

Estimation de modèles paramétrés de mouvement par moindres carrés non-linéaire

Parametrized models motion estimation using non linear least mean squares

par R. MONGRAIN^{1,2}, M. CYR³, McGill BERTRAND^{2,4}

¹ Mechanical Engineering Department, McGill University, 817 Sherbrooke St., MacDonald Engineering Bldg. Room 369, Montreal, Quebec, H3A 2K6

² Institut de Cardiologie de Montréal, 5000 Bélanger Est, H1T 1C8, Montréal, Québec

³ Surgical Navigation Systems, 6509 Airport Road, Mississauga, Ontario, L4V 1S7

⁴ Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succ. Centre-ville, H3C 3A7, Montréal, Québec

résumé et mots clés

Dans cet article, nous proposons d'améliorer l'estimation de champs de vitesse représentés par un modèle paramétré, pour le contexte où la séquence temporelle est sous-échantillonnée (résonance magnétique, médecine nucléaire, tomodensitométrie, élastographie), en incorporant des termes d'ordres supérieurs dans l'approximation par différences finies de la dérivée partielle temporelle du profil d'intensité et nous formulons une méthode qui requiert un nombre fixe de trames successives pour son évaluation. Nous décrivons un modèle général de formation de séquences d'images régies par un champ de vitesse dont l'évolution est décrite par les trajectoires des pixels de l'image. Nous utilisons ensuite ce modèle dans le contexte de champs de vitesse affines stationnaires. Il en résulte un estimateur de mouvement par moindres carrés non-linéaires que nous évaluons sur des séquences d'images synthétiques et échographiques. Nous montrons, dans ce contexte, que l'approche fournit de meilleurs estimés des champs de vitesse que l'approche conventionnelle avec moindres carrés linéaires.

Champ de vitesse, flux optique, trajectoires, gradients, moindres carrés non linéaires

abstract and key words

In this paper, we propose a motion estimator based on the concept of trajectory using non linear least mean squares developed for the context of undersampled image sequences (MRI, nuclear medicine, CT, elastography). We use synthetic and echographic image sequences to evaluate the method. We describe a general model of image sequence formation submitted to a velocity field using the trajectory equation of each pixel. We then apply this model to the context of stationary affine velocity fields. We propose to enhance such velocity field estimation in the situation when the temporal image sequence is undersampled by incorporating higher order terms in the finite

Ce travail a été subventionné par le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada et le ministère de l'Éducation du Québec.

difference approximation of intensity pattern time derivative and we formulate an approach which requires a fixed number of successive frames. We then show that the proposed method provides better velocity field estimation than the standard formulation using linear least mean squares.

Velocity field, optical flow, trajectories, gradients, least mean squares

1. introduction

Plusieurs modalités d'imagerie (médecine nucléaire, résonance magnétique, tomodensitométrie, élastographie), présentent une résolution temporelle relativement faible. Dans ce contexte, les algorithmes de calcul de champs de vitesse basés sur des estimés des gradients de l'image peuvent présenter certains problèmes de stabilité. Dans ce travail, nous proposons une approche visant à traiter ce type de situation où les résolutions temporelles sont insuffisantes (en d'autres termes où un nombre parfois très limité d'images successives est disponible).

En premier lieu, nous présentons un modèle général de formation de séquences d'images faisant appel aux équations spatio-temporelles décrivant la trajectoire des pixels que nous développons pour le champ affine stationnaire. Nous abordons le calcul du champ de vitesse et décrivons l'aspect de l'estimation du champ de vitesse par un estimateur au sens des moindres carrés. Nous proposons ensuite l'ajout de termes non linéaires à la composante temporelle du gradient du profil d'intensité pour améliorer l'estimation du champ de vitesse. L'amélioration apportée par la méthode proposée est ensuite illustrée sur des séquences simulées et réelles.

2. description du modèle de formation de séquences d'images

2.1. modèle général de formation de séquences d'images basé sur les trajectoires

L'utilisation du concept des trajectoires dans une formulation spatio-temporelle du problème d'estimation de mouvement présente plusieurs avantages. En effet, il permet avec une connaissance a priori du mouvement une interpolation temporelle et la génération d'images inter trames de la séquence d'images. Il permet aussi de réduire la complexité du problème en faisant usage de modèle paramétrés. On retrouve dans [1] une formula-

tion basée sur les trajectoires en leur imposant une contrainte de lissage, les même auteurs [2] introduisent un sens physique pour le calcul des trajectoires en utilisant un concept de moindre action. Dans le présent travail, nous proposons un calcul de trajectoires en supposant une connaissance a priori du mouvement à l'aide d'un modèle paramétré en utilisant un formalisme de référentiels lagrangien et eulérien.

Nous considérons donc un référentiel de coordonnées matérielles \vec{q} (référentiel lagrangien), dont chaque coordonnée identifie un point physique de l'objet (par exemple, une cellule d'un tissu), et le référentiel \vec{x} de l'observateur (référentiel eulérien) dans lequel le mouvement sera interprété. La figure (1) illustre un exemple 2D de tels référentiels aux temps t_0 et $t_0 + \Delta t$ reliés par la fonction de transformation \vec{g} des coordonnées \vec{q} qui, comme nous le verrons, doit être bi-continue et bi-différentiable (difféomorphisme).

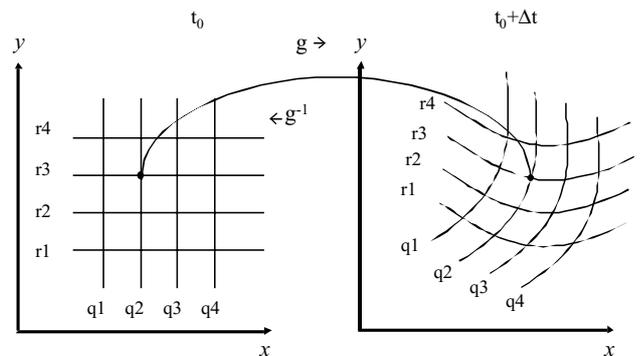


Figure 1. – Coordonnées matérielles d'un objet en 2D.

On considère dans le référentiel lagrangien un profil d'intensité exprimé par une fonction $I(\vec{q}, t)$ stationnaire (pas de modifications dans le temps). Par exemple, dans ce contexte, le point de coordonnées matérielles (q_2, r_3) possède la même intensité aux temps t_0 et $t_0 + \Delta t$, mais n'occupe pas la même position dans le référentiel \vec{x} de l'observateur (mais occupe les mêmes coordonnées dans le référentiel lagrangien soit (q_2, r_3)). Autrement dit, aucun mouvement n'est perçu dans le référentiel lagrangien et la génération d'une séquence d'images se résume donc à exprimer la fonction I dans le repère de l'observateur. Pour

simplifier, on choisit un système de coordonnées matérielles qui coïncide avec le système de l'observateur au temps t_0 de manière à formuler le profil d'intensité de la façon suivante :

$$I(\vec{q}, t_0) = I(\vec{x}(t_0)) \text{ au temps initial } t_0 \quad (1)$$

où \vec{x} représente le repère de l'observateur confondu au temps t_0 avec le repère de coordonnées matérielles \vec{q} . Pour exprimer le profil d'intensité dans le référentiel de l'observateur, on définit les fonctions inverses \vec{g}^{-1} qui relient les deux systèmes de coordonnées dans le temps (figure 1) pour formuler l'équation (1) sous la forme :

$$I(\vec{x}(t_0), t) = I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t)) \text{ au temps } t \quad (2)$$

L'équation (2) montre qu'il est possible de relier l'intensité d'une image au temps t à l'intensité de cette image au temps t_0 (à l'aide des fonctions \vec{g}^{-1}). Dans le cas où le profil d'intensité I n'a pas de représentation analytique, il faut alors interpoler numériquement la fonction I aux points définis par les transformations de coordonnées \vec{g} .

En résumé, les fonctions \vec{g} véhiculent les trajectoires (et \vec{g}^{-1} les trajectoires inverses) des points de l'objet soumis à un champ de vitesse. Dans la prochaine section nous décrivons ces fonctions pour une classe particulière de champ de vitesse : le champ de vitesse affine et stationnaire. Ce type de champ de vitesse permet de produire des mouvements élémentaires, tels la rotation, le cisaillement, la divergence, la translation, ou une combinaison de ces mouvements et permet une étude locale du mouvement.

