

Estimation de signaux chirp à amplitude variant dans le temps

Parameter estimation for chirp signals with deterministic time-varying amplitude

par François VINCENT et Olivier BESSON

ENSICA,
Département Avionique et Systèmes,
1 Place Émile Blouin, 31056 Toulouse.
Fax : 05 61 61 86 86.
Email : vincent,besson@ensica.fr

résumé et mots clés

Nous traitons dans cet article de l'estimation de signaux chirp dont l'amplitude, déterministe, varie dans le temps. Nous proposons une alternative à l'estimateur du Maximum de Vraisemblance qui est plus simple d'un point de vue calculatoire. Pour ceci, nous utilisons le principe d'invariance étendu qui permet de scinder le problème de minimisation et de découpler l'estimation des paramètres de phase de celle des paramètres d'amplitude. Dans un premier temps, en utilisant un modèle moins détaillé pour le signal, c'est-à-dire en considérant que tous les échantillons de l'amplitude sont à estimer, on obtient de manière simple les paramètres de phase. Les paramètres d'amplitude sont ensuite estimés par une technique des moindres carrés. La procédure permet d'obtenir des estimateurs asymptotiquement efficaces. Des simulations numériques viennent valider l'étude théorique.

Amplitude variant dans le temps, maximum de vraisemblance, principe d'invariance étendu.

abstract and key words

We consider the problem of estimating the parameters of chirp signals with deterministic time-varying amplitude. A method which is computationally simpler than the Maximum Likelihood estimator is proposed. It invokes the extended invariance principle to split the minimization problem and to decouple estimation of the phase parameters from that of the amplitude parameters. In a first step, using a less detailed model for the signal, a simple scheme for estimating the phase parameters is presented. Then, amplitude parameters are obtained from least-squares minimization techniques. The overall procedure provides asymptotically efficient estimates. Numerical simulations attest to the validity of the theoretical analysis.

Chirp signals, time-varying amplitude, maximum likelihood estimation, extended invariance principle.

1. introduction et position du problème

Dans cet article, nous considérons l'estimation des paramètres du modèle suivant

$$x(t) = \alpha(t; \eta_\alpha) e^{i\phi(t; \eta_\phi)} + n(t) \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

dans lequel $\alpha(t; \eta_\alpha)$ est l'amplitude réelle déterministe du signal, dépendant d'un vecteur paramètre η_α , $\phi(t; \eta_\phi)$ désigne la phase du

signal et $n(t)$ est un bruit blanc complexe, circulaire et Gaussien de variance σ^2 . Ce type de signal se rencontre dans le domaine du radar. Nous considérons, par exemple, le cas où l'on souhaite compter le nombre de débris spatiaux en orbite basse traversant le lobe d'antenne d'un radar pointé dans une direction fixe (« Beam Park » mode) [Vincent *et al.*, 1999]. Lorsque l'objet traverse le lobe d'antenne, et après compression d'impulsion, le signal reçu pourra être modélisé sous la forme de l'expression (1). Le terme de phase $\phi(t; \eta_\phi)$, que l'on approxime généralement par une fonction polynomiale du temps, porte des informations sur la vitesse et l'accélération de l'objet [Le Chevalier, 1989] [Rihaczek, 1996].

Le terme $\alpha(t; \eta_\alpha)$, de modulation de lobe d'antenne, contient les informations sur la position et la vitesse angulaire de l'objet en site et en gisement. Les signaux du type (1) se trouvent également dans le domaine de l'anémométrie laser [Besson & Galtier, 1996] quand on cherche à mesurer la vitesse de particules dans un écoulement. On génère à l'aide d'une diode laser un réseau d'interfranges lumineuses et obscures équidistantes; le terme $\alpha(t)$ représente l'intensité du faisceau laser à l'intérieur du volume de mesure et η_ϕ prend en compte la variation de phase induite par une particule de vitesse V traversant le réseau d'interfranges. Dans le même ordre d'idée, la mesure de champs de température à des fins de caractérisation de matériaux induit des signaux du type (1) [Gervaise *et al.*, 1997]. En effet, si l'on excite de façon périodique un matériau, le champ de température mesuré par un détecteur infrarouge sur la face opposée au chauffage présente une composante périodique dont le module et la phase dépendent de la fréquence d'excitation et des propriétés thermiques du matériau. Si donc on effectue des mesures à des fréquences d'excitation différentes, on obtient un signal du type (1). D'autres applications peuvent être trouvées, e.g. dans les manuscrits de thèse [Zhou, 1995]-[Ouldali, 1998].

Récemment, de très nombreux articles ont été consacrés à l'étude du modèle (1). On distingue en fait deux grandes classes de problèmes qui correspondent au cas $\alpha(t)$ aléatoire et au cas $\alpha(t)$ déterministe. Dans le premier cas, l'amplitude est souvent perçue comme un phénomène gênant et ainsi assimilée à un bruit multiplicatif. Dans l'hypothèse où l'amplitude est déterministe, $\alpha(t)$ fait souvent partie intégrante du signal utile.

Un certain nombre de méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres de phase d'un signal noyé dans un bruit multiplicatif (voir [Zhou, 1995], [Ghogho, 1997], [Ouldali, 1998] et les références incluses pour une synthèse du problème et un panorama des méthodes). Tout d'abord, le cas où $\alpha(t)$ est un bruit blanc a été étudié et seules des techniques fondées sur les statistiques d'ordre supérieur sont à même de résoudre le problème [Dwyer, 1991] [Swami, 1994] [Zhou, 1994]. Dans la référence [Swami, 1994], Swami recense de façon quasi-exhaustive les différents moyens d'estimer les paramètres du signal en fonction des hypothèses émises sur le bruit multiplicatif et sur le signal utile. [Ouldali & Benidir, 1997b], [Ouldali & Benidir, 1997a] et [Ouldali, 1998] introduisent une modification de la Transformée de Phase Polynomiale (transformée sur le carré du signal) à des fins de détection et de caractérisation d'harmoniques dans un bruit multiplicatif blanc, de moyenne nulle ou non. On s'est ensuite focalisé sur le cas où $\alpha(t)$ est un processus stationnaire coloré, par exemple de type autorégressif (AR). Les Bornes de Cramér-Rao (BCR) ont été calculées par Francos et Friedlander [Francos & Friedlander, 1995] dans le cas où $\alpha(t)$ est un processus Gaussien dont la matrice de covariance dépend d'un nombre fini de paramètres et où la phase s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de base. Une extension des BCR à un modèle plus général peut être trouvée dans [Ghogho *et al.*, 1999a] et d'autres travaux dans la référence [Zhou & Giannakis, 1995a]. La référence [Ghogho & Garel, 1999]

