

# Propagation de l'incertitude dimensionnelle dans le problème de l'ajustement d'ellipses. Application à la reconnaissance automatique de formes elliptiques dans les images

## Propagating the dimensional uncertainty in ellipse fitting. Application to the automatic detection of elliptic shapes in images

par F. DUFRENOIS

Université du littoral côte d'opale Laboratoire d'analyse des systèmes du Littoral 50, rue Ferdinand Buisson B.P. 699 – 62228 Calais cedex – FRANCE

### *résumé et mots clés*

L'ajustement d'une ellipse sur des données 2D est un très vieux sujet en estimation et en RDF, qui a donné lieu à de nombreuses études [2,6,10,15,16,21] et en suscite encore aujourd'hui [12,17,19,24]. D'une façon systématique, ces travaux se sont appuyés sur la représentation algébrique de la conique pour établir leur critère de minimisation. Un peu moins étudiée [5], la représentation polaire de l'ellipse constitue une alternative plus coûteuse car elle nécessite l'optimisation de sa paramétrisation. D'une représentation nécessitant au plus 5 paramètres à une autre définie par  $5 + N$  ( $N$  étant le nombre de données), le choix semble évident. Cependant, nous proposons dans cet article de nouvelles idées sur la question. Tout d'abord, nous montrons que l'estimation séparée des paramètres et de la paramétrisation de l'ellipse permet de simplifier le problème en aboutissant respectivement à une inversion directe pour les premiers et à la recherche des racines d'un polynôme du 4<sup>ème</sup> ordre pour la seconde. Nous montrons également que la paramétrisation est « porteuse » de l'information dimensionnelle de l'ellipse et qu'en la « perturbant » correctement dans le processus de minimisation il est possible de forcer la solution à rester dans un espace paramétrique préétabli. Ce résultat nouveau permet de fournir une solution sans biais dimensionnel même dans un contexte fortement bruité et incomplet. Une enveloppe de confiance est ensuite estimée assurant à la fois un encadrement plus large de la solution et le rôle de filtre pour la recherche des segments voisins candidats potentiels pour affiner l'estimation. Enfin, nous proposons une stratégie de regroupement/ajustement suivie d'une phase de décision floue constituant ainsi un schéma robuste de détection de formes elliptiques dans les images.

Moindres carrés, paramétrisation, incertitude dimensionnelle, décision floue, détection d'ellipses.

### *abstract and key words*

The conic fitting from image points is a very old topic in estimation and pattern recognition. This problem gave rise to a lot of studies and arouses interests still today. Systematically, these works have been based on the algebraic

representation of the conic to establish the optimization criteria. Less studied, the polar representation of the ellipse is costlier because it needs the optimization of the parametrization. Yet, we propose in this paper some new ideas about this question. First, we show that the estimation of the parameters and the parametrization separated permit to make the problem easier leading to a direct inversion and the search of the roots of a four degree polynomial respectively. We also show that the parametrization carries the dimensional characteristics of the ellipse and when it is correctly disrupted in the minimization process, we constraint the ellipse search space. This new result gives an estimate without dimensional bias in a noised and incomplete context. A confidence envelope is then estimated to direct the search for continuations of the ellipse. At last, we propose a hierarchical grouping and fitting stage following with a fuzzy decision step to detect automatically the elliptic shapes in the images.

Least square fitting, parametrization, dimensional uncertainty, fuzzy decision, ellipse detection.

## 1. état de l'art

L'une des tâches les plus courantes en reconnaissance des formes et en vision par ordinateur est d'ajuster un modèle géométrique à un ensemble de points. L'utilisation de tels modèles permet la réduction et la simplification des données assurant ainsi des calculs plus simples et plus rapides. L'un des modèles les plus étudiés encore aujourd'hui est l'ellipse ou plus généralement la conique. Celle-ci étant la projection perspective d'un cercle, on la retrouve dans la plupart des scènes industrielles, médicales, biologiques... Grâce à ses nombreuses propriétés géométriques et aux différentes façons de la représenter, elle constitue un champ d'investigation idéal pour l'estimation. Ainsi, le problème de l'estimation des paramètres d'un tel modèle est à l'origine de nombreuses études qui peuvent se décliner suivant ces différents points :

– **La définition d'une métrique adéquate.** Bien que la distance euclidienne constitue un choix naturel pour la métrique, son expression est difficile à obtenir dans le cas de la conique. Celle-ci implique la résolution d'une équation du quatrième ordre et la solution qui est retenue détermine la distance minimale entre l'observation et le modèle. Pour éviter la complexité engendrée par ce calcul, plusieurs modes d'approximation ont été proposés dans la littérature utilisant : les propriétés géométriques de la conique [1], sa représentation explicite [1], [2], [3], [4]... , ou polaire [5]. L'avantage principal de l'utilisation de la distance algébrique repose sur la simplicité de son implémentation et des solutions à formes fermées peuvent être généralement obtenues. Cependant, sous sa forme classique, cette mesure est une approximation faible de la distance orthogonale. Elle introduit donc un biais dans l'estimation. Comme le montre Booskein dans [6], de part la nature non linéaire de sa représentation, une observation peut avoir un poids différent suivant sa position sur la frontière de la conique. Pour réduire cet effet, on donne une version pondérée de la distance algébrique. Plusieurs travaux

comparatifs ont été menés sur cette question (voir pour plus de détails [5], [7], [8], [9]).

– **Contraindre la solution à être elliptique.** Dans la majorité des cas, les approches utilisent une métrique basée sur l'expression générale des coniques pour ajuster une ellipse sur des observations. Selon la valeur de la contrainte d'excentricité, cette représentation peut engendrer trois familles de courbes 2D : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Sans la prise en compte de cette contrainte, il est possible, même pour des données réparties approximativement sur une ellipse, d'obtenir une solution hyperbolique ou parabolique. La minimisation d'une forme quadratique soumise à une telle inégalité et qui de plus, est non-convexe reste un problème difficile et ouvert, les conditions de Kuhn-Tucher ne garantissant pas une solution [10]. Certains travaux se sont penchés sur cette question : P.L. Rosin montre dans [11] que la normalisation de certains coefficients de la forme quadratique minimise l'excentricité, augmentant ainsi la probabilité d'obtenir une ellipse (conditions nécessaires mais pas suffisantes). Dans [12], il propose de modifier les valeurs de la matrice de covariance du filtre de Kalman afin de ne retenir que la solution elliptique. Il remarque en effet que pour des valeurs de la matrice de covariance variant entre 0 et  $\infty$ , les solutions évoluent entre le cercle et l'hyperbole. Il modifie alors itérativement les valeurs de la matrice jusqu'à ce que la solution soit elliptique. H. Bendtsen dans [13] montre que l'excentricité peut être exprimée en fonction de certains paramètres de la conique. En l'intégrant de façon directe dans la fonction objective, sous la forme d'un terme de pénalité, il contrôle le résultat de la minimisation. Ainsi, minimiser l'excentricité assure une estimée circulaire, à l'inverse, la maximiser fournit une solution hyperbolique. Comme on peut le remarquer, l'obtention d'une solution elliptique résulte la plupart du temps de l'utilisation d'algorithmes itératifs coûteux. De plus, dans un contexte bruité et incomplet, ces algorithmes peuvent devenir instables et fournir une solution non elliptique. Récemment, Fitzgibbon propose dans [14] une méthode d'ajustement non itérative intégrant

directement la contrainte d'ellipticité. La solution est obtenue simplement en résolvant un système aux valeurs propres généralisées. Halir dans [14] améliore cette approche qui peut présenter quelques instabilités numériques.

– **Prise en compte de l'incertain et la réduction du biais.** Les données sur lesquelles nous travaillons proviennent généralement d'algorithmes de traitement du signal tels que les algorithmes de détection de contour utilisés dans les images. Les caractéristiques parfois difficiles des images (bruit, flou, occlusion,...) fournissent souvent des contours imparfaits. Cette imperfection se traduit par des données entachées de bruit donc imprécises et souvent incomplètes. Dans ce cadre d'étude, les estimateurs aux moindres carrés apparaissent souvent biaisés. Certains travaux se sont intéressés alors à améliorer les résultats de l'estimation en intégrant dans la métrique une information sur la nature incertaine des observations. Sous hypothèse gaussienne, le filtre de Kalman constitue une méthode générale pour intégrer les mesures bruitées et leur incertitude dans le processus d'estimation. Par exemple, Porill a proposé dans [16] une formulation du filtre de Kalman étendu incorporant une approximation du premier ordre de la distance euclidienne pour corriger le biais d'estimation engendré par des observations distribuées sur des sections à forte excentricité. Le filtre permet également, à l'aide de l'estimée de la matrice de covariance de l'état, de prédire une enveloppe de confiance mettant en valeur l'imprécision et l'instabilité de l'ajustement. Ellis et al proposent également dans [17] un processus d'extraction de primitives elliptiques basé sur le filtre de Kalman et calculent l'incertain (matrice de covariance) associé à chaque détection. Dans leur étude, la métrique est établie sur la distance algébrique et le problème du biais de courbure est corrigé en intégrant dans le processus les segments voisins non nécessairement connexes, candidats potentiels pour l'ajustement. Ces deux approches résument à elles seules le problème du biais et le solutionnent soit en modifiant la métrique, soit en intégrant de l'information supplémentaire dans la procédure d'ajustement. En pratique, il n'est pas possible de mesurer exactement les caractéristiques du bruit (moyenne et covariance) sur les observations. Kanatani dans [19] propose un nouveau schéma d'ajustement itératif non linéaire appelé « renormalisation » pour calculer une solution non biaisée et ceci sans connaître les caractéristiques du bruit. Une approche alternative de celle de Kanatani a été proposée par Chojnacki dans [18]. Il propose un estimateur basé sur une approximation du maximum de vraisemblance. Lorsque aucune hypothèse paramétrique ne peut être faite sur la nature du bruit (au delà d'être identiquement et indépendamment distribuée), les techniques de rééchantillonnage telles que le bootstrapping constituent une alternative à la réduction du biais d'estimation. Cette approche est appliquée au problème de l'ajustement elliptique dans [20]

– **Estimation robuste.** Les estimateurs aux moindres carrés supposent implicitement que l'ensemble des observations peut