2.2. formation de séquences d'images avec champs de vitesse affines stationnaires

Un champ de vitesse affine stationnaire peut se formuler à l'aide de [3, 4, 5] :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{M}\vec{x} + \vec{T} \quad (3)$$

où la matrice carrée \mathbf{M} et le vecteur de translation \vec{T} sont constants et \vec{u} représente les vitesses des points. L'expression analytique de la solution de ce système aux conditions initiales est [6] :

$$\vec{x}(t) = \varphi(t - t_0)\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t - \tau)\vec{T}d\tau \quad (4)$$

où $\varphi(t)$ est appelée matrice de transition [6] ou matrice principale [7]. Cette matrice est donnée par [8] :

$$\varphi(t) = \mathbf{V}_M \text{diag}(e^{\lambda_M t}) \mathbf{V}_M^{-1} = e^{\mathbf{M}t} \quad (5)$$

où \mathbf{V}_M est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres λ_M . En développant l'intégrale de convolution ¹ de l'équation (4), on obtient :

$$\vec{x}(t) = \varphi(t - t_0)\vec{x}(t_0) + [\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] \mathbf{M}^{-1}\vec{T} \quad (6)$$

où $\vec{x}(t_0)$ représente les conditions initiales du système d'équations différentielles alors que $\vec{x}(t)$ sont les coordonnées au temps t . Avec le modèle de formation d'images (équation 2), $\vec{x}(t_0)$ est la position dans le référentiel lagrangien et $\vec{x}(t)$ la position dans le référentiel eulérien et sont reliées par les trajectoires \vec{g} :

$$\vec{g}(\vec{x}(t_0), t) = \varphi(t - t_0)\vec{x}(t_0) + [\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] \mathbf{M}^{-1}\vec{T} \quad (7)$$

Les fonctions inverses $\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t)$ sont alors définies par (simplement en identifiant $\vec{x}(t) = \vec{g}(\vec{x}(t_0), t)$ et $\vec{x}(t_0) = \vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t)$ et en soustrayant $[\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] \mathbf{M}^{-1}\vec{T}$ de part et d'autre) :

$$\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t) = \varphi^{-1}(t - t_0) [\vec{x}(t) - [\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] \mathbf{M}^{-1}\vec{T}] \quad (8)$$

Ainsi, le modèle de génération de séquences d'images pour les champs de vitesse affines stationnaires se résume aux équations (2) et (8).

3. algorithme de flux optique avec champ de vitesse affine stationnaire

La formulation de cette méthode peut être obtenue en évaluant la dérivée totale de la fonction d'intensité $I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t))$ par rapport au temps (qui selon l'équation (2) fournit les intensités des pixels dans le référentiel Lagrangien) :

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \vec{g}^{-1}} \cdot \frac{\partial \vec{g}^{-1}}{\partial I} + \frac{\partial I}{\partial t} = I_{\vec{g}^{-1}} \cdot \vec{u} + I_t \quad (9)$$

où la notation $I_{\vec{g}^{-1}}$ représente les composantes spatiales du gradient $\frac{\partial}{\partial \vec{g}^{-1}} I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t))$ de la séquence d'images, I_t est la dérivée partielle temporelle $\partial I / \partial t$ et $\vec{u} \equiv \frac{\partial \vec{g}^{-1}}{\partial t}$ correspond au champ de vitesse recherché. On doit donc ajouter des contraintes

¹ Le développement de l'intégrale de convolution dans l'équation (4) diffère pour certaines formes de la matrice \mathbf{M} (\mathbf{M} singulière). Des représentations particulières pour ces cas sont présentées dans [9].

supplémentaires afin de restreindre l'ensemble des solutions satisfaisant l'équation (9). Une contrainte fréquemment utilisée dans la littérature force la conservation de l'intensité dans l'image, c'est-à-dire que l'on pose $dI/dt = 0$. Cependant, cette contrainte n'est pas toujours respectée en pratique et son utilisation constitue une approximation. Toutefois, lorsque le mouvement observé est assez faible et étudié localement, cette contrainte peut constituer une approximation raisonnable. L'équation (9) devient alors [10] :

$$I_{\vec{x}} \cdot \vec{u} = -I_t \quad (10)$$

où nous utilisons $\vec{g}^{-1} \equiv \vec{x}(t_0)$ afin de simplifier l'écriture (dans le référentiel lagrangien). La seconde contrainte véhicule la nature affine et stationnaire du champ de vitesse (équation 3) [5, 11, 12] :

$$\vec{u} = \mathbf{M}\vec{x} + \vec{T} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

où \vec{x} est décrit par les variables $[x \ y]^T$ et où θ_i sont les paramètres caractérisant ce champ. En insérant cette contrainte dans l'équation (10), on obtient une équation avec six inconnues et en appliquant cette relation à un ensemble de N pixels de l'image, on obtient un système linéaire surdéterminé décrit sous forme matricielle par :

$$\begin{bmatrix} I_{x_1}x_1 & I_{x_1}y_1 & I_{x_1} & I_{y_1}x_1 & I_{y_1}y_1 & I_{y_1} \\ I_{x_2}x_2 & I_{x_2}y_2 & I_{x_2} & I_{y_2}x_2 & I_{y_2}y_2 & I_{y_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{x_N}x_N & I_{x_N}y_N & I_{x_N} & I_{y_N}x_N & I_{y_N}y_N & I_{y_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_{t_1} \\ I_{t_2} \\ \vdots \\ I_{t_N} \end{bmatrix} \quad (12)$$

où (x_i, y_i) représentent les coordonnées du i^e pixel, et I_{t_i} le gradient temporel correspondant. Ce système linéaire peut s'écrire vectoriellement :

$$\mathbf{A}\vec{\theta} = \vec{b} \quad (13)$$

où la matrice \mathbf{A} contient les gradients spatiaux et \vec{b} les gradients temporels.

4. estimation du champ de vitesse par moindres carrés linéaires

Pour construire le système d'équations décrit dans (12), on doit évaluer les gradients de la fonction d'intensité $(I_{\vec{x}}, I_t)$, afin de calculer la matrice \mathbf{A} ainsi que le vecteur \vec{b} . En pratique, ces

gradients sont calculés à partir des échantillons disponibles dans la séquence d'images. Par exemple, on peut estimer les composantes spatiales du gradient, $I_{\vec{x}}$, à partir de différences centrées des échantillons de la première image alors que I_t peut être approximé par des différences avant entre les pixels de la deuxième et de la première image, c'est-à-dire :

$$I_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t)) \approx \frac{I(x + \Delta x, y, t_0) - I(x - \Delta x, y, t_0)}{2\Delta x} \quad (14a)$$

$$I_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t)) \approx \frac{I(x, y + \Delta y) - I(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \quad (14b)$$

$$I_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} I(\vec{g}^{-1}(x(t), t)) \approx \frac{I(x, y, t_0 - \Delta t) - I(x, y, t_0)}{\Delta t} \quad (15)$$

où les quantités Δx , Δy et Δt sont fixées par la modalité d'imagerie. L'erreur introduite par ces approximations par différences finies est proportionnelle à $(\Delta x)^2$ et $(\Delta y)^2$ pour I_x, I_y respectivement et à Δt en ce qui concerne I_t [13]. Donc, la qualité de l'estimation du champ de vitesse est étroitement liée à la précision des gradients de l'images [14]. Une façon d'améliorer l'estimation des gradients de l'image est de contrôler les fréquences d'échantillonnage spatiales et temporelles ($\Delta x, \Delta y$ et Δt). Par contre, les limitations physiques du système d'imagerie interviennent pour fixer la résolution spatio-temporelle. Ainsi, en considérant que les gradients de l'image sont approximés par différences finies, le système d'équations décrit en (13) devient :

$$(\mathbf{A} + \delta_A)\vec{\theta} = \vec{b} + \vec{\delta}_b \quad (16)$$

où les erreurs (perturbations) δ_A et $\vec{\delta}_b$ viennent modifier l'estimation du vecteur paramètre θ . Cependant, pour certains systèmes d'imagerie médicaux, la résolution temporelle est faible ; c'est pourquoi nous proposons d'améliorer l'estimation numérique de I_t . Autrement dit, nous nous intéressons à évaluer la composante de $\vec{\delta}_b$ de l'équation (16) correspondant à l'erreur d'approximation numérique de I_t tout en négligeant δ_A (erreur sur I_x et I_y). On étudie alors le système :

$$\mathbf{A}\vec{\theta} = \vec{b} + \vec{\delta}_b \quad (17)$$

Sous cette forme, on note que le terme $\vec{\delta}_b$ représente ce qu'il faut ajouter à l'approximation numérique I_t (terme \vec{b}) afin d'obtenir un estimé plus précis de la dérivée temporelle. Avec cette formulation, il est toujours supposé que la variation globale d'intensité sur la zone de calcul considérée, $dI/dt = 0$, est respectée. Dans l'approche conventionnelle, le calcul s'effectue avec la composante temporelle du gradient (\vec{b}) par différences finies sans tenir compte de l'erreur de cette approximation ($\vec{\delta}_b = \vec{0}$).