présente, dans le cas d'un bruit multiplicatif autorégressif, un estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV). Celui-ci étant, en général, complexe d'un point de vue calculatoire, de nombreux auteurs se sont tournés vers des alternatives plus simples. Des estimateurs fondés sur les équations de Yule-Walker [Besson & Catanié, 1993] sont envisagés lorsque l'amplitude est un processus AR. De même, les méthodes utilisant des décompositions en sous-espaces, bien que conduisant à des estimateurs biaisés lorsqu'on les utilise de manière « conventionnelle » [Sorelius *et al.*, 1998], peuvent être utilisées, avec les modifications appropriées, lorsque l'enveloppe est AR ou ARMA [Besson & Stolica, 1997]. Néanmoins, ces dernières méthodes nécessitent l'hypothèse d'une structure forte pour $\alpha(t)$ et sont donc sujettes à une moindre robustesse. Pour pallier cet inconvénient, une dernière classe de méthodes, nécessitant peu d'hypothèses sur $\alpha(t)$ a été développée. Elles reposent soit sur l'utilisation de moindres carrés non linéaires [Ghogho *et al.*, 1998] [Ghogho *et al.*, 1999] [Besson *et al.*, 1999] soit sur l'utilisation de statistiques cycliques [Shamsunder *et al.*, 1995] [Giannakis & Zhou, 1995] [Zhou & Giannakis, 1995b] [Ghogho *et al.*, 1999b]. Ces dernières utilisent le fait que les moments d'ordre 1 (si $\alpha(t)$ est de moyenne non nulle) et 2 (si $E\{\alpha(t)\} = 0$), au travers de leurs transformées de Fourier généralisées (i.e. moyenne et corrélation cyclique) permettent de retrouver les fréquences des harmoniques. Ces méthodes sont relativement précises et possèdent la propriété de faire peu d'hypothèses sur l'amplitude. Leur lien avec les techniques des moindres carrés non linéaires est d'ailleurs mis en évidence dans [Ghogho *et al.*, 1998].

Par comparaison, il y a eu moins de travaux concernant des amplitudes déterministes. Lorsque l'amplitude et la phase sont combinaisons linéaires de fonctions de base connues, l'estimateur MV peut être mis en oeuvre et les BCR calculées, cf. [Friedlander & Francos, *et al.*, 1995]. Des techniques de moindres carrés non linéaires sont employées dans [Hasan, 1982] pour des sinusoides modulées en amplitude. Le cas d'une amplitude de type Gaussienne est traité dans les références [Besson & Galtier, 1996] où des estimateurs du Maximum de Vraisemblance sont proposés et les BCR calculées, et [Galtier & Besson, 1998] où les propriétés de la phase de la fonction de corrélation du signal sont exploitées. Zhou *et al.* ont proposé et analysé des estimateurs fondés sur la Fonction d'Ambiguïté d'Ordre élevé (HAF) [Zhou, *et al.*, 1996]. L'utilisation de la Transformée de Phase Polynomiale est également suggérée et ses performances analysées dans [Ouldali, 1998 Ch.4]. Enfin, des algorithmes très simples ont été proposés par Maragos *et al.* [Maragos *et al.*, 1993b] [Maragos *et al.*, 1993a] qui utilisent des opérateurs d'énergie; ces méthodes se révèlent performantes mais nécessitent toutefois un très bon rapport signal à bruit.

Dans cet article, nous nous intéressons au cas général d'une amplitude réelle et déterministe, dépendant d'un vecteur paramètre η_α . Le modèle que nous utilisons ne nécessite pas d'hypothèse spécifique sur la forme de l'amplitude et peut donc s'appliquer à un grand nombre de cas. Sous l'hypothèse d'un bruit additif blanc

circulaire Gaussien, l'estimateur du Maximum de Vraisemblance est donné par

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} \sum_{t=0}^{N-1} \left| x(t) - \alpha(t; \eta_{\alpha}) e^{i\phi(t; \eta_{\phi})} \right|^2 \quad (2)$$

On doit donc avoir recours à la minimisation d'une fonctionnelle à $q_{\alpha} + q_{\phi}$ variables où q_{α} (q_{ϕ}) désigne la dimension de η_{α} (η_{ϕ}). Ceci peut être particulièrement complexe d'un point de vue calculatoire et difficile à implanter d'un point de vue numérique. *L'objet de cet article est de proposer une alternative à l'estimateur du Maximum de Vraisemblance, qui soit moins complexe calculatoirement mais qui offre des performances statistiques équivalentes, du moins asymptotiquement.* Pour ceci, on s'inspire du Principe d'Invariance Étendu (PIE) [Stoica & Söderström, 1989] qui permet, à l'aide d'une procédure en deux étapes, d'obtenir des estimées aussi précises avec, à chaque étape, un problème de minimisation moins compliqué. Dans un premier temps, on utilise un modèle moins détaillé pour le signal qui permet de simplifier considérablement le problème de minimisation. Dans notre cas, ceci est obtenu en ne considérant plus la dépendance de l'enveloppe vis-à-vis de η_{α} . Dans un deuxième temps, des techniques des moindres carrés sont utilisées. Cette procédure permet d'autre part de découpler l'estimation des paramètres d'amplitude de l'estimation des paramètres de phase. Enfin, comme nous le montrerons, les estimées des paramètres de phase ne dépendent pas des hypothèses émises sur l'amplitude, ce qui améliore notablement la robustesse d'estimation.

L'article est organisé de la manière suivante. En section 2, nous décrivons le modèle utilisé et faisons quelques rappels sur le PIE. La section 3 est consacrée à l'estimation proprement dite et les 2 étapes sus-mentionnées sont décrites. Des simulations numériques viennent corroborer l'analyse théorique dans la section 4.

2. modèle du signal et principe d'invariance étendu

Nous considérons donc l'estimation des paramètres du modèle

$$x(t) = \alpha(t; \eta_{\alpha}) e^{i\phi(t; \eta_{\phi})} + n(t) \quad (3)$$

où η_{α} désigne le vecteur paramètre dont dépend l'amplitude. Nous nous intéressons ici au cas de signaux chirp pour lesquels

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (4)$$

Enfin, le bruit $n(t)$ est supposé être un bruit blanc complexe, Gaussien et circulaire, de moyenne nulle et de variance σ^2 , i.e.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{n(t)\} &= 0 \\ \mathbf{E} \{n(t)n(s)\} &= 0 \\ \mathbf{E} \{n^*(t)n(s)\} &= \sigma^2 \delta(t, s) \end{aligned} \quad (5)$$

Soit $\eta_{\phi} = [a_0 \ a_1 \ a_2]^T$ le vecteur des paramètres de phase.

Le problème consiste à estimer $\eta = [\eta_{\alpha}^T, \eta_{\phi}^T]^T$ à partir de N mesures $\{x(t)\}_{t=0, \dots, N-1}$. Nous considérons dans cet article des estimateurs dont la performance asymptotique est identique à l'estimateur MV. Celui-ci consiste à maximiser la fonction log-vraisemblance par rapport au vecteur paramètre η , cf. (2). Cette maximisation étant complexe, le principe d'Invariance Étendu permet de simplifier cette procédure tout en obtenant des estimées aussi précises, i.e. de même variance asymptotique. Nous rappelons brièvement le PIE dans le cas général avant de l'adapter au cas d'intérêt (voir [Stoica & Söderström, 1989] pour plus de détails).