être « interprété » par un unique jeu de paramètres. Seulement, lorsque parmi cet ensemble, certaines observations sont erronées, cette hypothèse n'est plus vraie. Alors, les méthodes basées sur les moindres carrés deviennent inadaptées et sont remplacées par des approches robustes. L'une des plus anciennes, utilisée couramment en vision par ordinateur, est la transformée de Hough. Son principe consiste à projeter les données dans des espaces paramétriques correctement quantifiés, et l'estimation revient à rechercher dans chaque espace les valeurs des paramètres correspondant au(x) maximum(s). Grâce à une stratégie globale de recherche des maximums, cette technique d'estimation est qualifiée de robuste, même si il existe un grand pourcentage d'erreurs sur les données. Cependant, pour obtenir une précision suffisante sur la localisation des solutions, il est important d'augmenter la résolution de chaque espace transformé, ce qui entraîne bien sûr un accroissement des ressources de stockage. Dans le cadre de la détection d'ellipses, l'estimation des paramètres conduit à un espace transformé de dimension 5 et la difficulté réside donc à le réduire (voir [21] pour un état de l'art). Plus récemment, les méthodes de partitionnement flou ont également été adaptées au problème de la détection des courbes 2D et 3D. Ces méthodes sont appelées couramment « partitionnement par enveloppe » (c-shells clustering). Les algorithmes de regroupement classiques considèrent que la structure géométrique des classes à partitionner est compacte. Ainsi ils minimisent une fonction objective basée sur une mesure de distance calculée entre les données et le centre des classes de la partition. Cependant, cette métrique n'est pas suffisamment générale pour la description d'une frontière 2D ou 3D. Dans le cadre de la détection d'enveloppes elliptiques, Dave and Bhaswan ont proposé un premier algorithme de partitionnement [22]. C'est une méthode itérative qui minimise la distance entre le modèle et les observations ainsi que la fonction d'appartenance établie sur cette mesure. Une version robuste de cette approche est proposée dans [23] et [24]. La détection de primitives elliptiques dans les images a été abordée également à partir d'algorithmes génétiques. Ces algorithmes sont des méthodes d'optimisation stochastiques calquées sur le système d'évolution biologique. Ils réalisent une recherche parallèle à partir d'une population de solutions appelées chromosomes. Pour des applications purement d'optimisation, la représentation d'un chromosome est une simple concaténation des codes binaires associés aux composantes du vecteur de paramètres. La longueur des codes dépend du domaine de variabilité de chaque composante ainsi que de la résolution adoptée. Ces chromosomes suivent un schéma d'évolution orchestré par des opérateurs génétiques. L'application à l'extraction de primitives elliptiques dans les images a été évoquée dans [25] et plus récemment dans [26]. Le caractère robuste de la méthode repose sur l'utilisation d'une image de distances au lieu d'une image de contours pour lisser la fonction à optimiser.

Les méthodes précédentes ne nécessitent pas en général de structuration des données, car elles s'appuient sur une recherche

globale des solutions. Cette caractéristique constitue indéniablement un atout supplémentaire.

D'autres méthodes dites robustes nécessitent initialement une représentation haut niveau des contours présents dans les images. Cette phase de préparation est nécessaire pour réduire les tests d'ajustement et donc les surplus de calculs inutiles. De plus, ces méthodes, à l'inverse de celles présentées ci-dessus, ne peuvent détecter qu'une primitive elliptique à la fois. Le dénominateur commun à toutes ces approches consiste à ajuster itérativement le modèle aux observations et de rejeter au fur et à mesure les observations considérées comme fausses, c'est à dire dont le résidu excède un seuil prédéfini. On peut citer les méthodes de regression par diagnostics [27], la moindre médiane des carrés [8], la longueur de description minimale [28].

Les M-estimateurs est une technique d'estimation aussi très populaire [27]. Son principe généralise les méthodes standards par moindres carrés en prenant non plus comme mesure le carré de la distance résiduelle de l'observation au modèle, mais une fonction de cette distance. Cette fonction, en pondérant de façon non linéaire l'erreur résiduelle entre les données et le modèle, permet de réduire l'effet d'observations aberrantes. Un certain nombre de fonctions ont été étudiées dans la littérature, une liste détaillée peut être trouvée dans [8]. Le choix d'une fonction particulière repose généralement sur un compromis entre robustesse et coût de calcul.

Dans cet article, nous proposons un processus de minimisation aux moindres carrés itératif basé sur l'expression polaire de l'ellipse. Celle-ci fournit directement les paramètres de l'ellipse : le centre, la longueur de ses axes principaux et son orientation. Nous montrons également que la paramétrisation « transporte » l'information dimensionnelle de l'ellipse et que sa caractérisation dans le processus permet de donner une solution acceptable dans le cas de données incomplètes et bruitées. Nous estimons ensuite une enveloppe de confiance encadrant les dimensions minimales et maximales des formes elliptiques se situant dans l'image. Des résultats comparatifs sont présentés sur des données synthétiques. Dans une seconde partie, nous proposons un schéma complet d'extraction de primitives elliptiques dans les images de contours. En considérant acquis la phase de structuration et de classification des contours, nous développons une stratégie de regroupement et d'ajustement des segments suivie d'une phase de décision floue pour détecter de manière automatique les primitives elliptiques dans les images. Notre méthodologie est appliquée à la détection d'un champignon microscopique pathogène du blé : l'oidium. Les images de ce parasite sont obtenues à partir d'un microscope optique.

## 2. ajustement basé sur la représentation polaire de l'ellipse

### 2.1. principe

Étant donné  $N$  observations  $X_i = (x_i, y_i)_{i \in [1..N]}^T$  distribuées sur le plan. Ces points décrivent une ellipse  $E$  s'ils vérifient le système paramétrique suivant :

$$X_i = X_0 + A.P(\theta_i) = X_0 + R(\alpha).F.P(\theta_i) \quad (1)$$

où  $X_0 = (x_0, y_0)^T$  sont les coordonnées du centre,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  représente la matrice des paramètres généraux et  $P(\theta_i) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)^T$  la paramétrisation de l'ellipse.  $A$  peut également s'exprimer en fonction des paramètres canoniques de l'ellipse par le produit  $R.F$  où  $F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  représentant les longueurs des demi-axes principaux ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) et  $R(\alpha)$  la matrice de rotation d'angle  $\alpha$ . L'estimation de ces paramètres est un problème standard qui est résolu classiquement aux sens des moindres carrés en minimisant l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Theta(X_i; \theta_i, A, X_0) &= \sum_{i=1}^N \|G_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|X_i - X_0 - R(\alpha).F.P(\theta_i)\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Ceci est équivalent à résoudre le problème aux moindres carrés non linéaire suivant :

$$G_i = X_i - X_0 - R(\alpha).F.P(\theta_i) \approx 0, \forall i \in [1, \dots, N] \quad (3)$$

Une manière classique de le résoudre est d'utiliser une méthode de minimisation itérative de type Gauss-Newton. Étant donné que la matrice Jacobienne est creuse, on peut comme le fait [5], modifier sa structure en utilisant des transformations de Givens et en calculer la décomposition QR seulement sur un bloc de la matrice. Le vecteur de correction est ensuite obtenu simplement par substitution arrière. Les valeurs initiales des paramètres de l'ellipse et de la paramétrisation sont estimées en ajustant un cercle sur les observations. Nous proposons dans ce paragraphe d'estimer de manière séparée les paramètres de l'ellipse et sa paramétrisation. Dans l'équation (2), le produit  $R(\alpha).F$  est remplacé par  $A$  et la minimisation de (2) est décomposée suivant cet enchaînement :

$$\begin{aligned} \min_{A, X_0, \theta_i} \Theta(X_i; \theta_i, A, X_0) &= \min_{\theta_i} \{ \min_{A, X_0} \Theta(X_i, \theta_i; A, X_0) \} \\ &= \min_{\theta_i} \Theta(X_i, A, X_0; \theta_i) \end{aligned} \quad (4)$$

En considérant la paramétrisation  $\theta_i$  connue, le problème devient maintenant linéaire et la minimisation de (2) est directe :

$$\Theta(X_i, \theta_i; A, X_0) = \sum_{i=1}^N (x_i - h(\theta_i) q_x)^2 + (y_i - h(\theta_i) q_y)^2 \quad (5)$$

où  $h(\theta_i) = [1, \cos \theta_i, \sin \theta_i]$ ,  $q_x = [x_0, a, b]^T$  et  $q_y = [y_0, c, d]^T$ . Ou bien, sous forme matricielle :

$$\Theta = (X - Hq_x)^T (X - Hq_x) + (Y - Hq_y)^T (Y - Hq_y) \quad (6)$$

L'estimation des composantes de  $A$  et de  $X_0$  est alors résolu en calculant deux pseudo-inverses, l'une sur la composante en  $x$  et l'autre en  $y$  :

$$q_x = (H^T H)^{-1} H X, q_y = (H^T H)^{-1} H Y \quad (7)$$

$A$  et  $X_0$  étant fixé, nous minimisons (5) en fonction de  $\theta_i$ . La dérivée de (5) nous amène à rechercher les solutions d'une équation quadratique à deux inconnues :

$$\begin{aligned} (ab + cd) C_i^2 + (b^2 + d^2 - a^2 - c^2) C_i S_i - (ab + cd) S_i^2 - (bu + dv) C_i + (au + cv) S_i &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

avec  $C_i = \cos \theta_i$ ,  $S_i = \sin \theta_i$ ,  $u = x_i - x_0 \neq 0$  et  $v = y_i - y_0 \neq 0$ . Afin de simplifier la recherche des solutions, nous remplaçons les paramètres  $(a, b, c, d)$  par les expressions les reliant aux paramètres canoniques de l'ellipse  $(\lambda_1, \lambda_2, \alpha)$  (voir équation (1)). Ainsi, (8) se simplifie et devient :

$$U S_i - V C_i + W C_i S_i = 0 \quad (9)$$

avec  $U = \lambda_1 (u \cos \alpha - v \sin \alpha)$ ,  $V = \lambda_2 (u \sin \alpha + v \cos \alpha)$  et  $W = \lambda_2^2 - \lambda_1^2$ . En divisant (9) par  $C_i$  (ou bien par  $S_i$ ) et en introduisant la variable :

$$z_i = \tan(\theta_i \text{ mod } (\pi)) = \frac{S_i}{C_i} = \frac{-S_i}{-C_i} \quad (10)$$

nous obtenons une équation polynomiale de degré quatre à une inconnue :

$$\begin{aligned} z_i^4 - \frac{2U}{V} z_i^3 + \left( \frac{U^2 + V^2 - W^2}{V^2} \right) z_i^2 - \frac{2U}{V} z_i + \left( \frac{U}{V} \right)^2 &= 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (11)$$

Cette équation fournit quatre solutions  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  avec au moins deux solutions réelles. Les solutions complexes sont écartées, tandis que les solutions réelles sont retenues. À noter également, que la solution  $\theta_i$  d'après (10) est définie à  $\pi$  près. Il est donc nécessaire de vérifier l'une des conditions suivantes :  $\pm U S_i \mp V C_i + W C_i S_i = 0$ . Si (11) donnent plusieurs solutions réelles  $\theta_k = \tan^{-1}(z_k)$  (avec  $k \in [2..4]$ ), nous sélectionnons la solution  $\theta_{k^*}$  qui vérifie :  $\min_k \|G_i(\theta_k)\|$ . Nous obtenons alors une procédure d'ajustement itérative par moindres carrés dont les principales étapes sont décrites ci dessous :

1. On calcule  $\theta_i^{(t=0)}$ . Dans ce cas, une bonne initialisation des  $\theta_i^{(0)}$  est obtenue en ajustant une ellipse sur les données (minimisation de la distance algébrique).
2. On calcule ensuite  $X_O^{(t)}$  et  $A^{(t)}$  avec (7).
3. On estime les solutions  $z_i^{(t)}$  à partir de (11) et ensuite les  $\theta_i^{(t)}$ .
4. On pose  $t \leftarrow t + 1$  et si  $|\Theta^t - \Theta^{t-1}| > \eta$  alors on retourne à l'étape 2 sinon arrêt de la procédure d'ajustement.