Dans ce contexte, l'estimation au sens des moindres carrés linéaires (MCL) de $\vec{\theta}$, notée $\hat{\vec{\theta}}$, est donnée par :

$$\hat{\vec{\theta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{b} \quad (18)$$

pour autant que l'inverse de la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ existe, ce qui n'est pas toujours le cas [9]. La quantité $\hat{\vec{\theta}}$ représente donc l'estimation des paramètres du mouvement du champ de vitesse qui minimise au sens des moindres carrés le résidu (\vec{r}) de régression, c'est-à-dire :

$$\min_{\vec{\theta}} \|\vec{r}\|^2 \text{ où } \vec{r} = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{\theta} \quad (19)$$

En reformulant l'équation (18), il est possible d'isoler l'effet de l'erreur d'approximation du gradient ($\vec{\delta}_b$) : $\hat{\vec{\theta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = (\vec{y} + \vec{\delta}_b - \vec{\delta}_b)$. Sous cette forme, l'espérance de $\hat{\vec{\theta}}$ donne :

$$\begin{aligned} E[\hat{\vec{\theta}}] &= E\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\vec{b} + \vec{\delta}_b) - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\delta}_b\right] \\ &= E\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\vec{b} + \vec{\delta}_b)\right] - E\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\delta}_b\right] \\ &= \vec{\theta}_{nb} - \underbrace{E\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\delta}_b\right]}_{\vec{B}=\text{biais}} \end{aligned} \quad (20)$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'opérateur d'espérance. On observe que $E[\hat{\vec{\theta}}]$ est composée de deux parties : la solution exacte non biaisée, notée $\vec{\theta}_{nb} = \vec{\theta}$, et un biais venant dégrader l'estimation du champ de vitesse. L'équation (20) met en évidence la relation de proportionnalité entre le biais (\vec{B}) et l'erreur d'approximation de la composante temporelle du gradient ($\vec{\delta}_b$). Ce biais est nul si $\vec{\delta}_b$ est indépendant de \mathbf{A} et de moyenne nulle. Toutefois, dans la prochaine section, on montre que l'erreur d'estimation de la composante temporelle du gradient (terme $\vec{\delta}_b$ qui correspondant à l'erreur de troncature de la dérivée I_t) dépend de \mathbf{A} et de $\vec{\theta}$, ce qui introduit un biais indésirable. Par contre, si cette erreur de troncature pour l'approximation numérique est incluse dans l'estimation de I_t (terme \vec{b}), le terme $\vec{\delta}_b$ devient indépendant de \mathbf{A} [9]. Enfin, on montre que la variance de l'estimation du champ de vitesse s'exprime par le deuxième moment autour de la moyenne non biaisée :

$$\begin{aligned} \text{cov}[\hat{\vec{\theta}}] &= E\left[\left[\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta}_{nb}\right] \left[\hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta}_{nb}\right]^T\right] = \text{cov}[\vec{\delta}_b] \\ &= \text{cov}\left[(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \vec{\delta}_b\right] \end{aligned} \quad (21)$$

Dans la prochaine section, nous allons considérer l'équation (17) en évaluant le terme $\vec{\delta}_b$ qui correspond à l'erreur d'approximation numérique (erreur de troncature) de I_t . Autrement dit, nous allons introduire l'erreur ($\vec{\delta}_b \neq \vec{0}$) inhérente à l'utilisation de différences finies afin d'améliorer le gradient temporel de I . C'est cette approche combinée à l'utilisation du concept de trajectoire qui permet un estimé d'ordre supérieur sans nécessiter un plus grand nombre de trames successives.

5. estimation du champ de vitesse par moindres carrés non linéaires

Afin d'améliorer l'estimation du champ de vitesse, on étudie l'expression de l'approximation numérique de I_t . On montre plus loin que cette erreur est dépendante de $\vec{\theta}$, ce qui transforme le système linéaire (17) en un système non linéaire :

$$\mathbf{A}\vec{\theta} = \vec{b} + \vec{\delta}_b(\vec{\theta}) \quad (22)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}\vec{\theta} - \vec{\delta}_b(\vec{\theta}) - \vec{b} = 0 \quad (23)$$

où l'on cherche à minimiser la somme des carrés des résidus par moindres carrés non linéaires (MCnL) :

$$\min_{\vec{\theta}} \|\vec{r}\|^2 \text{ où } \vec{r} = \mathbf{A}\vec{\theta} - \vec{\delta}_b(\vec{\theta}) - \vec{b} \quad (24)$$

Ce problème d'optimisation fait appel à des méthodes itératives. Les résultats de cet article ont été obtenus avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt [15] disponible dans l'environnement Matlab et appliquée pour le calcul de l'inconnue $\vec{\theta}$ [16]. Une autre approche est proposée dans [12] où une variation globale d'intensité sur la zone considérée est autorisée. Mathématiquement, on pourrait faire correspondre ces termes additionnels au paramètre de variation globale d'intensité présenté dans [12]. Cependant, l'approche que nous proposons, où une représentation mathématique découlant d'un développement d'ordre supérieur de la série de Taylor pour l'estimation des gradients d'intensité I_t est utilisée, est conceptuellement différente. Il faut aussi mentionner que l'approche proposée est développée en monorésolution. Les mêmes concepts pourraient être formulés dans une approche multirésolution. Cependant, selon le type d'images à traiter, certaines approches multirésolution ne sont pas sans problème (par exemple, des estimés optimaux de

vitesse obtenus à une échelle donnée peuvent être détériorés à une échelle plus fine). De plus, certaines font usage de représentations numériques sur plus de deux points pour améliorer le calcul de I_t ce qui nécessite plus de deux images successives [17].

Dans ce qui suit, nous développons le terme $\vec{\delta}_b(\vec{\theta})$ qui correspond à l'erreur d'estimation de I_t . Pour ce faire, on considère le développement en série de Taylor de la fonction d'intensité $I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t))$ autour de $(\vec{x}_i, t + \Delta t)$:

$$I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t + \Delta t)) = \sum_{n=0}^3 \frac{(\Delta t)^n}{n!} I_{t^n}(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t)) + o(\Delta t^4) \quad (25)$$

où le terme $O(\Delta t^4)$ regroupe tous les termes d'ordre supérieur. En isolant la dérivée du premier ordre, $I_t(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t))$ dans l'équation (25), on obtient la formule de différences arrière bien connue en analyse numérique [13]:

$$I_t(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t)) = \underbrace{\frac{I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t + \Delta t)) - I(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t))}{\Delta t}}_{\vec{b}} - \underbrace{\sum_{n=2}^3 \frac{(\Delta t)^{n-1}}{n!} I_{t^n}(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t))}_{\vec{\delta}_b} + O(\Delta t^4) \quad (26)$$

L'erreur d'approximation du gradient temporel est assimilée aux termes d'ordre deux et trois de l'équation (26) (dont nous montrons le développement en annexe):

$$\vec{\delta}_b(\vec{\theta}) = - \sum_{n=2}^3 \frac{(\Delta t)^{n-1}}{n!} I_{t^n}(\vec{g}^{-1}(\vec{x}_i, t)) \quad (27)$$

La raison de se limiter à l'ordre trois est reliée aux concepts de dissipation et de dispersion numériques associés à l'équation (22). En effet, en général lorsque le terme dominant associé à une erreur de troncature (termes non retenus dans le développement en série) est d'ordre pair, la solution numérique a un comportement dissipatif et lorsque le terme dominant est d'ordre impair, la solution numérique a un comportement dispersif. En pratique, un comportement dissipatif a tendance à lisser les solutions alors qu'un comportement dispersif peut introduire des oscillations dans la solution. En retenant les termes d'ordre trois, le terme dominant (Δt^4) présente donc un comportement dissipatif [18].

Pour un champ affine stationnaire, la dépendance par rapport à $\vec{\theta}$ est véhiculée par la matrice \mathbf{M} et le vecteur \vec{T} présents dans les fonctions \vec{g}^{-1} (11). Cette estimation de l'erreur sur I_t est valable pour autant que la série de Taylor (25) soit convergente ou, plus précisément, que les termes d'ordre supérieur $(O(\Delta t^4))$

soient négligeables. Notons que les termes d'ordre supérieur peuvent faire partie de la représentation numérique de I_t . Par exemple, si l'on utilise une différence centrée, le terme en Δt de (26) est inclus dans l'approximation de la dérivée et l'erreur est donc de l'ordre de Δt^3 . Enfin, pour utiliser (27), on doit évaluer les dérivées partielles d'ordre n par rapport au temps de la fonction d'intensité, :

$$I_{t^n} = \sum_{k=1}^n (I_{\vec{g}^{-1}})_{t^{k-1}} (\vec{g}^{-1})_{t^{n-k+1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \quad (28)$$

$$(\vec{g}^{-1})_{t^n} = (-1)^n \mathbf{M}^{n-1} [\mathbf{M} \vec{g}^{-1} + \vec{T}] \quad (29)$$

où I_{t^n} représente la dérivée partielle temporelle d'ordre n de la fonction d'intensité I soit $\frac{\partial^n I}{\partial t^n}$, $I_{\vec{g}^{-1}}$ sont les dérivées partielles spatiales du premier ordre de I soit $\frac{\partial I}{\partial \vec{g}^{-1}}$ ou encore $\frac{\partial I}{\partial \vec{x}(t_0)}$ dans le référentiel lagrangien, $(\vec{g}^{-1})_{t^n}$ sont les dérivées temporelles d'ordre n des trajectoires inverses $\frac{\partial^n \vec{g}^{-1}}{\partial t^n}$ et $I_{(\vec{g}^{-1})^k}$ sont les dérivées temporelles d'ordre k de $I_{\vec{g}^{-1}}$, soit $\frac{\partial^k \vec{g}^{-1}}{\partial t^k}$. Ces formules ont été obtenues par inspection en étudiant les développements de quelques ordres supérieurs. On trouve en annexe un développement plus détaillé de ces relations.