L'idée du PIE est en fait de trouver une autre paramétrisation du problème qui puisse simplifier le problème de minimisation. Pour être plus précis, considérons un modèle paramétré par un vecteur η et supposons qu'on puisse obtenir une estimée de η comme suit

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta \in D_{\eta}} V(\eta) \quad (6)$$

où D_{η} désigne le domaine de recherche. Supposons maintenant que l'on puisse re-paramétriser le modèle en fonction d'un autre vecteur $\tilde{\eta}$ tel que $\tilde{\eta} = f(\eta) \in D_{\tilde{\eta}} \ \forall \eta \in D_{\eta}$. Soit $\tilde{V}(\tilde{\eta}) = V(\eta)$ le critère exprimé en fonction de $\tilde{\eta}$. Considérons alors l'estimateur suivant de $\tilde{\eta}$

$$\hat{\tilde{\eta}} = \arg \min_{\tilde{\eta} \in D^u} \tilde{V}(\tilde{\eta}) \quad (7)$$

Dans l'équation précédente, D^u est un domaine nettement plus vaste que $D_{\tilde{\eta}}$ (i.e. $D_{\tilde{\eta}} \subset D^u$) choisi de manière à simplifier le problème (7). Si $\hat{\tilde{\eta}}$ et $f(\hat{\tilde{\eta}})$ convergent (soit en nombre de points, soit en rapport signal à bruit) vers le même vecteur paramètre, alors

$$\hat{\eta}^e = \arg \min_{\eta \in D_{\eta}} \left(\hat{\tilde{\eta}} - f(\eta) \right)^T \mathbf{W} \left(\hat{\tilde{\eta}} - f(\eta) \right) \quad (8)$$

est asymptotiquement équivalent à $\hat{\eta}$, avec

$$\mathbf{W} = \mathbf{E} \left\{ \frac{\partial^2 \tilde{V}(\tilde{\eta})}{\partial \tilde{\eta} \partial \tilde{\eta}^T} \right\} \Bigg|_{\tilde{\eta} = \hat{\tilde{\eta}}} \quad (9)$$

L'idée du PIE est donc de trouver $\tilde{\eta}$ tel que (7) soit beaucoup plus facile à obtenir que (6). Observons que l'estimation par PIE nécessite 2 étapes :

Étape 1 : Choix d'un modèle moins structuré (i.e. choix d'un vecteur $\tilde{\eta}$ pour paramétrer le modèle) et résolution de (7).

Etape 2 : Recherche d'un estimateur asymptotiquement équivalent à $\hat{\eta}$ dans (6) en résolvant (8).

On s'aperçoit donc que le problème que nous considérons ici entre dans le cadre de l'utilisation du PIE, comme nous le décrivons maintenant plus en détail. Dans la suite, le terme asymptotique s'entend en rapport signal à bruit (notons qu'on considérera des amplitudes d'énergie finie dans la section 4). Il convient d'ailleurs de noter qu'un estimateur consistant en nombre de points (c'est-à-dire dont la variance tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$) est envisageable si l'on fait certaines hypothèses sur l'amplitude, par exemple que $\alpha(t) = \rho(t/N)$ où $\rho(x)$ est une fonction bornée sur $[0, 1]$ (i.e. $\alpha(t)$ est de puissance finie et sa forme dépend du nombre de points), cf. [Hasan, 1982]-[Zhou *et al.*, 1996]. On ne fait pas ces hypothèses ici; néanmoins, si elles étaient émises, la théorie exposée ci-après pourrait s'appliquer. En pratique, à partir des N échantillons $\{x(t)\}_{t=0, \dots, N-1}$, la procédure d'estimation serait identique. Nous nous focalisons maintenant sur l'estimation des paramètres du modèle.

3. estimation

3.1. un modèle moins détaillé

La première (et principale) étape consiste en fait à utiliser un modèle moins structuré que (3). Dans cette optique, nous choisissons de ne plus considérer la dépendance de $\alpha(t; \eta_\alpha)$ vis-à-vis de η_α , c'est-à-dire qu'on n'impose plus de structure sur l'amplitude. Ce faisant, on devient a priori insensible à une quelconque hypothèse sur l'amplitude, ce qui devrait améliorer la robustesse d'estimation. Le nouveau modèle non-structuré devient donc

$$x(t) = \alpha(t)e^{i\phi(t; \eta_\phi)} + n(t) \quad (10)$$

Le nouveau vecteur paramètre qui décrit le modèle non-structuré est ainsi

$$\tilde{\eta} = [\alpha^T, \eta_\phi^T]^T \quad (11)$$

où

$$\alpha = [\alpha(0) \ \dots \ \alpha(N-1)]^T$$

Dans le cas présent, la fonctionnelle f qui permet d'exprimer $\tilde{\eta}$ en fonction de η s'écrit

$$f : \mathbb{R}^{q_\alpha + q_\phi} \mapsto \mathbb{R}^{N + q_\phi}$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_\alpha \\ \eta_\phi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha \\ \eta_\phi \end{bmatrix}$$

On propose alors d'estimer $\tilde{\eta}$ comme

$$\hat{\tilde{\eta}} = \arg \min_{\alpha, \eta_\phi} \sum_{t=0}^{N-1} |x(t) - \alpha(t)e^{i\phi(t; \eta_\phi)}|^2 \quad (12)$$

Notons que $\hat{\tilde{\eta}}$ est l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle (10). Nous décrivons maintenant comment sont obtenues ces estimées et quelles sont leurs performances.

Proposition 1

Le vecteur $\hat{\tilde{\eta}} = [\hat{\alpha}^T, \hat{\eta}_\phi^T]^T$ est donné par

$$\hat{a}_1, \hat{a}_2 = \arg \max_{a_1, a_2} \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-i2(a_1 t + a_2 t^2)} \right| \quad (13)$$

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{2} \text{angle} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-i2(\hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)} \right\} \quad (14)$$

$$\hat{\alpha}(t) = \text{Re} \left\{ x(t) e^{-i(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)} \right\} \quad (15)$$

où $\text{Re}\{b\}$ désigne la partie réelle de b .

Démonstration

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [Besson *et al.*, 1999]. Pour des raisons de lisibilité nous la reproduisons brièvement en annexe A. \square

Nous analysons maintenant les performances de l'estimateur précédent.