La figure 1 illustre les résultats obtenus avec l'algorithme présenté ci-dessus. Les observations (30 échantillons) sont réparties sur une section d'excentricité élevée, et un bruit gaussien d'écart type égal à 2 est ajouté aux données.

Notre solution est comparée avec un ajustement classique utilisant la distance algébrique (algorithme de Bookstein [6]). Cette solution nous sert d'initialisation pour notre algorithme et celui de Gauss Newton avec correction de Marquardt (voir [5]). Comme on peut le constater les ajustements utilisant la distance paramétrique comme critère de minimisation convergent vers la solution idéale et semblent mieux adaptés pour réduire le biais introduit par la forte excentricité de la section. Notre approche

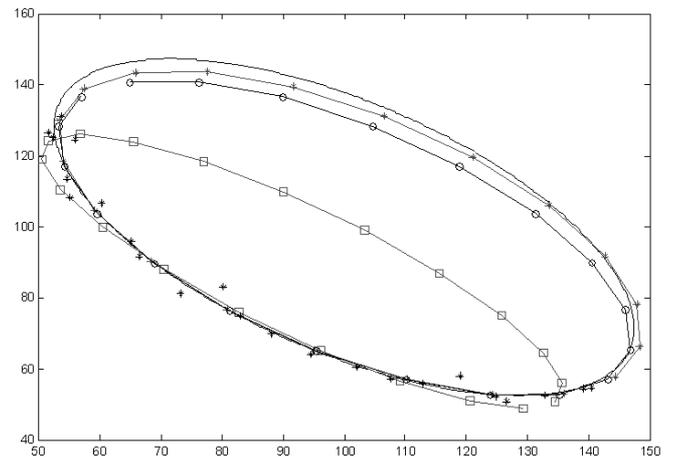


Figure 1. – Résultats de l'ajustement paramétrique sur une section elliptique échantillonnée et bruitée. La courbe continue «-» représente l'ellipse idéale, la courbe «-[]-» l'estimée initiale fournie par l'algorithme de Bookstein, la courbe «-\*-\*» la solution par Gauss-Newton et la courbe «-0-» notre solution.

est cependant plus gourmande en temps de calcul que celle de Gauss-Newton (55 itérations contre 30). Si l'optimisation de la paramétrisation est le principal inconvénient de ces deux approches, nous montrerons par la suite que celle-ci permet de « véhiculer » l'information dimensionnelle du modèle elliptique et contribue à la réduction du biais d'estimation.

## 2.2. ajustement sous contraintes dimensionnelles

Lorsque les données sont distribuées sur une petite section de l'ellipse, on peut constater que la plupart des méthodes d'ajustement classiques sont instables ou divergent. La densité des observations étant faible, le problème est considéré comme mal conditionné. Généralement, dans ce genre de configuration il est nécessaire, pour obtenir une solution acceptable, d'apporter de l'information *a priori* sur les données (connaissance de la nature du bruit) ou sur le modèle (connaissance des caractéristiques dimensionnelles). Si l'intégration des caractéristiques du bruit dans le terme à minimiser offre une nette amélioration sur la précision de l'estimation, elle n'est pas déterminante lorsque la densité des points sur la section est trop faible. D'ailleurs on peut remarquer que les méthodes statistiques du type re-normalisation avec correction de biais divergent si la quantité de données est trop faible [18]. Lorsque les données manquent, seule la connaissance *a priori* des caractéristiques dimensionnelles du modèle permet de réduire l'espace des solutions améliorant de ce fait la qualité du résultat. Pour cela, nous proposons d'introduire dans le critère d'ajustement une inconnue supplémentaire permettant de contraindre la solution à rester dans un espace paramétrique préétabli. Pour atteindre cette solution, on va pondérer la paramétrisation  $\theta$  par un facteur d'échelle  $\nu$ . La fonction objective s'exprime alors par la quantité suivante :

$$\Theta(X_i; \theta_i, \nu, A, X_0) = \sum_{i=1}^N (x_i - h(\nu\theta_i) q_x)^2 + (y_i - h(\nu\theta_i) q_y)^2 \quad (12)$$

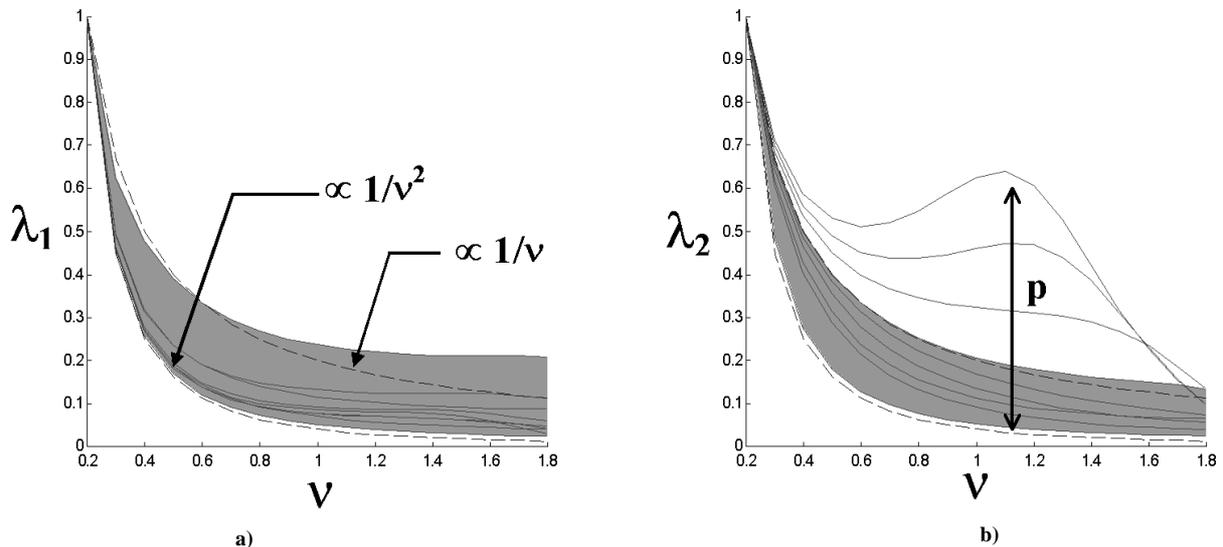
En effet,  $\theta$  caractérise un rapport de longueurs tel que :

$$\theta = \frac{2\pi l}{L} = \frac{2\pi}{L} \int_0^l \sqrt{x_l^2 + y_l^2} dl \quad (13)$$

où  $l$  représente la longueur de l'arc entre un point origine et un point donné de l'ellipse et,  $L$  la longueur totale ou périmètre de l'ellipse. Ainsi, étant donné la longueur  $l$ , si on altère la longueur totale  $L$  de l'ellipse, on introduit implicitement un biais d'estimation sur la solution de (12). L'évolution de ce biais peut être caractérisée en observant l'évolution du couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  solution de (12) en fonction de  $\nu$  et du rapport  $p = \frac{l}{L}$ . On montre que :

$$(\lambda_1, \lambda_2) \sim \left[ \frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{\nu} \right] \quad \forall \frac{\lambda_2^{ideal}}{\lambda_1^{ideal}} \in ]0, 1] \quad (14)$$

Avec  $\lambda_1^{ideal}$  et  $\lambda_2^{ideal}$  désignant les longueurs des axes principaux de l'ellipse idéale (ellipse réelle). La figure 2 illustre graphiquement cette propriété pour les valeurs du rapport  $\frac{\lambda_2^{ideal}}{\lambda_1^{ideal}} = 0.2$  et  $\frac{\lambda_2^{ideal}}{\lambda_1^{ideal}} = 0.5$ . Cette évolution est toujours vraie quel que soit  $p = \frac{l}{L} < 0.5$ . Si  $p > 0.5$ , la densité des observations est suffisante pour obtenir une estimation sans biais. Par analogie avec la propriété de similitude de la transformée de Fourier, on peut considérer ce terme comme un facteur de dilatation et de contraction des amplitudes des harmoniques (figure 3.a). De ce fait, il devient possible par une utilisation judicieuse de ce facteur dans le processus de minimisation de contraindre la solution à rester dans un espace prédéfini.



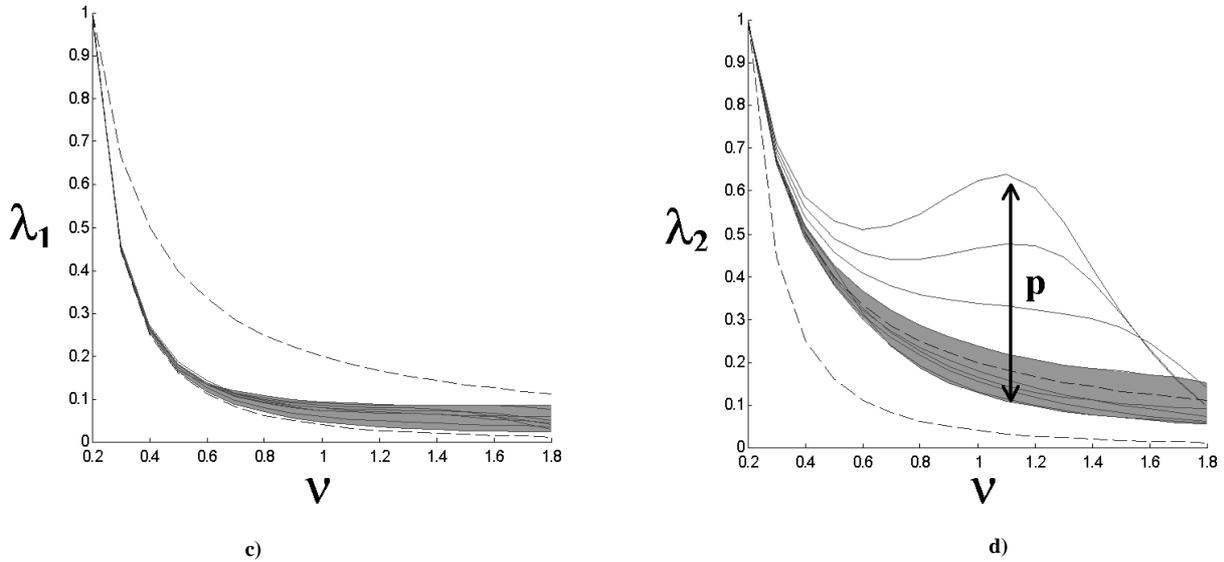


Figure 2. – Évolution des longueurs  $\lambda_1$  (figure a et c) et  $\lambda_2$  (figures b et d) des axes principaux de l'ellipse en fonction de  $\nu$  et de  $p$ . Pour les valeurs de  $p > 0.5$ , ces longueurs évoluent dans l'intervalle  $\left[ \frac{1}{\nu^2}, \frac{1}{\nu} \right]$  correspondant aux zones grisées sur la figure. Sur la figure du haut, le rapport  $\frac{\lambda_{ideal}}{\lambda_{ideal}}$  est fixé à 0.2 et en bas à 0.5.