6. résultats avec séquences d'images simulées

Nous utilisons le modèle de formation d'images, décrit à la section 2, que nous appliquons, dans un premier temps, à une image constituée de gaussiennes et, dans un deuxième temps, à des images échographiques simulées selon un modèle décrit dans [19, 20].

La figure (2a) montre l'image gaussienne qui est soumise au mouvement illustré à la figure (3b) et décrit au tableau (1). Nous avons appliqué le même champ de vitesse pendant une période de temps Δt variant de 1/50 à 1/10 s. La figure (3) montre les résultats d'estimation pour les six paramètres du champ de vitesse obtenus avec la méthode conventionnelle par moindres carrés linéaires (MCL en traits pointillés) et avec la méthode proposée par moindres carrés non linéaires (MCnL en traits continus). Dans cette figure l'axe vertical représente la valeur du paramètre et l'axe horizontal est le pas de temps. Les résultats indiquent que les coefficients du champ de vitesse sont mieux estimés par la méthode proposée (MCnL) que par la

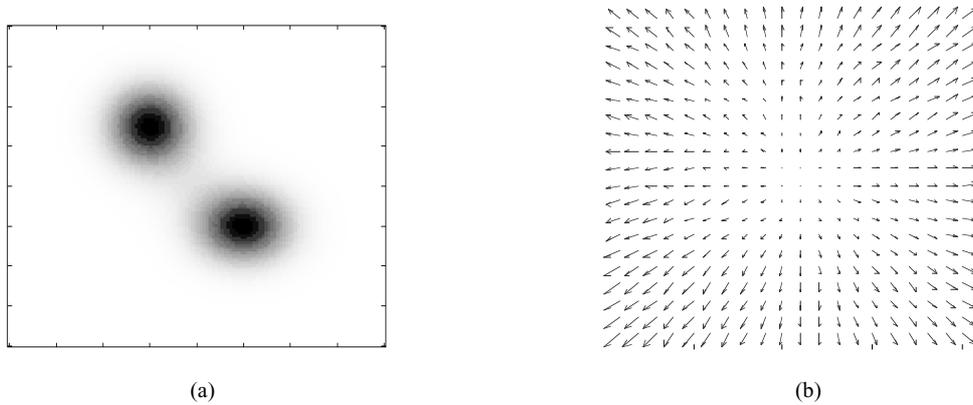


Figure 2. – Exemple (a) d'image gaussienne et (b) du champ de vitesse utilisé pour la génération de la séquence.

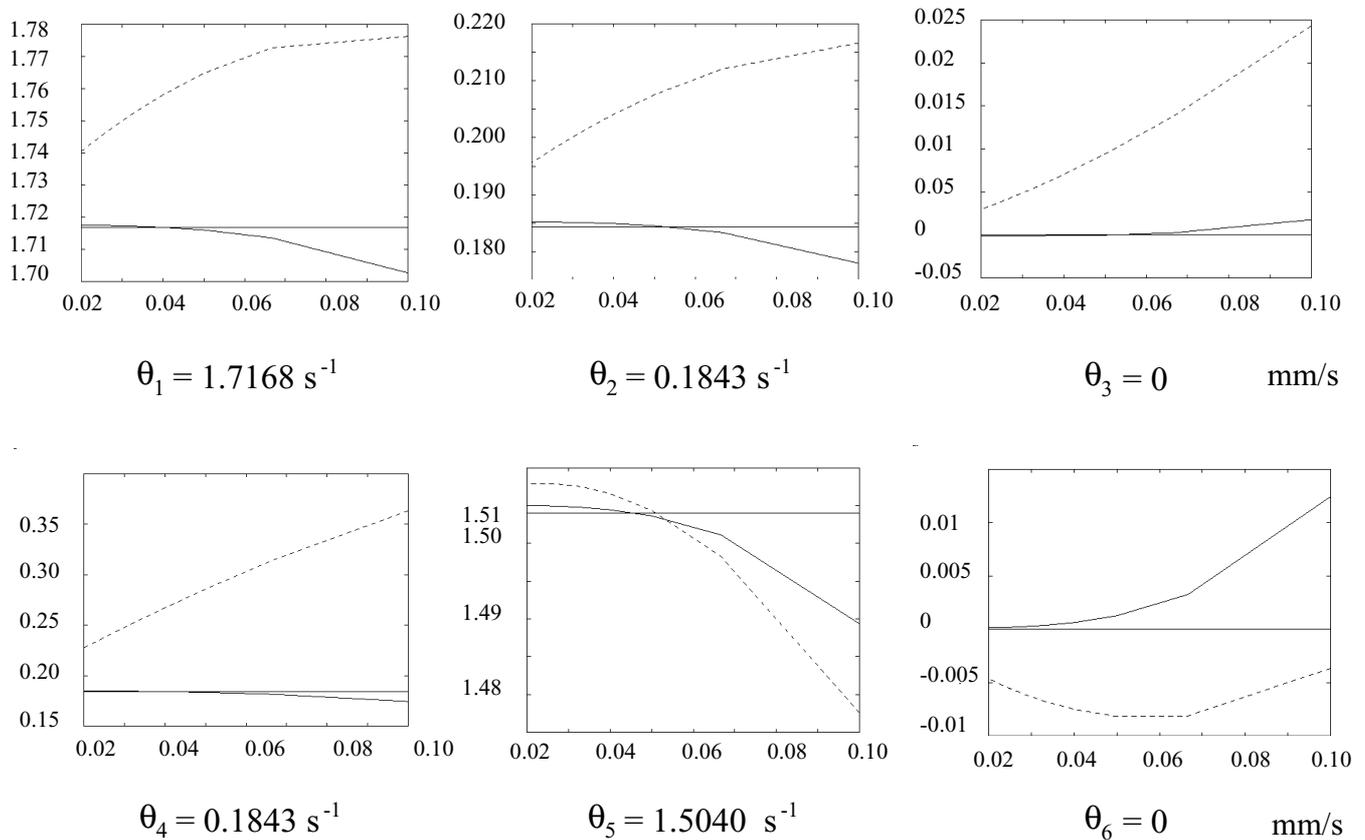


Figure 3. – Résultats d'estimation des paramètres du champ utilisés pour la génération de la séquence. Paramètres utilisés : a) $\theta_1 = 1.7168 \text{ s}^{-1}$, b) $\theta_2 = 0.1843 \text{ s}^{-1}$, c) $\theta_3 = 0 \text{ mm/s}$, d) $\theta_4 = 0.1843 \text{ s}^{-1}$, e) $\theta_5 = 1.5040 \text{ s}^{-1}$ et f) $\theta_6 = 0 \text{ mm/s}$. Ces résultats illustrent les estimations de chaque paramètre du champ de vitesse pour différents pas d'échantillonnage. Les courbes en traits pointillés représentent les estimations évaluées par moindres carrés linéaires (MCL), les courbes en traits continus montrent l'estimation par moindres carrés non linéaires (MCnL) et les lignes horizontales illustrent la valeur de chaque composante θ_i utilisée dans la simulation.

Tableau 1. – Paramètres utilisés pour la génération de la séquence gaussienne.

Périodes d'échantillonnage	$\Delta x = \Delta y = 0.063 \text{ mm}$
Champ de vitesse simulé (équation 3)	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_4 & \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7168 & 0.1843 \\ 0.1843 & 1.5040 \end{bmatrix},$ $\vec{T} = \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Région d'intérêt	Taille des images : $128 \times 128 \text{ pixels} \Rightarrow (8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm})$

méthode conventionnelle (MCL). La figure (4) résume les résultats de simulation par l'erreur relative globale en norme euclidienne entre les paramètres des champs de vitesse estimé ($\hat{\vec{\theta}}$) et simulé $\vec{\theta}$ en fonction des différents pas d'échantillonnage utilisés :

$$e = \frac{\|\vec{\theta} - \hat{\vec{\theta}}\|}{\|\vec{\theta}\|} * 100 \quad (30)$$

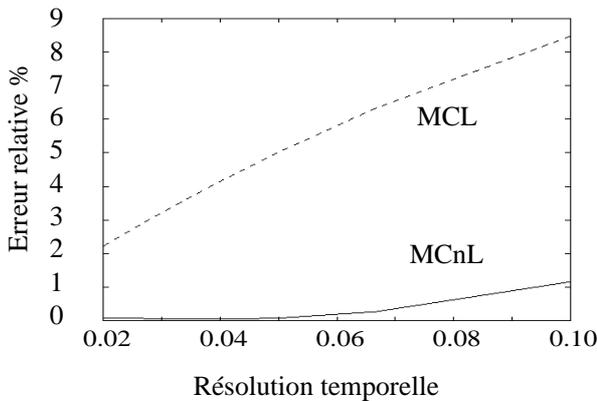


Figure 4. – Erreurs euclidiennes d'estimation des paramètres du champ utilisés pour les images gaussiennes.