Proposition 2

La matrice de covariance asymptotique de $\hat{\tilde{\eta}}$ est l'inverse de la matrice d'Information de Fisher (MIF) pour le modèle non structuré, dont l'expression est donnée par

$$\tilde{F}(\tilde{\eta}) = \begin{bmatrix} 2\sigma^{-2} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_\phi \end{bmatrix} \quad (16)$$

où F_ϕ est la MIF correspondant à l'estimation de η_ϕ dont les éléments sont

$$F_\phi(k+1, \ell+1) = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^2(t; \eta_\alpha) t^{k+\ell} \quad k, \ell = 0, 1, 2 \quad (17)$$

Démonstration

Voir annexe B. \square

Remarque 1

Notons que les estimées des paramètres de phase ainsi obtenues ont la même variance que celles obtenues avec le modèle structuré puisque la matrice \tilde{F} est diagonale par blocs et que F_ϕ est la MIF pour le modèle structuré (3) (cf. [Francos & Friedlander, 1995], [Ghohgo *et al.*, 1999a] pour ce dernier cas). Ceci signifie que, pour autant que seule importe l'estimation des paramètres de phase, l'utilisation d'un modèle structuré pour l'enveloppe n'apporte pas une meilleure précision. De plus, contrairement à l'estimateur MV structuré, obtenir $\hat{\tilde{\eta}}$ ne nécessite aucune hypothèse sur la forme de $\alpha(t; \eta_\alpha)$, ce qui améliore la robustesse d'estimation. Enfin, on n'a ici qu'un problème de minimisation 2-D.

3.2. estimation des paramètres d'amplitude

Une fois que les estimées du modèle non structuré ont été calculées, on invoque le PIE pour obtenir des estimateurs équivalents au Maximum de Vraisemblance. Néanmoins, pour que le PIE puisse s'appliquer, il faut au préalable démontrer que $f(\hat{\eta})$ et $\hat{\eta}$ convergent vers la même valeur. Nous donnons donc la démonstration de cette propriété. $\hat{\eta}$ étant l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle non structuré, la théorie générale de l'estimation au sens du Maximum de Vraisemblance [Kay, 1993] et la proposition 2 indiquent que $\hat{\eta}$ est asymptotiquement distribué comme

$$\hat{\eta} \stackrel{as}{\sim} \mathcal{N}(\tilde{\eta}, \sigma^2 \tilde{F}^{-1}) \quad (18)$$

où

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix}$$

Nous avons choisi (provisoirement) de mettre en exergue le facteur σ^2 pour mieux illustrer la convergence. $\hat{\eta}$ étant l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle structuré, on a aussi

$$\hat{\eta} \stackrel{as}{\sim} \mathcal{N}(\eta, \sigma^2 \bar{F}^{-1}) \quad (19)$$

avec

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (20)$$

et

$$\bar{F}_\alpha(k, \ell) = 2\text{Re} \left\{ \frac{\partial s^H}{\partial \eta_\alpha(k)} \frac{\partial s}{\partial \eta_\alpha(\ell)} \right\} = 2 \frac{\partial \alpha^T}{\partial \eta_\alpha(k)} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta_\alpha(\ell)}$$

De plus, la fonctionnelle $f : \eta \mapsto \tilde{\eta}$ est continue et dérivable. Par conséquent, en utilisant les résultats de [Brockwell & Davis, 1991, chapitre 6], on peut démontrer que $f(\hat{\eta})$ est asymptotiquement distribué suivant une loi normale, de moyenne $f(\eta) = \tilde{\eta}$ et de matrice de covariance $\sigma^2 \mathbf{D} \tilde{F}^{-1} \mathbf{D}^T$ où \mathbf{D} est la matrice des dérivées partielles, évaluée en $\tilde{\eta}$, i.e.

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta^T} \right|_{\tilde{\eta}} \quad (21)$$

et

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta_\alpha^T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

En d'autres termes, on a

$$f(\hat{\eta}) \stackrel{as}{\sim} \mathcal{N}(\tilde{\eta}, \sigma^2 \mathbf{D} \tilde{F}^{-1} \mathbf{D}^T) \quad (22)$$

ce qui démontre que $f(\hat{\eta})$ et $\hat{\eta}$ convergent vers la même valeur, rendant ainsi applicable le PIE. Nous montrons maintenant comment s'obtiennent les estimées à partir du PIE.

Proposition 3

Les estimateurs

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_\phi^e &= \hat{\eta}_\phi \\ \hat{\eta}_\alpha^e &= \arg \min_{\eta_\alpha} \sum_{t=0}^{N-1} |\hat{\alpha}(t) - \alpha(t; \eta_\alpha)|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

sont asymptotiquement équivalents à l'estimateur MV (donc asymptotiquement efficaces).

Démonstration

D'après le principe d'invariance étendu, un estimateur asymptotiquement équivalent à l'estimateur MV peut être obtenu en utilisant (8) et (9). Or ici, on considère des estimateurs du Maximum de Vraisemblance. D'où, puisque le critère à minimiser est, à une constante multiplicative près, la fonction log-vraisemblance (cf. équation (12)), la matrice \mathbf{W} de (9) est dans notre cas la matrice d'information de Fisher pour le modèle non structuré, évaluée en $\hat{\eta}$, c'est-à-dire $\mathbf{W} = \tilde{F}(\hat{\eta})$. Ainsi, par le PIE, l'estimateur équivalent à l'estimateur MV est donné par

$$\hat{\eta}^e = \arg \min_{\eta} \left(\hat{\eta} - f(\eta) \right)^T \tilde{F}(\hat{\eta}) \left(\hat{\eta} - f(\eta) \right) \quad (24)$$

De par la structure diagonale par blocs de $\tilde{F}(\hat{\eta})$, le critère dans (24) se réécrit comme

$$\begin{aligned} J(\eta_\alpha, \eta_\phi) &= 2\sigma^{-2} \|\hat{\alpha} - \alpha(\eta_\alpha)\|^2 \\ &\quad + \left(\hat{\eta}_\phi - \eta_\phi \right)^T \mathbf{F}_\phi(\hat{\eta}) \left(\hat{\eta}_\phi - \eta_\phi \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Le critère est donc la somme de deux termes positifs, l'un dépendant de η_α , l'autre de η_ϕ . Ce dernier peut être réduit à zéro en posant

$$\hat{\eta}_\phi^e = \hat{\eta}_\phi \quad (26)$$

Il reste alors à minimiser le premier terme, ce qui revient à estimer η_α comme

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_\alpha^e &= \arg \min_{\eta_\alpha} \|\hat{\alpha} - \alpha(\eta_\alpha)\|^2 \\ &= \arg \min_{\eta_\alpha} \sum_{t=0}^{N-1} |\hat{\alpha}(t) - \alpha(t; \eta_\alpha)|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

ce qui démontre la proposition.

Notons que l'on a ainsi découplé l'estimation de η_α de celle de η_ϕ (à cause de la paramétrisation choisie qui induit une matrice \tilde{F} diagonale par blocs).

Remarque 2

Dans le cas où η_α et η_ϕ partagent des paramètres communs, l'estimateur PIE est toujours donné par (24). Par contre, il n'y a pas nécessairement découplage et l'équation (25) n'est plus forcément valable. Observons enfin que si $\eta_\alpha = \eta_\phi$, l'intérêt à utiliser le PIE est moindre.