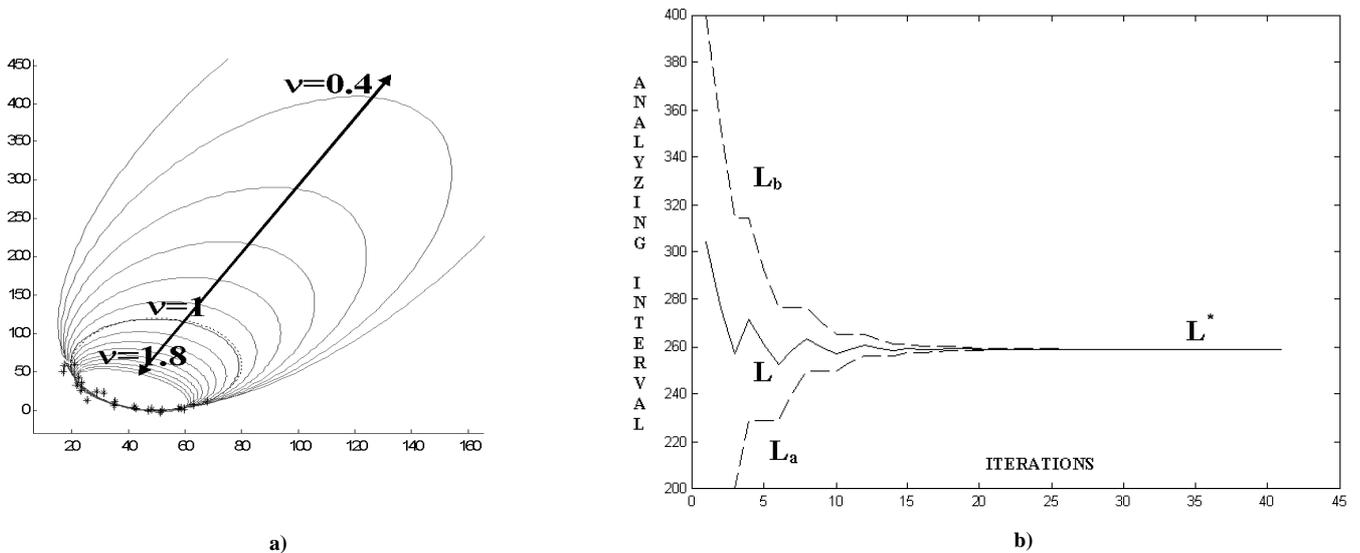


Figure 3. – Évolution du biais de l'estimation en fonction de  $\nu$  (figure a). Dans cet exemple,  $p$  est égal à 0.4 et le bruit est de nature gaussienne, centré et d'écart-type égal à 2. Exemple d'évolution de l'intervalle de confiance durant la procédure d'ajustement (figure b).

**Formulation du problème :** Si l'on considère que les primitives elliptiques présentes dans les images ont des dimensions connues et définies dans un intervalle de confiance  $[L_a, L_b]$  ( $L_a$  est la longueur totale minimale et  $L_b$  est la longueur maximale) et qu'il existe une ellipse « moyenne » paramétrisée par le couple  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ , alors nous devons déterminer dans  $[L_a, L_b]$  la longueur  $L^*$  correspondant à une solution optimale la plus proche du couple  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ . Un exemple est donné sur la figure 3.b.

Une solution paramétrique contrainte à converger vers une solution prédéfinie  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$  permet d'éviter le biais systématique introduit par un bruit élevé ou par un manque d'information important. Cependant, la minimisation directe de (12) en fonction de  $\nu$  semble difficile, nous proposons alors une procédure de minimisation adaptée s'appuyant sur une analyse dichotomique de l'intervalle : ainsi, étant donnés l'intervalle  $[L_a, L_b]$  et la longueur  $l$  de la section :

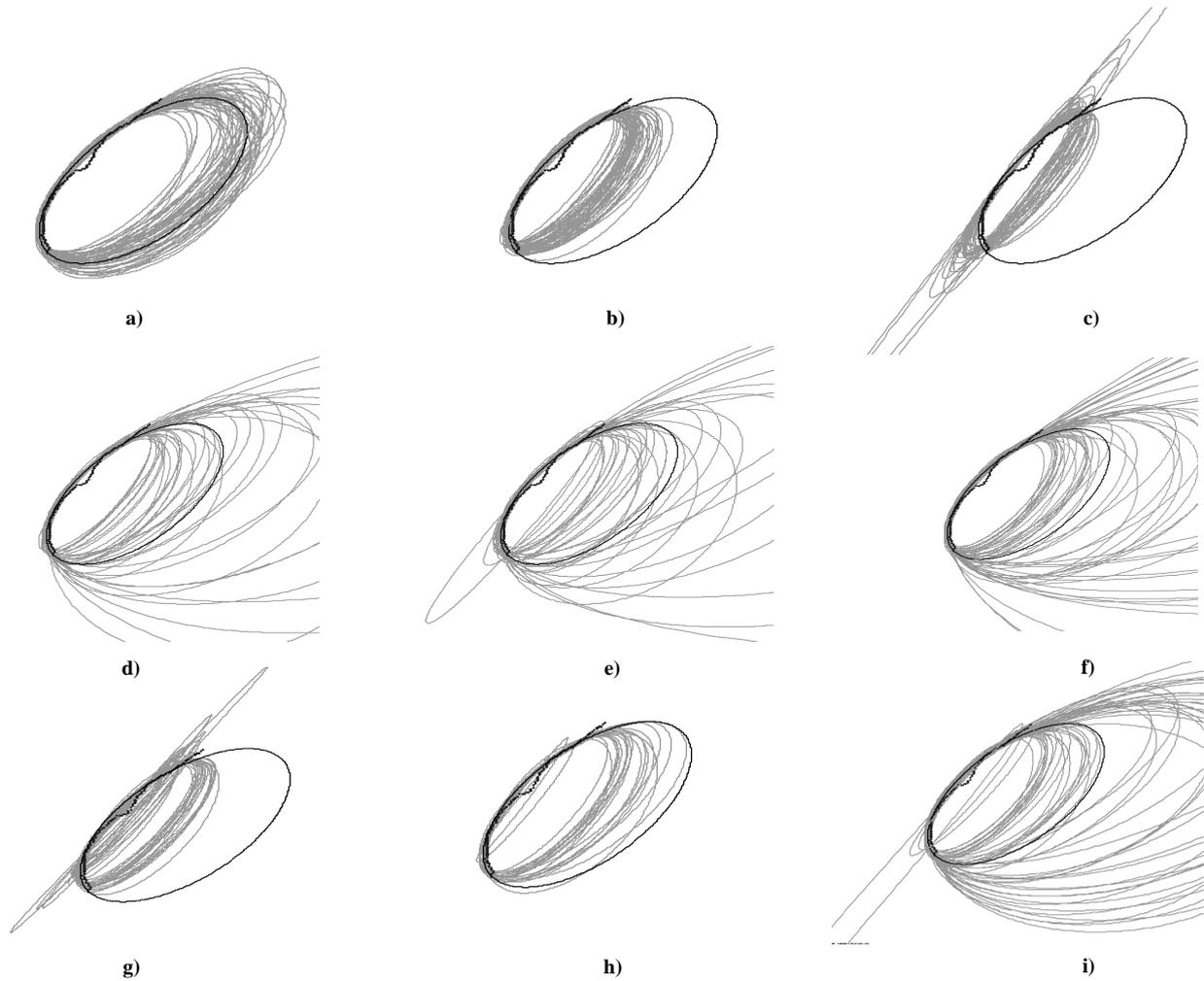


Figure 4. – Comparaison de la stabilité de l'estimation sur des arcs d'ellipse d'excentricité élevée correspondant à 30 % de la longueur totale. Ces sections sont entachées d'un bruit gaussien d'écart-type égal à 2. Les algorithmes étudiés sont ceux de : Fitzgibbon (b), Bookstein (c), Taubin (d), Kanatani (e), Gander (f), Ellis (g), Porrill (h), Zhang (i) et le notre (a).

1. On initialise la paramétrisation à partir de (13). On pose  $L = (L_a + L_b)/2$
2. On calcule deux facteurs d'échelle  $\nu_a = (L + L_a)/2L$  et  $\nu_b = (L + L_b)/2L$
3. On détermine à partir de (5) deux ellipses candidates  $E_a$  et  $E_b$  :

$$E_a \rightarrow \min_{A, X_0} \Theta(X_i, \nu_a \theta_i; A, X_0) \quad (15)$$

$$E_b \rightarrow \min_{A, X_0} \Theta(X_i, \nu_b \theta_i; A, X_0) \quad (16)$$

Nous sélectionnons alors l'ellipse  $E_a$  ou  $E_b$  qui possède des longueurs d'axes les plus proches du couple  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ . Ce choix, ainsi réalisé, permet de réajuster l'intervalle de confiance en modifiant ses bornes suivant les relations suivantes :

Si  $E_a$  est sélectionnée alors :

$$L_a \leftarrow L_a, L_b \leftarrow (L + L_b)/2 \text{ et } L \leftarrow (L_a + L_b)/2$$

Sinon :

$$L_b \leftarrow L_b, L_a \leftarrow (L + L_a)/2 \text{ et } L \leftarrow (L_a + L_b)/2 \quad (17)$$

4. On estime ensuite par (11) la paramétrisation de l'ellipse sélectionnée et l'on retourne à l'étape 2 si  $|\Theta^t - \Theta^{t-1}| > \eta$ .

**Résultats comparatifs :** Afin d'analyser la qualité de l'estimation et le caractère stable de notre approche, nous avons placé notre étude dans un contexte fortement bruité et incomplet. Pour cela, nous considérons le cas d'un contour discret de longueur correspondant à 30 % de la longueur totale de l'ellipse réelle. Cette section est altérée avec un pas régulier par un bruit gaussien à moyenne nulle et d'écart type égal à 2. Pour analyser la stabilité de notre approche, cette opération a été répétée 50 fois.