Nous avons ensuite simulé 100 réalisations statistiques indépendantes de paires d'images échographiques mode B représentant la déformation de 100 tissus différents soumis à un même mouvement². À partir de ces 100 paires d'images, nous avons comparé les estimations du champ de vitesse obtenues par moindres carrés linéaires et non linéaires. La figure (5a)

² Notons que dans ce contexte d'image échographique simulée, nous sommes limités en ce qui concerne les variations du pas d'échantillonnage temporel. En effet, étant donné les caractéristiques du modèle de formation d'image, les images successives deviennent décorréllées avec des Δt croissants.

montre une image de texture échographique simulée type et (5b) illustre le champ de vitesse appliqué à ces images simulées et le tableau (2) résume les conditions de simulation. La figure (6) et le tableau (3) résument les résultats obtenus.

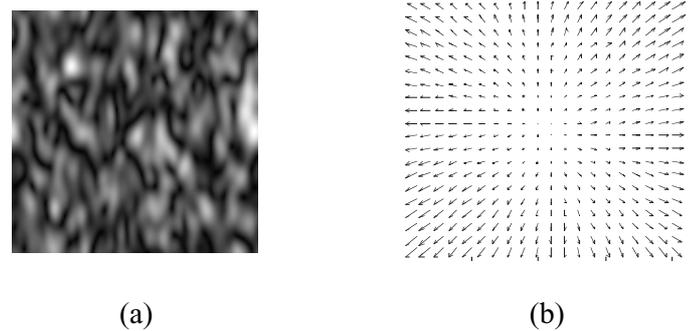


Figure 5. – Exemple (a) d'image de texture d'échographie simulée et (b) du champ de vitesse utilisé pour la génération de la séquence.

Tableau 2. – Paramètres utilisés pour la génération de la séquence de la texture échographique simulée mode B.

Écart-type latéral de la réponse impulsionnelle	$\sigma_x = 0.1716 \text{ mm}$
Écart-type axial de la réponse impulsionnelle	$\sigma_y = 0.6860 \text{ mm}$
Fréquence du transducteur	$f = 3 \text{ MHz}$
Périodes d'échantillonnage	$\Delta x = \Delta y = 0.063 \text{ mm},$ $\Delta t = 1/50 \text{ s}$

Tableau 3. – Résumé des résultats d'estimation des paramètres du champ pour les textures échographiques simulées. a) Paramètres du champ de vitesse recherchés, b) Moyenne des paramètres du champ de vitesse estimés ; c) Biais moyen des paramètres du champ de vitesse estimés $\vec{B} = \hat{\vec{\theta}} - \vec{\theta}$, d) Écart-types observés des paramètres du champ de vitesses estimés et e) Norme de l'erreur des paramètres du champ de vitesse moyen (équation 30).

(a) $\vec{\theta}$	
MCL	[1.7168 0.1843 0.0000 0.1843 1.5040 0.0000]
MCnL	[1.7168 0.1843 0.0000 0.1843 1.5040 0.0000]
(b) $\hat{\vec{\theta}}$	
MCL	[1.3132 0.1274 0.0071 0.1805 1.1593 0.0150]
MCnL	[1.7587 0.1797 0.0245 0.1750 1.4219 - 0.0047]
(c) \vec{B}	
MCL	[0.4046 0.0569 - 0.0071 0.0038 0.3447 - 0.0150]
MCnL	[- 0.0419 0.0046 - 0.0245 0.0093 0.0821 0.0047]
(d) $\sigma(\hat{\vec{\theta}})$	
MCL	[0.1026 0.0931 0.1941 0.3540 0.3800 0.8250]
MCnL	[0.0672 0.0901 0.1841 0.3079 0.3709 0.8633]
(e) Erreur	
MCL	23.28 %
MCnL	4.18 %

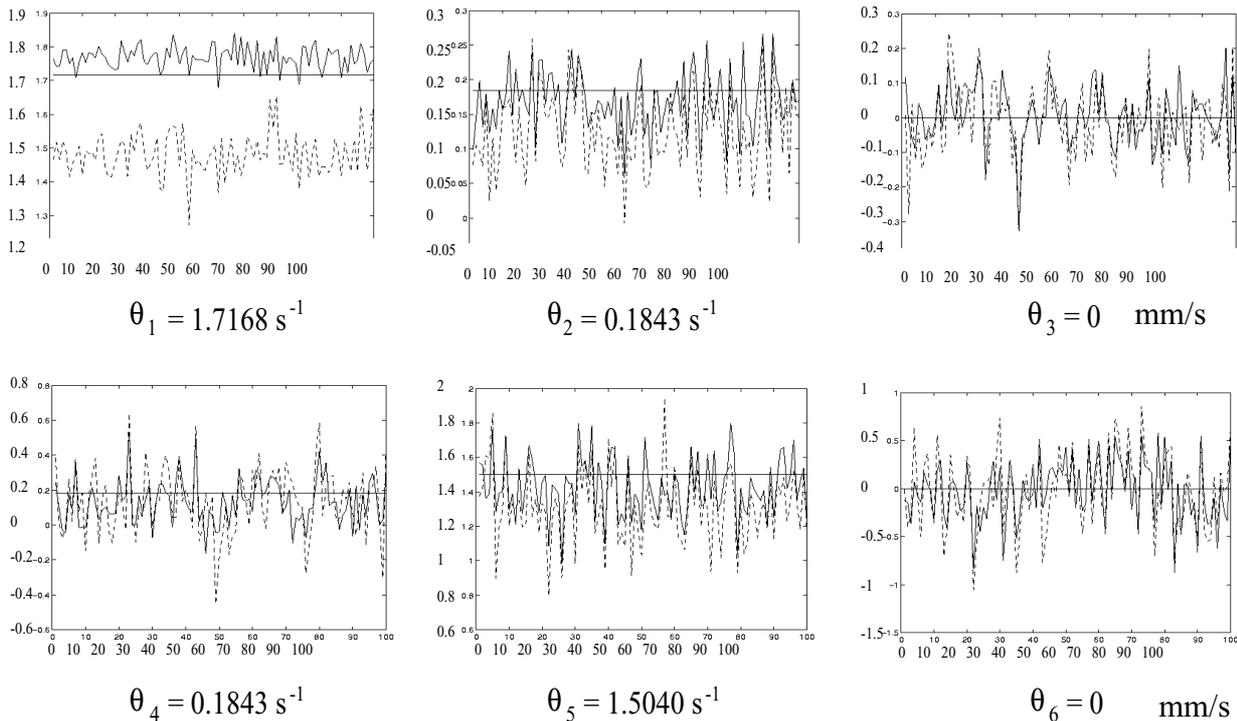


Figure 6. – Résultats d’estimation des paramètres du champ utilisés pour la génération de la séquence. Paramètres utilisés : a) $\theta_1 = 1.7168 \text{ s}^{-1}$, b) $\theta_2 = 0.1843 \text{ s}^{-1}$, c) $\theta_3 = 0 \text{ mm/s}$ d) $\theta_4 = 0.1843 \text{ s}^{-1}$, e) $\theta_5 = 1.5040 \text{ s}^{-1}$ et f) $\theta_6 = 0 \text{ mm/s}$. Ces résultats montrent les 100 estimations de chaque paramètre θ_i par les deux méthodes (les moindres carrés linéaires (MCL) en traits pointillés et les moindres carrés non linéaires (MCnL) en traits continus).

Ces figures montrent que la méthode proposée (MCnL traits continus) fournit des résultats qui ont moins de variabilité que la méthode conventionnelle (MCL en traits pointillés). Le tableau (3) et la figure (6) montrent bien la réduction du biais que procure l’estimateur MCnL, particulièrement pour les paramètres θ (1) (0.04 vs 0.40 /s) et θ (5) (0.08 vs 0.34 /s). Cette réduction du biais se traduit par une baisse de l’erreur quadratique sur le champ de vitesse moyen (4.18 % vs 23.28 %).

Soulignons qu’avec une approche standard de développement en série de Taylor, plusieurs images successives de la séquence temporelle sont nécessaires pour l’amélioration de l’estimation de gradient, la formulation proposée requiert un nombre fixe d’images successives, l’amélioration étant obtenue par le processus itératif de la méthode (ce qui peut aussi s’interpréter comme une interpolation non-linéaire des trajectoires des pixels). Ceci pourrait présenter des avantages pour les cas pratiques où les séquences temporelles sont sous-échantillonnées. De telles situations sont courantes, notamment en médecine nucléaire, en résonance magnétique nucléaire et en tomographie (CT), où les temps d’acquisition et de formation des images sont importants.