4. exemples numériques

Dans cette section, nous présentons des simulations numériques afin de valider les résultats théoriques présentés ci-avant. Nous considérons deux cas pour l'amplitude :

Cas 1 : $\alpha(t)$ est supposé être de la forme

$$\alpha(t) = A \operatorname{sinc}(\pi \nu t)$$

avec $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ la fonction sinus cardinal. Le vecteur paramètre est alors $\eta_\alpha = [A \ \nu]^T$.

Cas 2 : L'amplitude est une exponentielle décroissante, i.e.

$$\alpha(t) = A \exp\{-\beta t\}$$

et donc $\eta_\alpha = [A \ \beta]^T$.

Dans la suite, on prendra comme valeurs numériques $A = 1$, $\nu = 0.01$ et $\beta = 0.02$. Dans toutes les simulations, le vecteur des paramètres chirp est $\eta_\phi = 2\pi[0.1 \ 0.18 \ 0.001]^T$. Le rapport signal à bruit (RSB) est défini comme $RSB = 10 \log_{10} \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \alpha^2(t)$. Les figures 1 et 2 illustrent la forme du signal non bruité. Pour chaque figure, 500 simulations de Monte-Carlo ont servi à estimer les variances empiriques des estimées. Nous nous intéressons tout d'abord à l'influence du nombre de points dans les figures 3 et 4. On constate que les variances empiriques sont très proches des Bornes de Cramér-Rao, comme prévu par la théorie, et ce pour les 3 paramètres principaux du modèle. Les figures 5 et 6 illustrent l'influence du rapport signal à bruit (RSB) sur la performance d'estimation. On s'aperçoit que dès que le RSB est supérieur à 4dB, les estimées ont une variance égale à la BCR. Il y a toutefois auparavant un léger

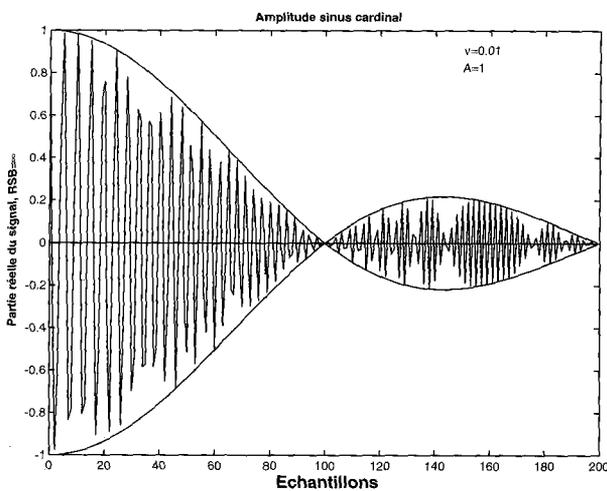


Figure 1. – Cas 1 : Partie réelle du signal non bruité. $A = 1$, $\nu = 0.01$ et $RSB = \infty$.

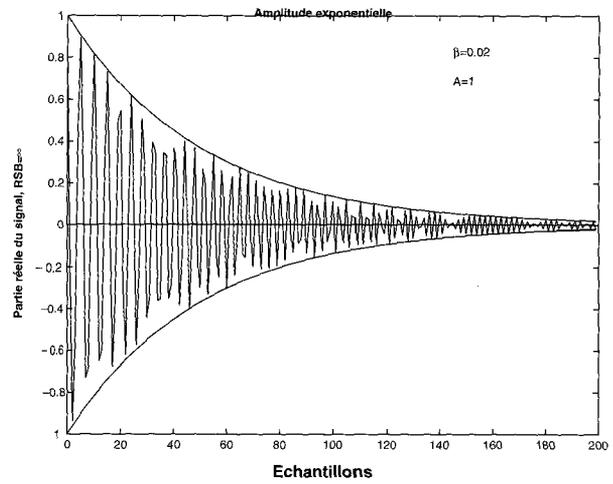


Figure 2. – Cas 2 : Partie réelle du signal non bruité. $A = 1$, $\beta = 0.02$ et $RSB = \infty$.

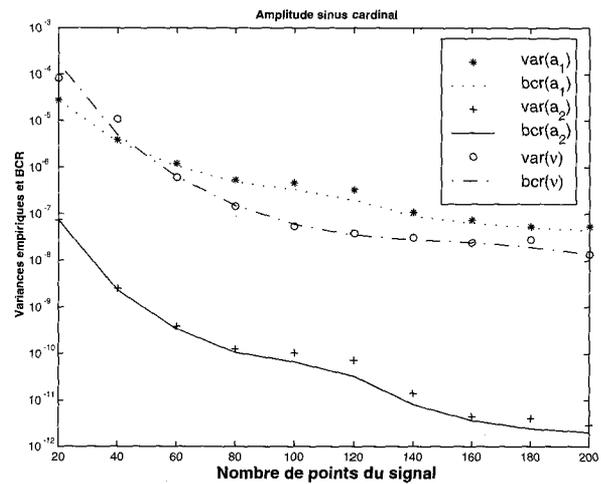


Figure 3. – Cas 1 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du nombre de points. $\nu = 0.01$ et $RSB = 10\text{dB}$.

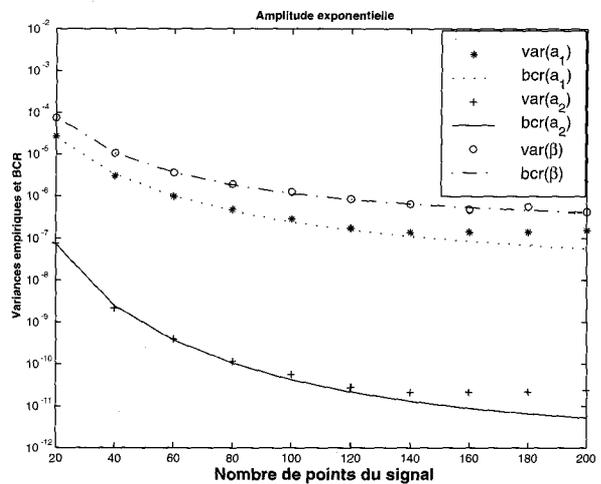


Figure 4. – Cas 2 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du nombre de points. $\beta = 0.02$ et $RSB = 10\text{dB}$.