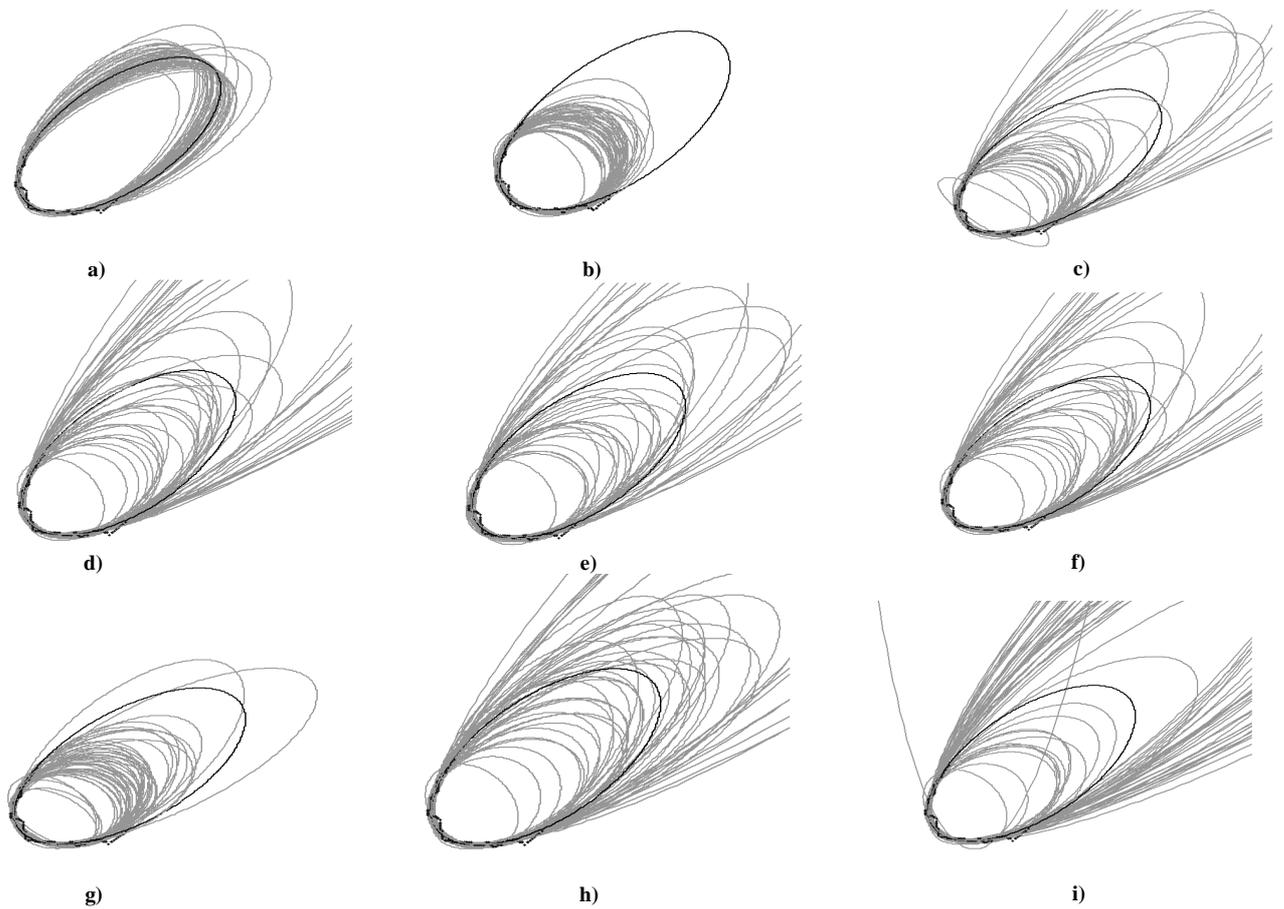


Figure 5. – Même expérience que précédemment mais pour des arcs d'ellipse d'excentricité faible correspondant à 30 % de la longueur totale.

Nous avons également testé le comportement de notre méthode en fonction de la courbure de la section : la figure 4 représente le cas d'une section d'excentricité élevée et la figure 5, une section d'excentricité faible. Nous avons comparé notre approche avec quelques algorithmes de référence tels que ceux de :

- Fitzgibbon [14](b) : minimisation de la distance algébrique sous la contrainte d'ellipticité .
- Bookstein [6](c) : minimisation de la distance algébrique sous la contrainte d'invariance sur le groupe des déplacements.
- Taubin [4](c) : minimisation de la distance algébrique pondérée.
- Kanatani [18](e) : schéma de renormalisation avec correction du biais.
- Gander [5](f) : minimisation de la distance polaire par la méthode de Levenberg-Marquardt.
- Ellis [17](g) : estimation par filtrage de Kalman étendu.
- Porrill [16](h) : estimation par filtrage de Kalman étendu avec correction du biais.
- Zhang [8](i) : régression de la distance orthogonale (ODR).

Certains algorithmes nécessitent cependant une phase d'initialisation : pour la méthode de Levenberg-Marquardt (f), les valeurs initiales des paramètres de l'ellipse et de la paramétrisation sont obtenues en ajustant un cercle sur les données. L'utilisation du filtre de Kalman (g et h) exige une pré-estimation du vecteur paramètre et de sa matrice de covariance. Une bonne initialisation peut être fournie par la technique des moindres carrés à gradient pondéré. En ce qui concerne notre algorithme, on suppose que la longueur totale de cette ellipse se situe dans l'intervalle  $[L_a = 200, L_b = 400]$  et que dans un premier temps les dimensions de l'ellipse moyenne sont identiques à celles de la solution idéale ( $\lambda_1^* = \lambda_1 = 60, \lambda_2^* = \lambda_2 = 30$ ). Les figures 4 et 5 illustrent les résultats obtenus sur ces deux cas. La courbe noire représente l'ellipse idéale. Les données sont représentées par un segment noir bruité. Il correspond à l'une des 50 sections générées durant ce test. Les courbes grises indiquent les résultats de l'ajustement obtenus sur les 50 réalisations. Par ailleurs, le tableau 1 collecte les valeurs moyennes des paramètres estimés, les écarts types moyens ainsi que les temps de calcul moyens obtenus pour chaque procédure. À titre indicatif, la colonne inti-

tulée SNE renseigne sur le nombre de solutions non elliptique retournées par ces méthodes. À la lecture de ces tests, une première remarque peut être formulée : dans un contexte difficile, le comportement de chacun de ces estimateurs est très variable et cette caractéristique s'amplifie lorsque la variance du bruit augmente et que la longueur de la section elliptique diminue. Pour juger de la performance de l'estimateur, nous avons étudié quatre critères : la stabilité, le biais d'estimation, la solution non elliptique, le coût de calcul.

– La stabilité : on dira qu'un estimateur est stable lorsque la solution obtenue varie pas ou peu sur un ensemble de réalisations. Les résultats visuels issus des figures 4 et 5 ainsi que les écarts types fournis par la tableau 1 indiquent d'une façon évidente que notre approche et celle de Fitzgibbon sont les plus stables parmi les algorithmes qui ont été testés.

– Le biais d'estimation : le biais introduit par des observations distribuées sur une section elliptique d'excentricité élevée ou faible est plus ou moins important selon les approches. À l'exception des algorithmes de Fitzgibbon, de Bookstein et de Ellis, la majorité des algorithmes ont tendance à réduire le biais introduit par la courbure de l'ellipse. Cette tendance est plus nette pour notre approche et celle de Porrill (filtrage de Kalman avec réduction du biais).

– La solution non elliptique : mise à part notre approche et celle de Gander, les autres estimateurs sont basés sur la forme quadratique d'une conique, ils sont donc susceptibles de fournir une solution hyperbolique ou parabolique. En intégrant la contrainte d'ellipticité dans son critère, Fitzgibbon élimine cette situation, alors que les autres approches, adoptant une normalisation standard sur la dis-

tance algébrique, peuvent fournir une solution non elliptique (voir tableau 1). Cette caractéristique peut s'avérer gênante lorsque l'objectif est de détecter des primitives elliptiques.

– Le temps de calcul : Les temps de calcul sont donnés à titre indicatif, car aucun effort d'optimisation du code n'a été entrepris. Ces tests ont été réalisés sous Matlab avec une station de travail Sun Sparc 20. On notera cependant que les approches directes basées sur la résolution d'un système aux valeurs propres généralisées (méthodes b, c et d) fournissent les meilleurs temps de calcul. À l'inverse, les méthodes basées sur la minimisation de la distance polaire (notre approche et celle de Gander) ou sur la minimisation de la distance orthogonale (Zhang) sont plus coûteuses en temps de calcul (facteur 10-1000). Ce sont des méthodes itératives nécessitant une phase d'optimisation de la paramétrisation pour la première, et le calcul de la distance orthogonale en chaque observation pour la deuxième.

Ces tests montrent de façon claire que notre approche est la plus performante sur les trois premiers points. L'intégration d'une contrainte dimensionnelle dans le processus d'estimation assure la stabilité du résultat, réduit d'une manière significative le biais introduit par la courbure. L'utilisation de la représentation polaire de l'ellipse assure une solution elliptique. Cependant, sa nature itérative et la nécessité du calcul et du tri des solutions de l'équation (11) réduisent ses performances en temps de calcul. Une solution serait de supposer que l'écart angulaire entre deux points connexes de la section elliptique est très faible, ce qui permettrait le développement au premier ordre de la fonction objective autour de la variable  $\theta$ . La minimisation de la paramétrisation serait donc simplifiée.

Tableau 1. – Comparaison des valeurs moyennes des paramètres estimés par les différentes méthodes (sections à excentricité élevée figure 4).

ideal	$x_0 = 100$	$y_0 = 100$	$\lambda_1 = 60$	$\lambda_2 = 30$	$\alpha = 45^\circ$	SNE
<b>Notre approche</b> cpu : 5.5 s	98.98 ±5.04	99.11 ±4.27	60.07 ±4.88	28.56 ±3.71	43.87 ±3.85	0
<b>Fitzgibbon</b> cpu : $3.10^{-3}$ s	81.38 ±2.92	100.15 ±1.65	46.28 ±2.13	16.04 ±2.69	35.46 ±2.37	0
<b>Bookstein</b> cpu : $2.10^{-3}$ s	72.61 ±6.07	102.37 ±7.97	56.73 ±24.76	9.20 ±2.03	32.57 ±6.07	18
<b>Taubin</b> cpu : $7.10^{-3}$ s	122.99 ±88.22	99.89 ±8.10	83.53 ±84.47	36.24 ±27.82	47.72 ±15.14	14
<b>Kanatani</b> cpu : 0.19 s	123.07 ±107.29	96.38 ±17.45	87.83 ±104.52	33 ±26.88	45 ±13.55	16
<b>Gander</b> cpu : 4.4 s	175.40 ±136.94	84.96 ±45.94	137.24 ±139.78	47.60 ±34.09	41.86 ±34.68	0
<b>Ellis</b> cpu : 0.31 s	77.56 ±5.08	96.81 ±6.92	47.12 ±9.41	9.44 ±5.28	34.48 ±1.51	13
<b>Porrill</b> cpu : 0.39 s	85.71 ±6.46	100.1 ±2.10	49.68 ±4.68	18.76 ±5.98	37.20 ±3.72	28
<b>Zhang</b> cpu : 4.97 s	114.98 ±35.09	101.31 ±14.50	78.16 ±29.18	36.90 ±19.43	51.33 ±15.19	1