7. résultats sur une séquence d’images réelles

Dans cette section nous illustrons l’utilisation de la méthode sur une séquence d’images échographiques représentant l’action du muscle extenseur propre de l’auriculaire afin d’évaluer la déformation lorsque le sujet lève et descend son auriculaire. La raison de ce choix est que ce muscle est le seul qui réagit lors du mouvement de l’auriculaire ce qui permet de mieux isoler la zone d’intérêt et limite la complexité du problème. La figure (7a) illustre l’anatomie de l’avant-bras alors que les figures (7b) et (7c) montrent une image typique et la zone d’intérêt considérée pour les calculs de flux optique. La séquence a été obtenue à une fréquence de 30 images par seconde pendant 9 secondes avec un appareil échographique Hitachi (EUB-405) muni d’une sonde linéaire de 7.5 MHz (EUP-L33S). La numérisation des images a été effectuée avec l’équipement suivant : 1) un numériseur 8 bits XVideo « (modèle XV-24SVC-VIO) avec le logiciel Video-Tool » (Parallax Graphics Inc.), 2) une station Sun avec SunOs et OpenWin et 3) un vidéo super-VHS Mitsubishi BV-2000.

Estimation de modèles paramétrés de mouvement par moindres carrés non-linéaire

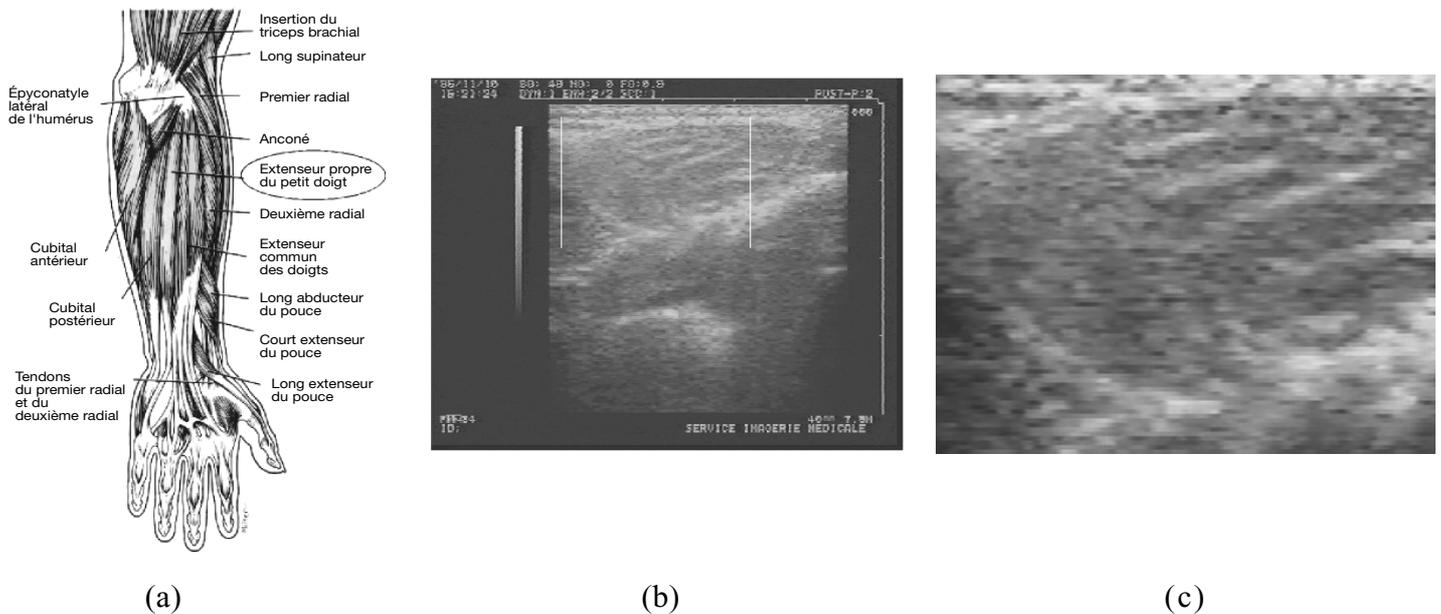


Figure 7. – a) Illustration de l'emplacement anatomique de l'extenseur de l'auriculaire, b) Image type de séquence d'images mode B tel que fournie par l'appareil échographique et c) Zone considérée délimitant l'extenseur de l'auriculaire.

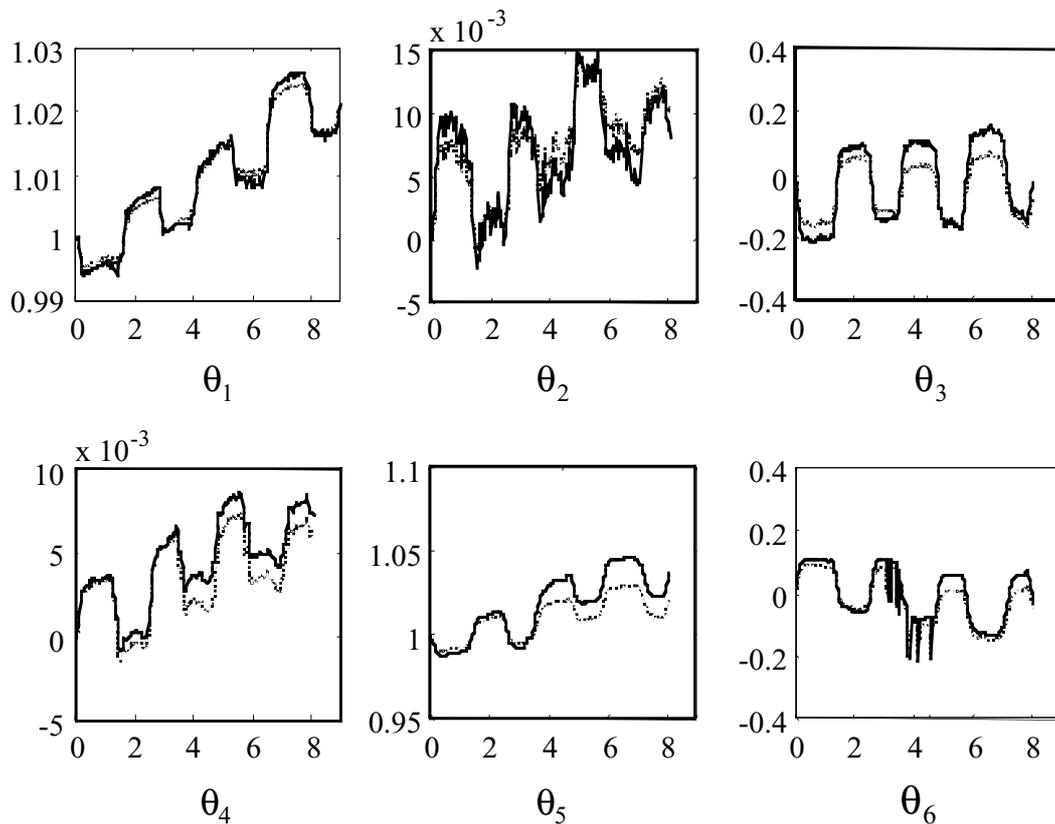


Figure 8. – Résultats d'estimation des paramètres du champ utilisés pour la séquence échographique de l'extenseur de l'auriculaire. Pour θ_1 à θ_4 l'ordonnée est un s^{-1} , pour θ_5 et θ_6 l'ordonnée est en mm et pour l'ensemble des résultats l'abscisse est en secondes (les résultats des moindres carrés linéaires (MCL) sont en traits continus et ceux correspondant des moindres carrés non linéaires (MCNL) sont en traits pointillés).