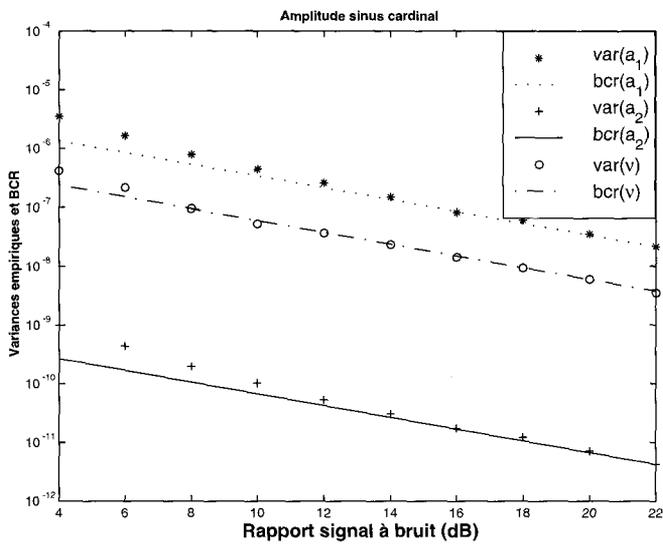


Figure 5. – Cas 1 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du RSB. $\nu = 0.01$ et $N = 100$.

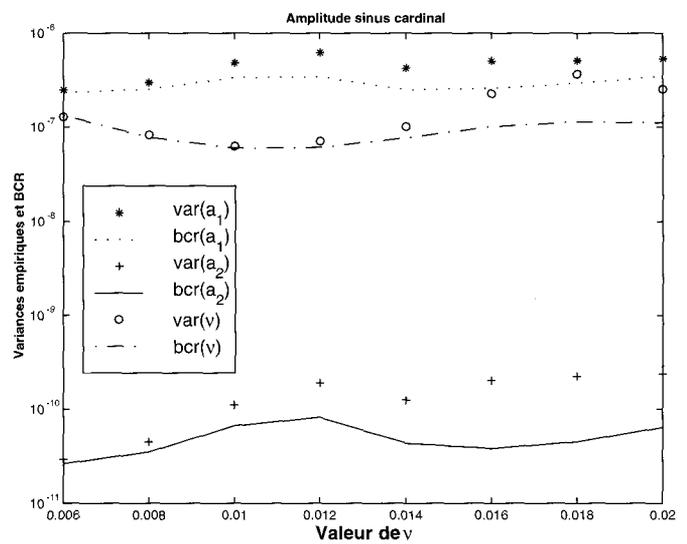


Figure 7. – Cas 1 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction de ν . $N = 100$ et $RSB = 10\text{dB}$.

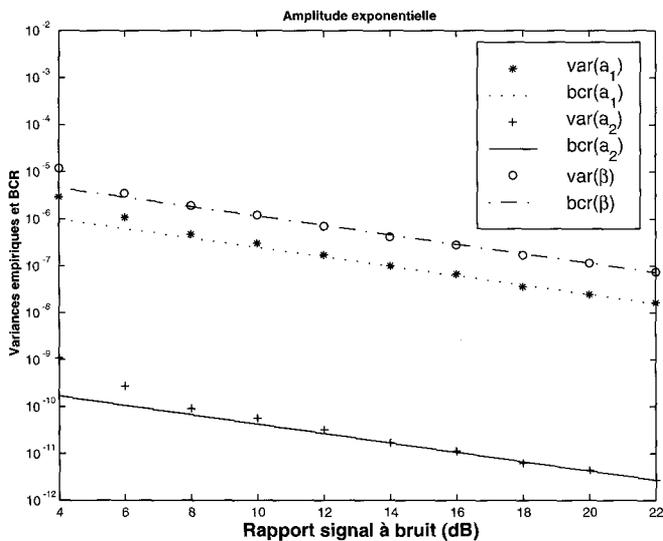


Figure 6. – Cas 2 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction du RSB. $\beta = 0.02$ et $N = 100$.

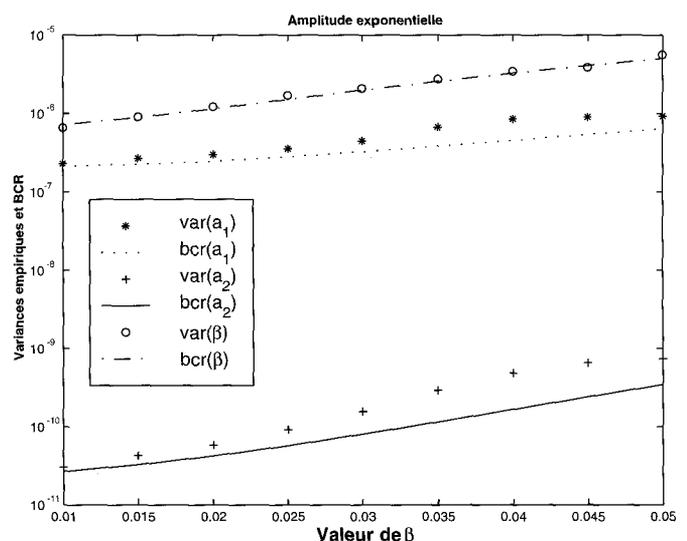


Figure 8. – Cas 2 : Bornes de Cramér-Rao et variances empiriques en fonction de β . $N = 100$ et $RSB = 10\text{dB}$.

« effet de seuil » en RSB. Ceci vient valider l'analyse théorique présentée dans les sections précédentes. Enfin, dans les figures 7 et 8, on fait varier les paramètres ν et β qui jouent sur la vitesse de décroissance de l'enveloppe. On constate que la performance se dégrade légèrement lorsqu'on augmente ν ou β . Ceci est logique dans la mesure où l'enveloppe est pratiquement égale à 0; le signal ne contient donc plus que du bruit dans les derniers échantillons. On n'a donc pas intérêt à augmenter N car la performance (et les BCR) n'est pas meilleure. Ceci est logique dans la mesure où l'enveloppe du signal utile tend vers zéro; on ne rajoute donc pas d'information. Remarquons simplement que ceci revient à ne sélectionner que le premier lobe du sinus cardinal.

5. conclusions

Dans cet article nous nous sommes focalisés sur l'estimation de signaux chirp dont l'amplitude, déterministe, varie dans le temps. Ce problème a été abordé dans l'optique d'offrir un estimateur de performances asymptotiques comparables à l'estimateur du Maximum de Vraisemblance mais de coût calculatoire moindre. Pour ceci, le principe d'invariance étendu est utilisé car il permet, grâce à une paramétrisation moins détaillée, de scinder le problème

de minimisation par rapport aux paramètres d'amplitude et de phase en deux étapes. Plus précisément, en n'imposant aucune structure sur l'enveloppe, on estime de façon relativement simple les paramètres de phase. De plus, les estimées de ces derniers sont, à fort RSB, aussi précises que dans le cas du modèle structuré de départ. Ensuite, l'estimation des paramètres d'amplitude se réduit à un problème des moindres carrés. Notons que l'utilisation du PIE pour le modèle considéré est originale et conduit à des performances quasiment optimales.