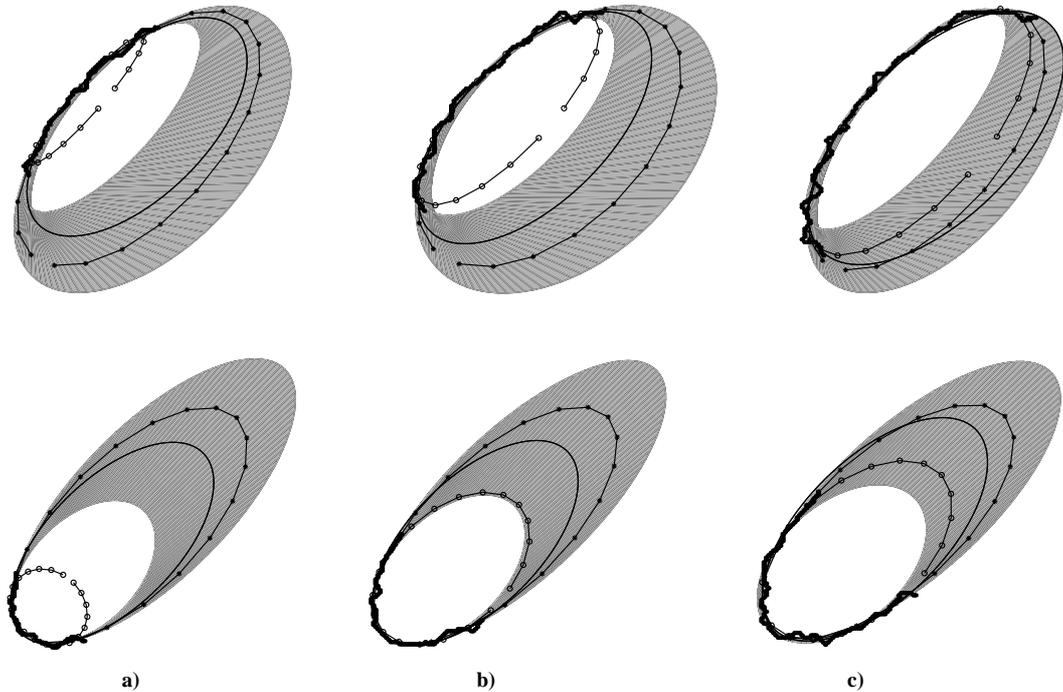


Figure 6. – Estimation des enveloppes de confiance (zones grisées) obtenues pour trois arcs d'ellipse de longueur variant de 15 % (a), 32 % (b) à 42 % (c) de la longueur totale (voir texte).

Cette expérience ainsi que les codes des algorithmes peuvent être téléchargés à partir du site internet : <http://www-lasl.univ-littoral.fr/lasl/personnel/Dufrenois/index.html>.

### 2.3. incertitude dimensionnelle

Une fois que cette solution moyenne, correspondant au vecteur paramètre  $(X_0^*, A^*, \theta_i^*, L^*)$ , est estimée, nous pouvons alors déterminer une région de confiance prenant en compte l'incertitude sur la solution. En effet, la solution idéale est en pratique différente de la solution moyenne, mais on peut admettre dans certaines situations que celle-ci se situe dans un espace proche. Cette enveloppe est alors obtenue par un ajustement aux moindres carrés de deux ellipses  $E_m$  et  $E_M$  résultant respectivement de la dilatation de la paramétrisation optimale  $\theta_i^*$  par le facteur  $\nu' = L_a/L^*$  et de la contraction de la paramétrisation par  $\nu'' = L_b/L^*$  :

$$E_m \rightarrow \min_{A, X_0} \Theta(X_i, \nu' \theta_i^*; A, X_0) \quad (18)$$

$$E_M \rightarrow \min_{A, X_0} \Theta(X_i, \nu'' \theta_i^*; A, X_0) \quad (19)$$

De manière à observer le comportement de cette enveloppe en fonction de la longueur de la section, nous avons généré des sections elliptiques de longueur croissante. Le test est le suivant :

- On génère une section de longueur croissante de 15 à 80 % de la longueur totale avec un pas de 10 %. Les deux exemples d'excentricité sont traités.

- Un bruit additif gaussien à moyenne nulle perturbe les observations. Le test est réalisé avec deux niveaux de bruit correspondant aux écarts types suivants : 0.5 et 2.

- L'intervalle de confiance  $[L_a, L_b]$  est fixé comme précédemment. Les dimensions de l'ellipse moyenne et idéale sont définies respectivement par les couples  $(\lambda_1^* = 70, \lambda_2^* = 40)$  et  $(\lambda_1 = 60, \lambda_2 = 30)$ .

- La solution est obtenue par l'algorithme de la section 2.2 et l'enveloppe par les relations (18) et (19).

La figure 6 présente les résultats de notre ajustement (courbe : '– \* –') ainsi que les enveloppes de confiance (régions grisées) estimées à partir des longueurs d'arcs (sections noires bruitées) correspondant respectivement à 15 (a), 32 (b) et 42 % (c) de la longueur totale de l'ellipse idéale (courbe continue noire). Les résultats présentés correspondent à un niveau de bruit égal à 2. La figure du haut illustre le résultat dans le cas d'une section d'excentricité élevée tandis que la figure du bas illustre celui d'une section d'excentricité faible. À titre comparatif, nous avons ajouté l'ellipse estimée par la procédure de Fitzgibbon (courbe : '– o –'). Comme on peut le constater, les enveloppes fournissent un encadrement optimal de la solution même lorsque le pourcentage de point est faible. Cependant, il peut arriver dans un contexte fortement bruité et pour des longueurs très faibles ( de l'ordre de 10 à 30 % de la longueur totale) qu'un

biais sur l'orientation de l'enveloppe soit introduit. De ce fait, il se peut que l'encadrement ne soit pas satisfaisant.

La figure 7 illustre l'évolution du couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  (courbes : '-\*-') et de leurs enveloppes respectives (zones grisées). Nous observons ces paramètres sur la totalité de l'intervalle, c'est-à-dire de 15 à 80 % de la longueur totale. La figure 7.a indique les résultats obtenus pour une section d'excentricité élevée avec un niveau de bruit égal à 0.5 (figure du haut) et égal à 2 (figure du bas). La figure 7.b présente les résultats obtenus sur une section d'excentricité faible. Quelques remarques peuvent se déduire de ces graphiques :

– L'évolution de largeur de l'enveloppe est moins régulière lorsque le bruit augmente. Cependant, l'encadrement est quasi assuré – Plus la longueur de la section augmente, plus l'encadrement de la solution est optimisé – Au delà de 50 % de la longueur totale, la largeur de l'enveloppe se stabilise et l'estimée converge vers la solution idéale. Ceci signifie que l'influence du facteur d'échelle (dilatation/contraction de la paramétrisation) devient de plus en plus négligeable en fonction que la paramétrisation occupe de plus en plus la totalité du cercle unité. Ce

résultat est intéressant car il montre la stabilité de l'algorithme dans le cas inverse où il y a trop d'informations disponibles.

L'estimation d'une enveloppe de confiance prenant en compte les caractéristiques dimensionnelles des objets elliptiques constitue une ouverture originale pour appréhender un problème d'extraction automatique. En effet, les avantages se situent sur deux points : rendre plus facile la recherche des sections voisines et ainsi affiner l'estimation des paramètres – réduire les temps de calcul occasionnés par des tests inutiles.

### 3. schéma d'extraction

#### 3.1. introduction

Dans cette partie, on considérera que le problème de la détection de contours est résolu par un détecteur de type Canny-Deriche [29]. Notre objectif ici est d'intégrer notre procédure d'ajuste-

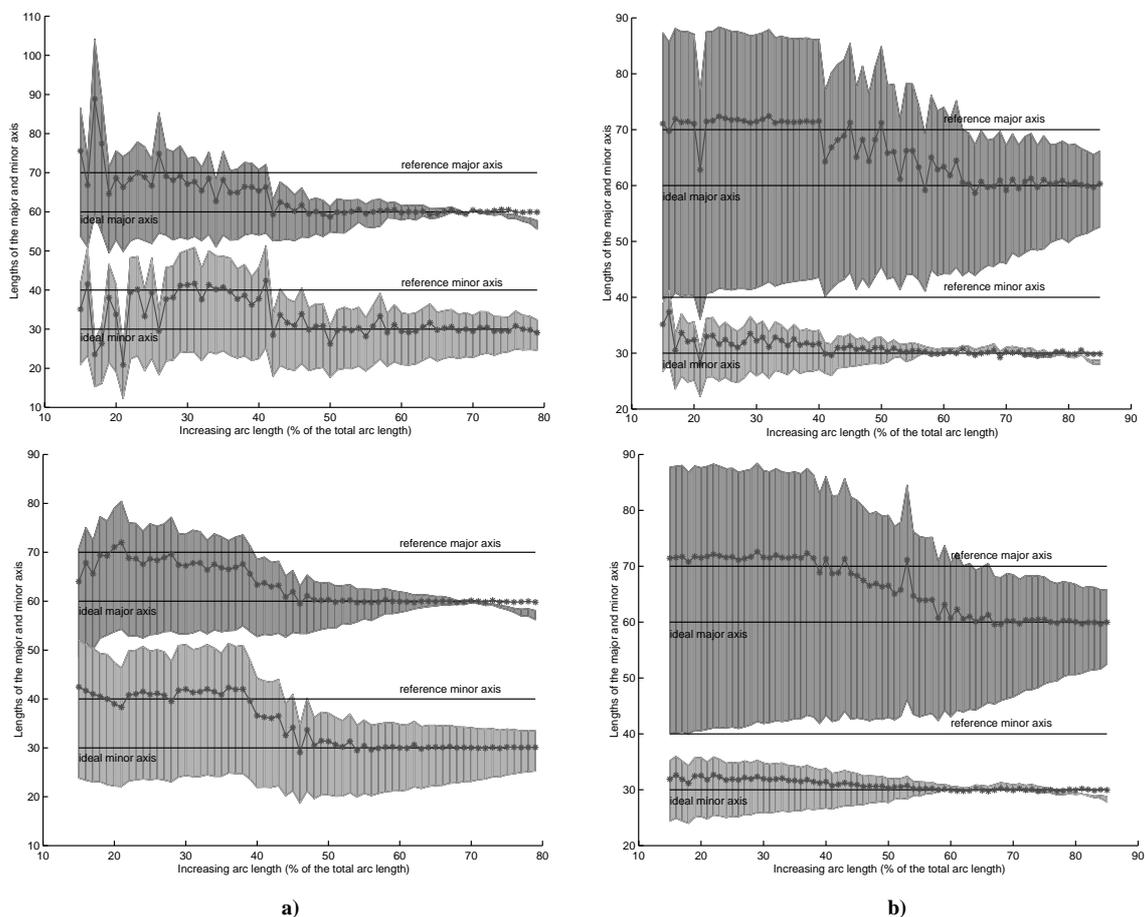


Figure 7. – Evolution du couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  (courbes '-\*-') ainsi que la taille de leurs enveloppes de confiance (zones grisées) (en haut :  $\sigma = 0.5$ , en bas :  $\sigma = 2$ ). Sur la figure de gauche, la section possède une excentricité élevée et à droite, une excentricité faible.

ment dans un schéma complet d'extraction. Bien évidemment, quelle que soit la procédure d'ajustement utilisée, son efficacité ne peut être optimale que si l'on réalise en amont une opération de « mise en forme » des données. Cette mise en forme nécessite une description haut niveau des contours incluant un certain nombre de phases tels que le partitionnement, le regroupement et la classification. Ces actions conjuguées doivent permettre de dissocier les segments « droits » des segments « courbes » afin qu'en dernier lieu la procédure d'ajustement puisse être appliquée. Le partitionnement consiste à détecter les discontinuités locales du contour et permettre ainsi de le décomposer en plusieurs segments élémentaires. Les extrémités des segments représentent des points critiques (coins, jonctions) qui sont obtenus classiquement par une analyse de la courbure. Les segments « candidats » sont alors souvent trop nombreux et trop petits pour effectuer un ajustement fiable, il est donc nécessaire de regrouper les segments colinéaires ou cocurvilinéaires. Enfin, une procédure de classification sépare les segments « droits » des segments « courbes » et ainsi permet de limiter les tests d'ajustement. Cette structuration des données est supposée connue et résolue (pour plus de détails, on pourra se reporter sur les références suivantes : [30], [31]). La phase d'estimation des enveloppes de confiance est réalisée sur chaque segment étiqueté « courbe ». Chaque enveloppe constitue alors un filtre pour sélectionner les segments voisins, candidats potentiels pour affiner la détection. Nous proposons dans le paragraphe suivant une stratégie de décision qui a été mise en oeuvre dans le cadre de cette étude.