Les résultats présentés sont associés au champ de déplacement (6) des pixels. On évalue la matrice $\varphi(t)$ à partir des estimations du champ de vitesse entre chaque paire d'images (\mathbf{M}_i et \vec{T}_i). Pour évaluer la matrice $\varphi(t)$, il faut cumuler les matrices intermédiaires $\varphi_i(\Delta t)$ estimées entre chaque paire d'images de la séquence, c'est-à-dire :

$$\varphi(k\Delta t) = \prod_{i=1}^k \varphi_i(\Delta t) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(\Delta t) = e^{M_i \Delta t} \quad (31)$$

De façon similaire, la translation cumulée au $t_0 + k\Delta t$ s'exprime par :

$$\vec{T}_d(k\Delta t) = \sum_{i=1}^k (\varphi_i(\Delta t))^{i-1} [\varphi_i(\Delta t) - \mathbf{I}] \mathbf{M}_i^{-1} \vec{T}_i \quad (32)$$

Les figures (8a) à (8d) montrent les composantes de déformation biaxiale correspondant à la dilatation et la contraction du muscle dans le temps. La nature cyclique des signaux obtenus est associée au mouvement de l'auriculaire lors de l'acquisition des images. Ainsi, les dilatations/contractions selon les axes principaux de déformation sont de l'ordre de 0.5 % et 1 % respectivement. On note un phénomène de dérive pour les deux méthodes de calcul (MCL et MCnL). On remarque aussi certaines difficultés des algorithmes en particulier pour la deuxième composante de la translation. Ces difficultés peuvent être causées par des variations importantes des intensités dans les images échographiques en raison d'un mauvais couplage mécanique de la sonde échographique. Toutefois, il apparaît dans ces figures que le biais semble moins important avec la méthode proposée (moins de dérive). Il peut y avoir plusieurs origines à ce biais résiduel : il y a toujours une erreur de troncature sur I_t bien que d'ordre supérieur, les estimés de I_x et I_y sont du premier ordre, l'hypothèse de constance des intensités sur la zone considérée $dI/dt = 0$ n'est pas respectée et la présence de bruit dans les images réelles.

8. discussion et conclusion

La qualité de l'estimation du champ de vitesse par la méthode du flux optique est directement liée à la précision de l'estimation des gradients de la fonction d'intensité. Ainsi, nous avons proposé d'améliorer l'approximation par différences finies de la composante temporelle du gradient, I_t , en considérant l'ajout des termes d'ordre supérieur de la série de Taylor du profil d'intensité qui, combiné à un formalisme sur les trajectoires des pixels, nous mène à la formulation d'un système non linéaire dont la solution fait appel à des techniques itératives.

La méthode pourrait être très intéressante pour les cas où très peu d'images successives sont disponibles (par exemple, l'élastographie avec seulement deux images successives [21]). En

effet, comme nous l'avons mentionné, contrairement à une approche standard de développement en série de Taylor, où plusieurs images successives de la séquence temporelle sont nécessaires pour l'amélioration de l'estimation de gradient, la formulation proposée requiert un nombre fixe d'images successives. Il est possible aussi d'imaginer une généralisation de l'approche en incluant davantage de termes d'ordre supérieur dans le développement en série de Taylor. Ceci se traduirait par un système non linéaire d'ordre n au lieu d'un système d'ordre trois tel que présenté dans cet article.

Il faut souligner, comme nous l'avons déjà mentionné, que l'hypothèse de variation globale d'intensité sur la zone de calcul est en partie compensée par les termes d'ordres supérieurs du développement en série des gradients d'intensité. Il faut aussi mentionner que pour les images d'intérêt dans le présent travail (images de transmittance), il n'y a pas de concept de réflexion spéculaire ou de variations d'éclairage. De plus, le contexte choisi exclut le problème des occultations. Enfin, les images simulées n'étaient pas bruitées, le but étant de vérifier le comportement de l'algorithme dans les meilleures conditions. Cependant, l'impact du bruit peut être apprécié avec les essais sur les images réelles de la séquence échographique de l'extenseur de l'auriculaire.

Le modèle de mouvement choisi (modèle affine) est un modèle simplifié qui ne peut tenir compte de mouvement très complexe. Il est cependant satisfaisant pour des études locales de mouvement. Mentionnons toutefois que le concept de trajectoires ne nécessite pas de se limiter au modèle affine. Des modèles plus complexes (polynomiaux, combinaisons de fonctions élémentaires et même les solutions d'opérateurs aux dérivées partielles) pourraient être utilisés. Ceci permettrait par exemple d'utiliser comme modèle générant les trajectoires l'opérateur physique de l'équation d'état qui gouverne le phénomène d'intérêt.

Annexe : compléments de développement pour les équations (27), (28) et (29)

La première étape est le calcul de la dérivée temporelle des trajectoires inverses \vec{g}^{-1} , on montre que celles-ci peuvent s'exprimer en terme de \vec{g} . En effet, avec l'équation (3), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{-1}(t - t_0) \vec{x}(t_0) - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{-1}(t - t_0) \right. \\ &\quad \left. [\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] M^{-1} \vec{T} + \varphi^{-1}(t - t_0) \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. \left([\varphi(t - t_0) - \mathbf{I}] M^{-1} \vec{T} \right) \right\} \end{aligned}$$

En se référant à l'équation (5), on calcule la dérivée de la matrice de transition φ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{-1}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ V_M \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} \right\} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} -\lambda_{M1}e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & -\lambda_{M2}e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} -\lambda_{M1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{M2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} -\lambda_{M1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{M2} \end{bmatrix} V_M^{-1} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} = -M\varphi^{-1}(t)
 \end{aligned}$$

Ce dernier résultat découle du fait que λ_{M1} et λ_{M2} et V_M sont respectivement les valeurs propres et la matrice des vecteurs propres associées à la matrice M , ce qui donne la diagonalisation suivante $M = V_M \Lambda V_M^{-1}$ avec Λ la matrice diagonale formée des valeurs propres λ_{M1} et λ_{M2} . Un résultat presque identique (à un signe près) est obtenu pour la dérivée de φ . Cette propriété découle de la représentation du modèle affine et du fait que la matrice de transition pour ce cas a une forme exponentielle. Avec ces résultats, nous obtenons le développement suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t) &= -M\varphi^{-1}(t - t_0)\vec{x}(t_0) \\
 &\quad - \left\{ -M\varphi^{-1}(t - t_0) [\varphi(t - t_0) - I] M^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \vec{T}\varphi^{-1}(t - t_0) [M\varphi(t - t_0)] M^{-1}\vec{T} \right\} \\
 &= -M \left\{ \varphi^{-1}(t - t_0) [\vec{x}(t_0) - [\varphi(t - t_0) \right. \\
 &\quad \left. - I] M^{-1}\vec{T}] \right\} - \varphi^{-1}(t - t_0) M\varphi(t - t_0) M^{-1}\vec{T}
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans le premier regroupement l'expression de \vec{g}^{-1} que l'on retrouve à l'équation (8). Nous avons donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{g}^{-1}(\vec{x}(t), t) = -M\vec{g}^{-1} - \varphi^{-1}(t - t_0) M\varphi(t - t_0) M^{-1}\vec{T}$$

En se référant aux représentations matricielles pour φ et T , nous obtenons pour le second terme :

$$\begin{aligned}
 &\varphi^{-1}(t - t_0) M\varphi(t - t_0) M^{-1}\vec{T} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} M V_M \begin{bmatrix} e^{\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} M^{-1}\vec{T} \\
 &= V_M \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} \Lambda \begin{bmatrix} e^{\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} M^{-1}\vec{T} \\
 &= V_M \Lambda \begin{bmatrix} e^{-\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_{M1}t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_{M2}t} \end{bmatrix} V_M^{-1} M^{-1}\vec{T} \\
 &= V_M \Lambda V_M^{-1} M^{-1} = M M^{-1} = I\vec{T}
 \end{aligned}$$

Ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{g}^{-1} = -M\vec{g}^{-1} - \vec{T}$$

On constate donc qu'en raison de la matrice de transition qui a une forme exponentielle pour le cas du modèle affine, la dérivée temporelle des trajectoires inverses est en proportionnalité avec les trajectoires inverses elle mêmes. En effectuant les mêmes opérations, on arrive aux expressions suivantes pour les dérivées d'ordre supérieur des trajectoires :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}^{-1} &= -M\vec{g}^{-1} - \vec{T}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{g}^{-1} = M^2\vec{g}^{-1} + M\vec{T}, \\
 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \vec{g}^{-1} &= -M^3\vec{g}^{-1} - M^2\vec{T}
 \end{aligned}$$

Par inspection, on déduit la relation de récurrence suivante (équation (29) de l'article):

$$(\vec{g}^{-1})_{t^n} = (-1)^n M^{n-1} [M\vec{g}^{-1} + \vec{T}]$$

Pour les dérivées temporelles des intensités, nous avons:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} I &= \frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \frac{\partial g^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial g^{-1}} I, \frac{\partial}{\partial h^{-1}} I \right) \\
 &\quad \cdot \left(\frac{\partial g^{-1}}{\partial t}, \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} \right) = (I_{g^{-1}}, I_{h^{-1}}) \cdot (g_t^{-1}, h_t^{-1}) = I_{\vec{g}^{-1}} \cdot \vec{g}_t^{-1}
 \end{aligned}$$

où nous utilisons la notation $I_{\vec{g}^{-1}} = (I_{g^{-1}}, I_{h^{-1}})$ et $\vec{g}_t^{-1} = (g_t^{-1}, h_t^{-1})$. On peut alors montrer que les dérivées d'ordre supérieur de I peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} I &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \frac{\partial g^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} \right) = \frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial t^2} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right) \frac{\partial g^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \frac{\partial^2 h^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} \\
 &= I_{\vec{g}^{-1}} \cdot \vec{g}_{t^2}^{-1} + (I_{\vec{g}^{-1}}) \cdot \vec{g}_t^{-1}
 \end{aligned}$$

avec la notation $(I_{\vec{g}^{-1}})_t = ((I_{g^{-1}})_t, (I_{h^{-1}})_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right), \right.$