A. Démonstration de la Proposition 1

Rappelons que les estimées du modèle non structuré sont obtenues par

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_\phi} \sum_{t=0}^{N-1} \left| x(t) - \alpha(t) e^{i\phi(t; \boldsymbol{\eta}_\phi)} \right|^2 \quad (28)$$

Soit $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(N-1)]^T$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha(0), \dots, \alpha(N-1)]^T$ et $\mathbf{H} = \text{diag}(e^{i\phi(0)}, \dots, e^{i\phi(N-1)})$ de sorte que le critère (28) se réécrit comme

$$J(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\eta}_\phi) = \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}\|^2 \quad (29)$$

En dérivant par rapport à $\boldsymbol{\alpha}$ et en notant que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{H}\mathbf{x}^* - \mathbf{H}^H \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\alpha} \quad (30)$$

Donc, quelque soit $\boldsymbol{\eta}_\phi$, le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ qui minimise (29) est donné par

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2} \{\mathbf{H}\mathbf{x}^* + \mathbf{H}^H \mathbf{x}\} \quad (31)$$

En reportant l'équation précédente dans (29), le problème revient à minimiser

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\boldsymbol{\eta}_\phi) &= \left\| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{H}^2 \mathbf{x}^* - \frac{1}{2} \mathbf{x} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{H}^2 \mathbf{x}^* \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^H \mathbf{x} - \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{2*} \mathbf{x} \} \end{aligned} \quad (32)$$

soit à maximiser

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{2*} \mathbf{x} \} &= \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-i2\phi(t)} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) e^{-2i \sum_{n=1}^2 a_n t^n} \times e^{-2ia_0} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

Or, quelque soit le nombre complexe $x = \rho e^{i\theta}$, la valeur maximum de $\text{Re} \{ x e^{-i\varphi} \}$ est ρ et est atteinte pour $\varphi = \theta$. D'où les

paramètres $\{a_1, a_2\}$ et a_0 sont obtenus par

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_1, \hat{a}_2\} &= \arg \max_{a_1, a_2} \left| \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) \exp \{-2i(a_1 t + a_2 t^2)\} \right| \\ \hat{a}_0 &= \frac{1}{2} \text{angle} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} x^2(t) \exp \{-2i(\hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)\} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Enfin, de par (31), les estimées de l'amplitude s'écrivent

$$\hat{\alpha}(t) = \text{Re} \left\{ x(t) e^{-i(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2)} \right\} \quad (35)$$

ce qui termine la démonstration.

B. Démonstration de la Proposition 2

Comme $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ dans (13), (14) et (15) correspond à l'estimateur du Maximum de Vraisemblance pour le modèle non structuré, sa matrice de covariance asymptotique correspond à l'inverse de la matrice d'information de Fisher pour ce modèle. Soit $\tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{N+3 \times N+3}$ cette dernière. Les éléments de $\tilde{\mathbf{F}}$, sous l'hypothèse d'un bruit additif blanc complexe circulaire et Gaussien sont donnés par [Kay, 93]

$$\tilde{\mathbf{F}}(k, \ell) = 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial s^H}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k} (\sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \frac{\partial s}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell} \right\} \quad (36)$$

où s est le vecteur du signal utile déterministe, i.e. $s(t) = \alpha(t) e^{i(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}$ et $\frac{\partial s}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k}$ est la dérivée partielle de s par rapport au $k^{\text{ième}}$ élément de $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$. On peut réécrire les éléments de $\tilde{\mathbf{F}}$ comme

$$\tilde{\mathbf{F}}(k, \ell) = 2\sigma^{-2} \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\partial s^*(t)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k} \frac{\partial s(t)}{\partial \tilde{\boldsymbol{\eta}}_\ell} \right\} \quad (37)$$

Nous calculons donc maintenant chacun des termes de $\tilde{\mathbf{F}}$. Pour $k, \ell \in [1, N]$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(k, \ell) &= 2\sigma^{-2} \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\partial s^*(t)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial s(t)}{\partial \alpha_\ell} \right\} \\ &= 2\sigma^{-2} \text{Re} \left\{ e^{-i\phi(k)} e^{i\phi(\ell)} \right\} \delta(k, \ell) \\ &= 2\sigma^{-2} \delta(k, \ell) \end{aligned} \quad (38)$$

De plus, pour $k \in [1, N]$ et $\ell \in [0, 2]$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(k, \ell + N + 1) &= 2\sigma^{-2} \text{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\partial s^*(t)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial s(t)}{\partial a_\ell} \right\} \\ &= 2\sigma^{-2} \text{Re} \left\{ i k^\ell e^{-i\phi(k)} \alpha(k) e^{i\phi(k)} \right\} \\ &= 2\sigma^{-2} \text{Re} \{ i k^\ell \alpha(k) \} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Enfin, pour $k, \ell \in [0, 2]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(k + N + 1, \ell + N + 1) &= 2\sigma^{-2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} \frac{\partial s^*(t)}{\partial a_k} \frac{\partial s(t)}{\partial a_\ell} \right\} \\ &= 2\sigma^{-2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{t=0}^{N-1} -i^2 t^{k+\ell} \alpha(t) \alpha(t) \right\} \\ &= 2\sigma^{-2} \sum_{t=0}^{N-1} t^{k+\ell} \alpha(t)^2 \end{aligned} \quad (40)$$

ce qui termine le calcul de $\tilde{\mathbf{F}}$ et démontre bien qu'elle est diagonale par blocs. De plus, la partie correspondant au vecteur paramètre α est elle-même diagonale (cf. (38)).