### 3.2. stratégie de décision par une approche floue

L'opération d'étiquetage des segments constitue une mise en forme satisfaisante des données et réduit sérieusement les tests d'ajustement. Cependant l'espace des formes dans les images n'est pas réduit qu'à des ellipses, il existe d'autres structures « parasites » dont les frontières peuvent présenter des concavités prononcées. La prise en compte du voisinage dans les tests d'ajustement devient donc indispensable pour lever certaines ambiguïtés dans la phase de décision. Parmi les segments candidats sélectionnés par l'enveloppe d'analyse, certains d'entre eux n'appartiennent pas forcément à une frontière elliptique. Ce caractère incertain sur les données doit être pris en compte dans la phase de décision afin de ne pas fournir un résultat en tout ou rien mais plutôt de pondérer ce résultat avec un degré de confiance. Pour minimiser les fausses détections, une stratégie d'analyse combinant les résultats de l'ajustement a été établie. Elle s'appuie sur quatre mesures : la variance de l'erreur d'ajustement  $e$ , le rapport entre la longueur totale des segments sélectionnés par l'enveloppe et la longueur totale de l'ellipse solution notée  $r$ , et les deux longueurs ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) estimées. La quantité  $e$  représente l'écart entre l'ellipse estimée et les observations. Plus

cet écart est faible, plus les données « collent » au modèle. Seulement, cette quantité est sujette au bruit dans l'image qui est à l'origine de contours irréguliers et aux formes image qui ne sont pas parfaitement elliptiques. L'imprécision attachée à cette mesure ne nous permet donc pas de préciser exactement un seuil au delà duquel les données n'appartiennent plus à une ellipse. La mesure  $r$  pondère l'appartenance de la section à une ellipse en fonction de la densité des observations utilisées dans l'étape d'ajustement. De la même façon pour  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , il semble difficile de préciser de façon exacte la marge de variation de ces paramètres. Ainsi, de part la nature incertaine des données, nous proposons d'adopter une description floue de ces quantités. Nous définissons les variables linguistiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 e &\mapsto (\mathbf{E}, \{\text{Petit}, \text{Moyen}, \text{Elevé}\}, [0, 1]) \\
 r &\mapsto (\mathbf{R}, \{\text{Très Proche de Un}, \text{Proche de Un}, \text{Eloigné de Un}\}, [0, 1]) \\
 \lambda_1 &\mapsto (\mathbf{A}, \{\text{Longueur Principale Recherchée}, \text{Longueur Principale Recherchée}\}, \mathbb{R}^+) \\
 \lambda_2 &\mapsto (\mathbf{B}, \{\text{Longueur Secondaire Recherchée}, \text{Longueur Secondaire Recherchée}\}, \mathbb{R}^+)
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Chacune de ces variables est représentée par des ensembles flous trapézoïdaux. Le support et le noyau de chaque sous ensemble sont déterminés de façon expérimentale. Nous définissons également trois contrôleurs flous de type Mandani (figure 8.a) qui fournissent les différentes règles (tableau 2) entre les entrées (mesures) et la sortie (représentation symbolique de la combinaison des mesures). Ces règles nécessitent la définition de nouvelles variables :

$$\begin{aligned}
 (C_{ER}, \{\text{Ellipse Très Probable}, \text{Ellipse Probable}, \text{Ellipse Moyennement Probable}, \text{Ellipse Non Probable}\}, T) \\
 (C_{AB}, \{\text{Taille Recherchée}, \text{Taille Moyennement Recherchée}, \text{Taille Non Recherchée}\}, T) \\
 (C_D, \{\text{Ellipse Très Recherchée}, \text{Ellipse Recherchée}, \text{Ellipse Moyen}^t \text{Recherchée}, \text{Ellipse Non Recherchée}\}, T)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Tableau 2. – Règles utilisées pour la décision.

$\varphi_{C_{ER}}$		$E$		
		<b>P</b>	<b>M</b>	<b>E</b>
$L$	<b>TPU</b>	ETP	EP	ENP
	<b>PU</b>	EP	EMP	ENP
	<b>EU</b>	ENP	ENP	ENP

$\varphi_{C_{AB}}$		A	
		LPR	LPR
L	LSR	TR	TMR
	LSR	TMR	TNR

$\varphi_{C_D}$		$\varphi_{C_{AB}}$		
		TR	TMR	TNR
L	ETP	ETR	ER	ENR
	EP	ER	EMR	ENR
	EMP	ENR	ENR	ENR

Les variables de sortie sont représentées par des sous ensembles triangulaires uniformément distribués formant une partition floue stricte T. Chaque contrôleur assure une *fuzzyfication*  $\varphi_X$  de l'entrée, une *fuzzyfication* vectorielle  $\varphi_{X \times Y}$  suivi d'une opération d'*inférence*  $\rho$ . Dans notre application, la T-norme est l'opération min et la T-conorme est le max. Le contrôleur  $C_{RL}$  fournit une description floue de l'ajustement à partir des mesures  $e$  et  $r$  tandis que le contrôleur  $C_{AB}$  assure une représentation floue du couple  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Les sorties de ces contrôleurs sont fusionnées par le contrôleur  $C_D$  qui garantit une représentation symbolique du résultat de l'ajustement. Le schéma général de décision est constitué des étapes suivantes (figure 8.b) : Une procédure récursive de regroupement et d'ajustement est

réalisée sur l'ensemble des segments sélectionnés par l'enveloppe de confiance. Ensuite, une représentation symbolique est associée à chaque ellipse candidate estimée précédemment. Cette représentation combine les mesures issues de la phase d'ajustement et fournit au résultat un degré d'incertitude. Enfin, une phase de décision sélectionne parmi l'ensemble de ces candidats le regroupement le plus certain. La règle de décision retient le regroupement appartenant aux sous ensembles {ETR}, {ER} et possédant un degré de spécificité le plus faible sur ces sous ensembles.

## 4. résultats

Nous avons appliqué notre schéma d'extraction à la détection automatique d'un champignon microscopique pathogène de la feuille de blé. Ce parasite a une phase de développement très longue avec une phase de multiplication qui produit une quantité considérable de champignons. Comme on peut le constater sur la figure 9, ces champignons observés au microscope optique ont des formes proches de l'ellipse (grossissement 40). Au stade de croissance où la population de ce parasite a été observée, les dimensions des champignons évoluent dans un intervalle de  $10\mu$  m à  $15\mu$  m pour la largeur ( $\lambda_2$ ) et de  $30\mu$  m à  $40\mu$  m pour la longueur ( $\lambda_1$ ). Ces caractéristiques dimensionnelles nous permettent d'initialiser les différents paramètres de la procédure de détection : les bornes de l'intervalle de confiance et la paramétrisation des ensembles flous. Remarquons au passage que la qualité des images est faible. Des facteurs tels que le bruit et le flou optique génèrent des contours

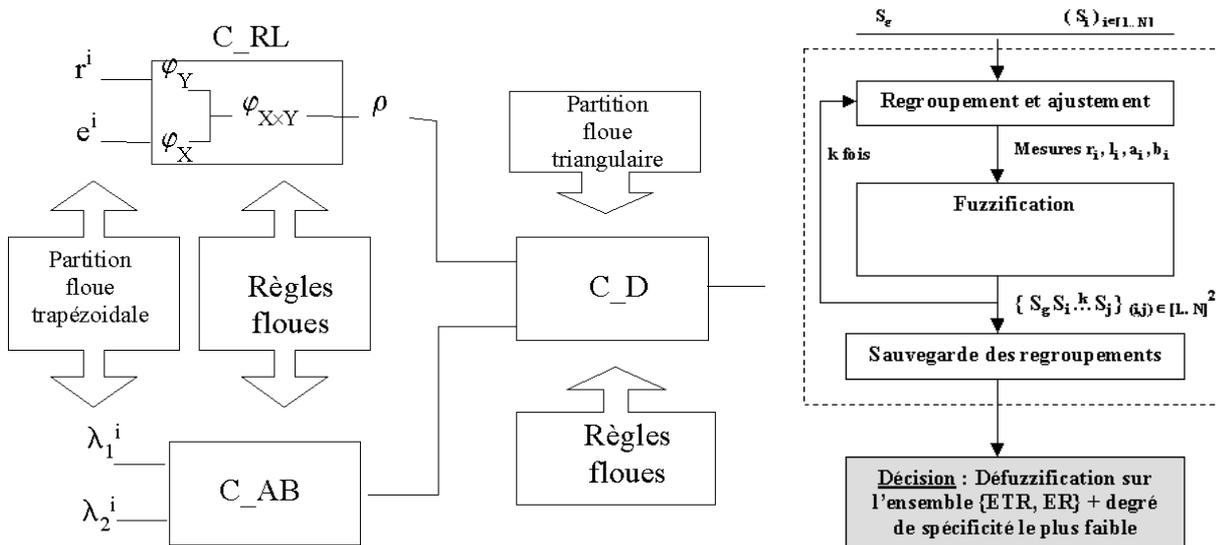


Figure 8. – Fuzzyfication des mesures issues du résultat de l'ajustement (a). Stratégie de décision (b).