$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \right)$ et $\vec{g}_{t^2}^{-1} = \left(\frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 h^{-1}}{\partial t^2} \right)$. De manière similaire, on développe la dérivée d'ordre trois de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3}{\partial t^3} I &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right) \frac{\partial g^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \frac{\partial^2 h^{-1}}{\partial t^2} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \frac{\partial^3 g^{-1}}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right) \frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 g^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial I}{\partial g^{-1}} \right) \frac{\partial g^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \frac{\partial^3 h^{-1}}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \\ & \frac{\partial^2 h^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \frac{\partial^2 h^{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial I}{\partial h^{-1}} \right) \frac{\partial h^{-1}}{\partial t} \\ & = I_{\vec{g}^{-1}} \cdot \vec{g}_t^{-1} + 2 (I_{\vec{g}^{-1}})_t \cdot \vec{g}_t^{-1} + (I_{\vec{g}^{-1}})_{t^2} \cdot \vec{g}_t^{-1} \end{aligned}$$

Avec le développement des autres ordres, on reconnaît la structure du développement binomial (triangle de Pascal), ce qui permet de généraliser à l'équation (28) :

$$I_{t^n} = \sum_{k=1}^n (I_{\vec{g}^{-1}})_{t^{k-1}} (\vec{g}^{-1})_{t^{n-k+1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

En utilisant les relations présentées précédemment, la relation suivante pour l'erreur d'approximation (équation (27)) est obtenue :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_y(\vec{\theta}) &= I_{\vec{g}^{-1}} \left\{ \left[\frac{(\Delta t)^2}{6} M^2 - \frac{\Delta t}{2} M \right] [M\vec{g}^{-1} + \vec{T}] \right\} \\ &+ I_{(\vec{g}^{-1})^2} \left\{ \left[\frac{\Delta t}{2} Id - \frac{(\Delta t)^2}{3} M \right] [M\vec{g}^{-1} + \vec{T}] \right\} \\ &+ I_{(\vec{g}^{-1})^3} \left\{ \frac{(\Delta t)^2}{6} [M\vec{g}^{-1} + \vec{T}] \right\} \end{aligned}$$

Liste des notations et symboles

g, g^{-1}	Fonction de transformation des coordonnées
E	Opérateur d'espérance mathématique
$I(x, y, t)$	Fonction d'intensité de la séquence d'images
M	Matrice caractérisant les composantes du champ linéaire de vitesse
MCL	Estimateur par moindres carrés linéaires
MCnL	Estimateur par moindres carrés non linéaires
q	Coordonnées matérielles
t	Variable temporelle
T	Vecteur caractérisant les composantes de translation du champ de vitesse
\vec{u}	Vecteur de vitesse affine stationnaire
\mathbf{V}_M	Matrice de diagonalisation
\vec{x}	Coordonnées du repère fixe de l'observateur
δ_b	Perturbations des termes temporels
δ_Λ	Perturbations des termes spatiaux
$\vec{\theta}, \hat{\vec{\theta}}$	Vecteur des paramètres du champ de vitesse, estimation au sens des moindres carrés du vecteur des paramètres du champ de vitesse
φ	Matrice de transition

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Chaudhury et R. Mehrotra, « Optical flow estimation using smoothness of intensity trajectories », *CVGIP Image Understanding*, Vol. 6, n° 2, pp. 230-244, 1994.
- [2] K. Chaudhury et R. Mehrotra, « A trajectory-based computation model for optical flow estimation », *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 11, n° 5, pp. 733-741, 1995.
- [3] B. Doubrovine., S. Novikov, et A. Fomenko., Géométrie contemporaine : méthodes et applications, Première Partie : Géométrie des surfaces, des groupes et des champs, Éditions MIR, Moscou, p. 41, 1982.
- [4] C.S. Fuh et P. Maragos, « Motion displacement estimation using affine model for image matching », *Optical Engineering*, Vol. 30, n° 7, pp. 881-887, 1991.
- [5] E. Grossman et J. Santos-Victor, « Performance evaluation of optical flow estimators : Assessment of a new affine flow », *Robotics & Autonomous Systems*, Vol. 21, n° 1, pp. 69-82, 1997.
- [6] B.C. Kuo, « Automatic Control System », Prentice-Hall, 1967.
- [7] W.R. Derrick, S.I. Grossman, « A first course in differential equation with applications », 3rd edition, West Publishing Company, St-Paul, MN, USA., 1987.
- [8] G. Strang, « Linear algebra and its applications », 3rd edition, Harcourt, Brace, Jovanovich, Publishers, 1988.
- [9] M. Cyr, « Analyse d'erreurs du champ de vitesse linéaire obtenu avec l'approche du flux optique », *Mémoire de Maîtrise*, École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada., 1995. (www.biblio.polymtl.ca)
- [10] B.K.P. Horn et B.G. Schun, « Determining optical flow », *Artificial Intelligence*, Vol. 17, pp. 185-203, 1981.
- [11] E.P. Ong et M. Spann, « Robust optical flow computation based on least-median-of-squares regression », *International Journal of Computer Vision*, Vol. 3, n° 1, pp. 51-82, 1999.
- [12] J.M. Odobez et P. Bouthemy, « Estimation robuste multiéchelle de modèles paramétrés de mouvement sur des scènes complexes », *Traitement du Signal 1995*, Vol. 12, n° 2, pp. 113-128, 1995.
- [13] R.L. Burden, J.D. Faires, « Numerical analysis », fourth edition, PWS-KENT, Boston, USA, 1989.
- [14] M. Otte et H.H. Nagel, « Estimation of optical flow based on higher-order spatiotemporal derivatives in interlaced and non-interlaced image sequences », *Artificial Intelligence*, Vol 78, pp. 5-43, 1995.
- [15] D.W. Marquardt, « An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters », *SIAM, J. Appl. Math.*, Vol. 11, n° 2, pp. 431-441, 1963.
- [16] A. Grace, « Optimization toolbox », The MathWorks, Natick, Massachusetts, USA., 1994.
- [17] R. Battiti, E. Amaldi et C. Koch, « Computing optical flow across multiple scales : An adaptive coarse-to-fine strategy », *International Journal of Computer Vision*, Vol. 6, n° 2, pp. 133-145, 1991.
- [18] J.D. Anderson Jr., « Computational fluid dynamics, The basics with applications », McGraw-Hill, Inc. 1995.
- [19] J. Meunier et M. Bertrand, « Echographic image mean gray level change with tissue dynamics: a system-based model study », *IEEE Trans. on Biom. Engineering*, Vol. 42, n° 4, pp. 403-410, 1995.
- [20] J. Meunier et M. Bertrand, « Ultrasonic texture motion analysis: Theory and simulation », *IEEE Trans. on Med. Imaging*, Vol. 14, n° 2, pp. 293-300, 1995.
- [21] J. Ophir, I. Céspedes, H. Ponnekanti., Y. Yazdi et X. Li, « Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues », *Ultrasonic Imaging*, Vol. 14, n° 8, pp. 667-673, 1991.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1998

LES AUTEURS

Rosaire A. MONGRAIN



Rosaire A. MONGRAIN a obtenu un B.Sc et un M.Sc. en physique de l'Université de Montréal en 1985 et 1987 respectivement et un Ph.D. en génie biomédical de l'École Polytechnique de Montréal en 1992. Après un stage post-doctoral au Brigham & Women's Hospital à Boston, il s'est joint à l'Institut de Cardiologie de Montréal comme chercheur en génie biomédical. Il a récemment été nommé professeur adjoint à l'Université McGill au département de génie mécanique. Ses domaines de recherche incluent la modélisation de l'écoulement sanguin, le design de dispositifs médicaux et le développement d'algorithmes de traitement d'images.

Martin CYR



Martin CYR est né à Sorel en 1969, il complète ses études en génie informatique à l'École Polytechnique de Montréal en mai 1992. En 1995, il complète une maîtrise en sciences appliquées en génie biomédical portant sur l'analyse de mouvement d'images échographiques. Il a travaillé près de deux ans comme associé de recherche à l'institut de génie biomédical avant de d'œuvrer en neurochirurgie assistée par ordinateur. Depuis juin 1998, il travaille chez ISG Technologies/SNN dans le domaine de la chirurgie assistée par ordinateur.

Michel BERTRAND



Michel BERTRAND est professeur titulaire à l'École Polytechnique de Montréal. Ses principaux domaines de recherche incluent : les applications biomédicales de l'échographie, la modélisation de l'écoulement sanguin, l'angiographie, l'analyse du mouvement par imagerie, l'analyse d'images médicales et l'élastographie.