BIBLIOGRAPHIE

- [Besson & Castanié, 1993] O. Besson, F. Castanié, «On estimating the frequency of a sinusoid in autoregressive multiplicative noise», *Signal Processing*, 30(1), 65–83, 1993.
- [Besson & Galtier, 1996] O. Besson, F. Galtier, «Estimating particle's velocity from laser measurements : Maximum Likelihood and Cramér-Rao bounds», *IEEE Transactions Signal Processing*, 44(12), 3056–3068, 1996.
- [Besson et al., 1999] O. Besson, M. Ghogho, A. Swami, «On estimating random amplitude chirp signals», in *Proceedings ICASSP*, pp. 1561–1564, Phoenix, AZ, 1999.
- [Besson & Stoica, 1997] O. Besson, P. Stoica, «Two subspace-based methods for frequency estimation of sinusoidal signals with random amplitude», *Proceedings IEE-F Radar, Sonar Navigation*, 144(4), 169–176, 1997.
- [Brockwell & Davis, 1991] P. J. Brockwell, R. A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, Springer Series in Statistics, Springer Verlag, Berlin, 2nd edn., 1991.
- [Dwyer, 1991] R. Dwyer, «Fourth-order spectra of Gaussian amplitude modulated sinusoids», *Journal Acoust. Soc. America*, 90, 918–926, 1991.
- [Francos & Friedlander, 1995] J. Francos, B. Friedlander, «Bounds for estimation of multicomponent signals with random amplitude and deterministic phase», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(5), 1161–1172, 1995.
- [Friedlander & Francos, 1995] B. Friedlander, J. Francos, «Estimation of amplitude and phase parameters of multicomponent signals», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(4), 917–926, 1995.
- [Galtier & Besson, 1998] F. Galtier, O. Besson, «Analysis of a frequency estimator for a class of laser signals with time-varying amplitude», *Proceedings IEE-F Radar, Sonar Navigation*, 145(2), 109–118, 1998.
- [Gervaise et al., 1997] C. Gervaise, C. Nouals, J. Serra, C. Calderan, B. Claudet, «Diffusivity measurements by periodic methods», in P. Gaal, D. Apostolescu (eds.), *Proceedings 24th International Thermal Conductivity Conference*, pp. 229–240, Pittsburgh, 1997.
- [Ghogho] 1997 M. Ghogho, *Detection and Estimation of Signals in Multiplicative and Additive Noise*, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique, Toulouse, 1997.
- [Ghogho & Garel, 1999] M. Ghogho, B. Garel, «Maximum Likelihood estimation of amplitude modulated time series», *Signal Processing*, 75(2), 99–116, 1999.
- [Ghogho et al., 1999a] M. Ghogho, A. Nandi, A. Swami, «Cramér-Rao Bounds and parameter estimation for random amplitude phase modulated signals», in *Proceedings ICASSP99*, pp. 1577–1580, Phoenix, 1999a.
- [Ghogho et al., 1999b] M. Ghogho, A. Swami, B. Garel, «Performance analysis of cyclic statistics for the estimation of harmonics in multiplicative and additive noise», *IEEE Transactions Signal Processing*, 1999b, submitted for publication.
- [Ghogho et al., 1998] M. Ghogho, A. Swami, A. Nandi, «Non-linear least squares estimation for harmonics in multiplicative and additive noise», in *Proceedings 9th IEEE SSAP Workshop*, pp. 407–410, Portland, 1998.
- [Ghogho et al., 1999c] M. Ghogho, A. Swami, A. Nandi, «Non-Linear least-squares estimation for harmonics in multiplicative and additive noise», *Signal Processing*, 1999c, submitted for publication.
- [Giannakis & Zhou, 1995] G. Giannakis, G. Zhou, «Harmonics in multiplicative and additive noise : Parameter estimation using cyclic statistics», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(9), 2217–2221, 1995.
- [Hasan, 1982] T. Hasan, «Nonlinear time series regression for a class of amplitude modulated cosinusoids», *Journal Time Series Analysis*, 3(2), 109–122, 1982.
- [Kay, 1993] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [Le Chevalier, 1989] F. Le Chevalier, *Principes de Traitement des Signaux Radar et Sonar*, Masson, Paris, 1989.
- [Maragos et al., 1993a] P. Maragos, J. Kaiser, T. Quatieri, «Energy separation in signal modulations with application to speech analysis», *IEEE Transactions Signal Processing*, 41(10), 3024–3051, 1993a.
- [Maragos et al., 1993b] P. Maragos, J. Kaiser, T. Quatieri, «On amplitude and frequency demodulation using energy operators», *IEEE Transactions Signal Processing*, 41(4), 1532–1550, 1993b.
- [Ouldali, 1998] A. Ouldali, *Approches pour l'Analyse de Signaux à Phase Polynomiale : Effets d'un Bruit Multiplicatif et d'une Amplitude Variable*, Ph.D. thesis, Université Paris XI, Orsay, 1998.
- [Ouldali & Benidir, 1997a] A. Ouldali, M. Benidir, «Analyse de signaux FM affectés par un bruit multiplicatif et un bruit additif», in *Proceedings GRETSI Conference*, pp. 1439–1442, Grenoble, 1997a.
- [Ouldali & Benidir, 1997b] A. Ouldali, M. Benidir, «Distinction between polynomial phase signals with constant amplitude and random amplitude», in *Proceedings ICASSP97*, pp. 3653–3656, Munich, 1997b.
- [Rihaczek, 1996] A. Rihaczek, *Principles of High-Resolution Radar*, Artech House, Norwood, MA, 1996.
- [Shamsunder et al., 1995] S. Shamsunder, G. Giannakis, B. Friedlander, «Estimating random amplitude polynomial phase signals : a cyclostationary approach», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(2), 492–505, 1995.
- [Sorelius et al., 1998] J. Sorelius, R. Moses, T. Söderström, A. Swindlehurst, «Effects of nonzero bandwidth on direction of arrival estimators in array signal processing», *Proceedings IEE-F Radar, Sonar Navigation*, 145(6), 317–324, 1998.
- [Stoica & Söderström, 1989] P. Stoica, T. Söderström, «On reparametrization of loss functions used in estimation and the invariance principle», *Signal Processing*, 17, 383–387, 1989.
- [Swami, 1994] A. Swami, «Multiplicative noise models : parameter estimation using cumulants», *Signal Processing*, 36, 355–373, 1994.
- [Vincent et al., 1999] F. Vincent, E. Chaumette, C. Nouals, D. Muller, «Etude d'un système radar de détection des débris spatiaux», in *Proceedings 5th International Conference on Radar Systems*, Brest, 1999.
- [Zhou, 1995] G. Zhou, *Random amplitude and polynomial phase modeling of nonstationary processes using higher-order and cyclic statistics*, Ph.D. thesis, University of Virginia, Charlottesville, 1995.

Estimation de signaux chirp

[Zhou & Giannakis, 1994] G. Zhou, G. Giannakis, «On estimating random amplitude modulated harmonics using Higher-Order Spectra», *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 19(4), 529–539, 1994.

[Zhou & Giannakis, 1995a] G. Zhou, G. Giannakis, «Harmonics in multiplicative and additive noise : Cramér-Rao bounds», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(5), 1217–1231, 1995a.

[Zhou & Giannakis, 1995b] G. Zhou, G. Giannakis, «Harmonics in multiplicative and additive noise : Performance analysis of cyclic estimators», *IEEE Transactions Signal Processing*, 43(6), 1445–1460, 1995b.

[Zhou *et al.*, 1996] G. Zhou, G. Giannakis, A. Swami, «On polynomial phase signals with time-varying amplitudes», *IEEE Transactions Signal Processing*, 44(4), 848–861, 1996.

Manuscrit reçu le 9 février 1999.

LES AUTEURS

François VINCENT



François Vincent est né le 21 décembre 1972. Il obtient le diplôme d'ingénieur en électronique, traitement du signal et des images de l'ENSEEIH en 1995 et le DEA de *traitement* du signal la même année. Il réalise actuellement une thèse au sein du Département Avionique et Systèmes de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques (ENSICA) sur la détection radar de débris spatiaux.

Olivier BESSON



Olivier Besson est ingénieur ENSEEIHT (1988) et docteur de l'INP Toulouse (1992). Depuis Octobre 1993, il est enseignant-chercheur au Département Avionique et Systèmes de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques (ENSICA). Ses thèmes de recherche concernent le *traitement* statistique du signal, l'estimation, l'analyse spectrale paramétrique avec une attention particulière pour les modèles *multiplicatifs*.