol. 8 N° 5 p 331-343, 1992.
- [13] R. Bigret, J. L. Féron, "diagnostic, maintenance disponibilité des machines tournantes", Collection technologies ed. Masson 1995, pp 40-73.

Manuscrit reçu le 2 avril 1998.

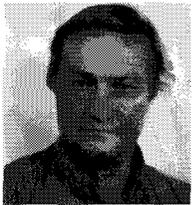
LES AUTEURS

M. EL BADAOUI



Docteur en électronique spécialité traitement du signal de l'Université Jean Monnet de St-Etienne, il est également ingénieur de l'Institut Supérieur des Technique Avancée de St-Etienne (ISTASE 1996). Il a soutenu en 1999 sa thèse de doctorat au LASPI à l'IUT de Roanne. Ses thèmes de recherches concernent plus particulièrement le diagnostic des machines tournantes par l'analyse vibratoire.

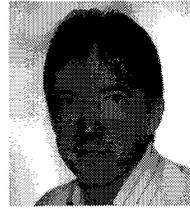
J. DANIÈRE



Docteur ès Sciences (1977 Université Lyon I), Joannes Danière est Professeur (depuis 1988) à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne (UJM), où il enseigne l'automatique et le traitement numérique du signal. De 1966 à 1978, à l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, ses recherches concernaient la spectroscopie nucléaire. A partir de 1979, au Laboratoire TSI de l'UJM, ses travaux ont porté, jusqu'en 1990, sur l'étude et la réalisation de capteurs et procédés de contrôle (contrats industriels); puis sur le traitement

d'image pour la mécanique des fluides jusqu'en 1994. Depuis 1995 il a pris la direction du Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus Industriel, de l'UJM à Roanne (LASPI), créé la même année, où ses activités portent sur le diagnostic vibratoire des machines tournantes.

F. GUILLET



Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble en 1990 en traitement du signal et automatique, François Guillet a été recruté en 1991 à l'IUT de Roanne établissement rattaché à l'Université Jean Monnet de St-Etienne. Enseignant en électronique et automatique et chef de département maintenance industrielle jusqu'en 1994, il a contribué à la création d'un laboratoire de recherche à Roanne (LASPI). Les activités de recherches en traitement d'antenne (application à la sismique) ont été réorientées vers le

diagnostic de machines tournantes, les travaux actuels concernent le traitement de signaux cyclostationnaires acquis de manière synchrone.