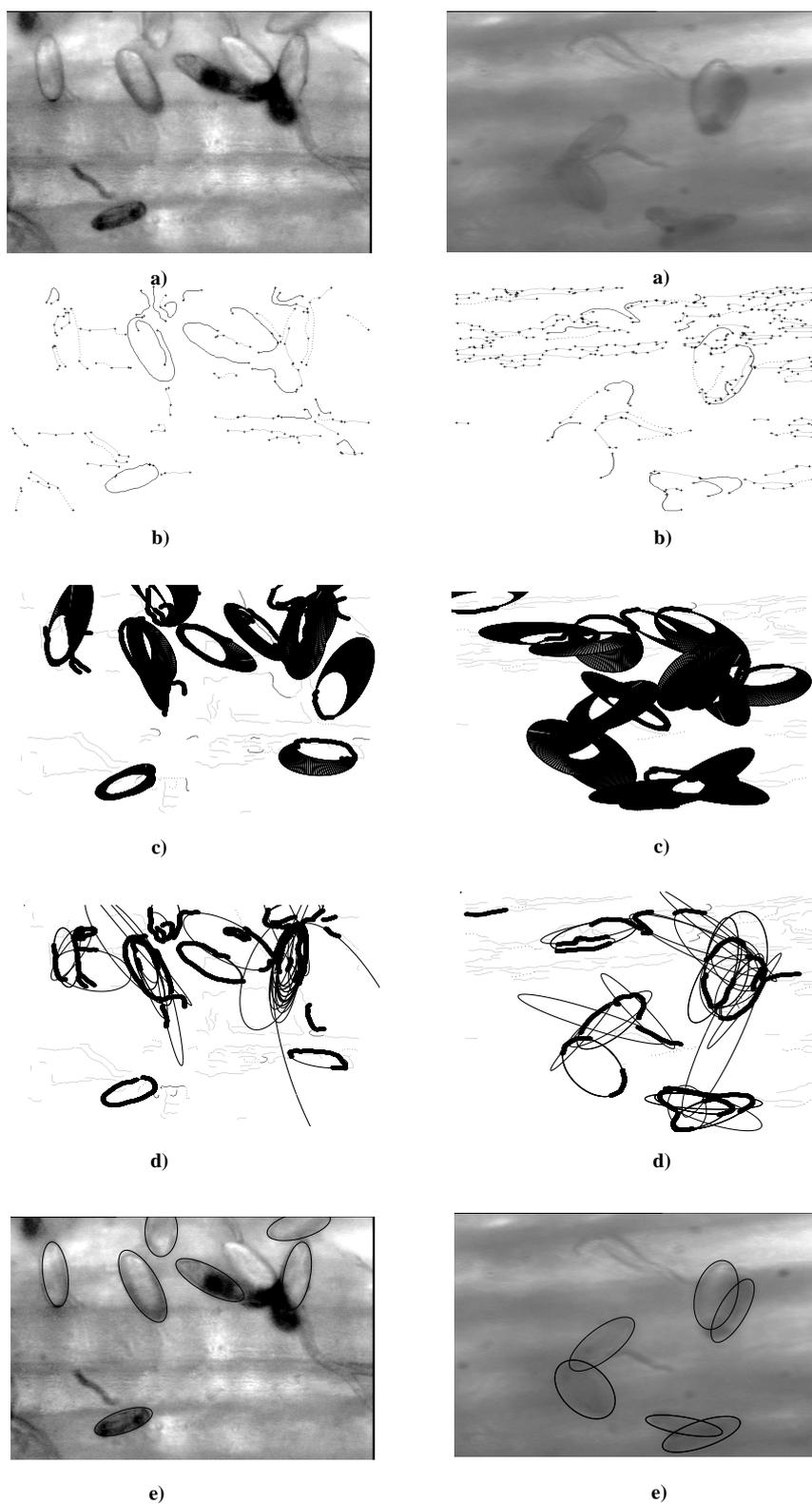


Figure 9. – Principales étapes de la détection. Images de spores a). Détection et classification des contours b). Estimation des enveloppes de confiance c). L'ensemble des ellipses candidates générées durant la phase de regroupement et d'ajustement d). Ellipses issues de la phase de décision e).

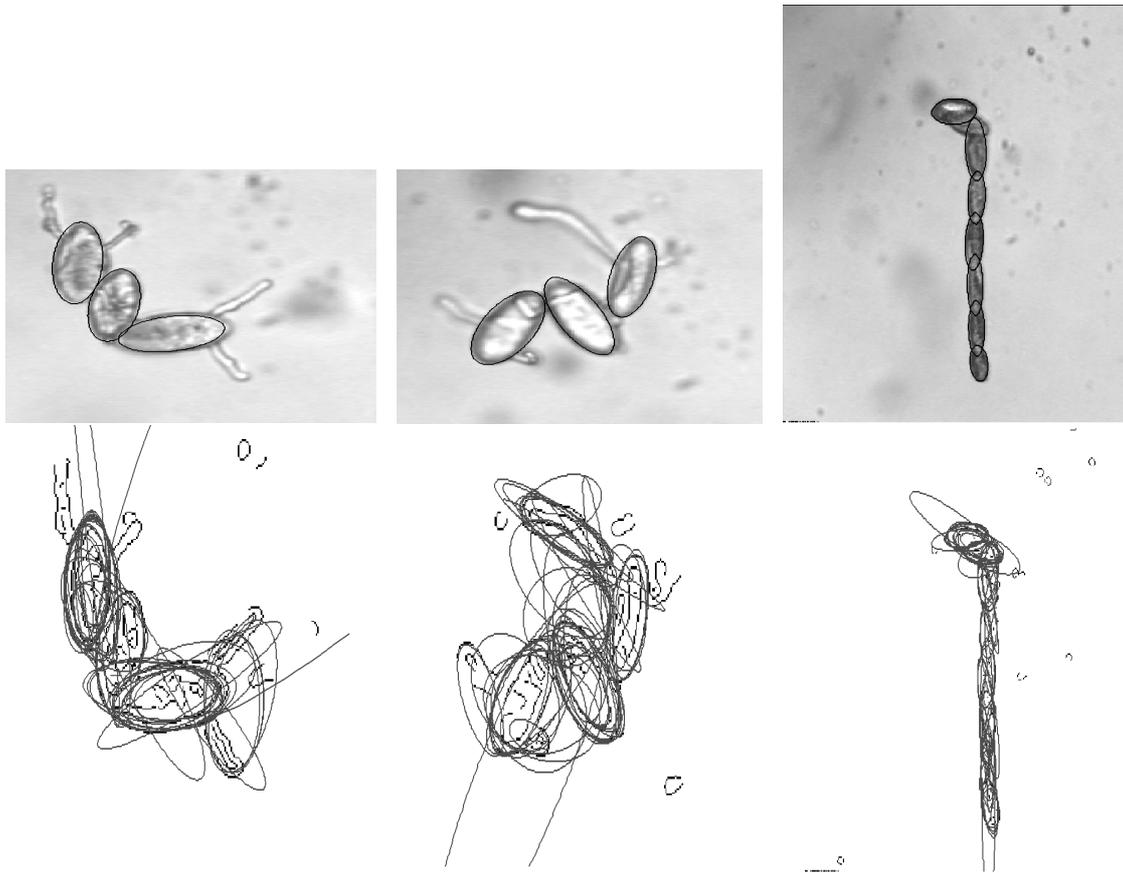


Figure 10. – Autres exemples. Images de champignons avec le résultat de la détection (figures du haut). Ensemble des ellipses candidates générées durant la phase de regroupement et d'ajustement (figures du bas).

parasites, discontinus et imprécis. La lumière n'est pas homogène sur la surface de la feuille de blé et une segmentation établie sur des critères de régions homogènes est à prescrire. Une autre contrainte perturbe également la détection : la plupart du temps les cellules sont regroupées ou se chevauchent, et des objets parasites sont présents (nervures de feuille, germination du champignon, ...).

La figure 9 illustre les différentes phases de la détection de ces champignons. La figure 9.a représente deux images de spores observées sous microscopie optique. L'extraction des contours est obtenue par filtrage de Deriche et seuillage par hysteresis. Le partitionnement élémentaire des contours est réalisé par détection des points à forte courbure et des discontinuités de la courbure. Ces points sont représentés par des '+'. À l'issue de cette étape, nous réalisons une première classification des segments en terme de segments « droits » et de segments « courbes ». Les segments colinéaires et à continuité de courbure sont ensuite regroupés. Les segments « droits » sont en couleur gris, les segments « courbes » sont en pointillés et les segments qui ont été regroupés en noir (figure 9.b). L'ajustement elliptique est initialisé à partir des segments « courbes ». Les zones grisées visualisent les enveloppes de confiance obtenues pour des valeurs de  $\nu$

prédéfinies (figure 9.c). La figure 9.d illustre l'ensemble des ellipses candidates obtenues pendant la phase conjointe de regroupement et d'ajustement. Enfin, la figure 9.e présente les ellipses retenues après la phase de décision. Le degré de flou associé à l'ellipse n'a pas été visualisé. Les autres résultats présentés sur la figure 10 confirment la robustesse de notre algorithme contre le bruit et le chevauchement.

La généralisation de notre méthodologie à la détection de formes elliptiques de tailles très différentes est possible si l'on considère non plus une solution « moyenne » mais deux : une solution minimale paramétrisée par le couple  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*)$  et une solution maximale paramétrisée par  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*)$ . En choisissant un intervalle d'étude  $[L_a, L_b]$  suffisant, c'est-à-dire respectant les conditions suivantes :  $L_a < L_{min}$  et  $L_b > L_{max}$ ,  $L_{min}$  (resp.  $L_{max}$ ) représentant le périmètre minimal (resp. maximal) des primitives elliptiques, l'algorithme du paragraphe 2.2 peut être appliqué sur ces deux contraintes dimensionnelles.

À titre d'illustration, nous avons généré une image test comprenant six ellipses de dimensions différentes. Elles sont référencées **A**, **B**, **C**,... et **F** sur la figure 11.a. Dans cet exemple, le périmètre minimal  $L_{min}$  vaut 118.3 (ellipse **F**) et le périmètre

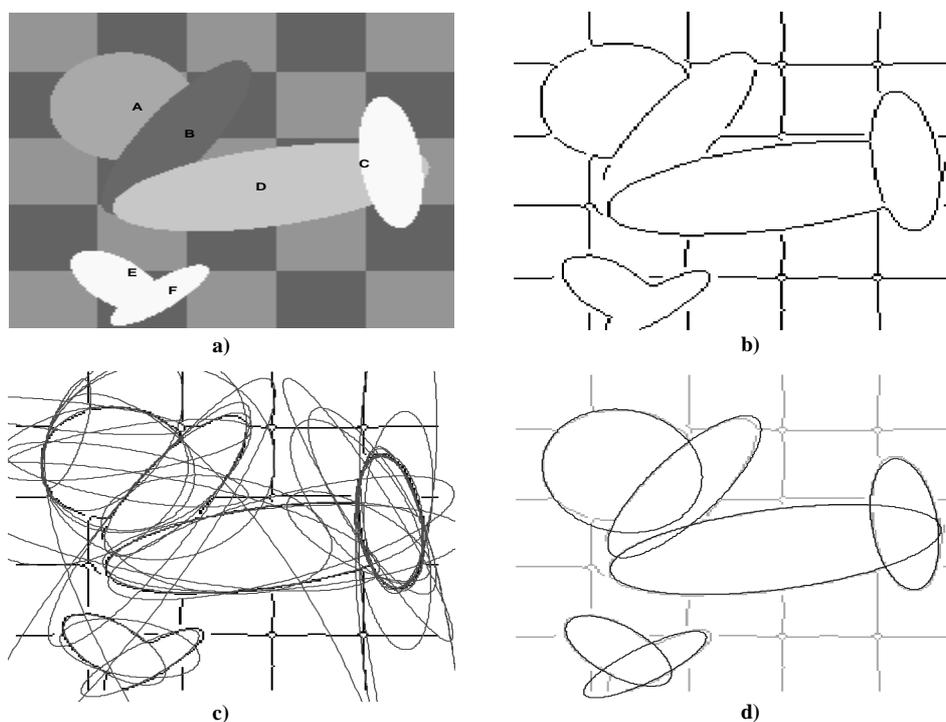


Figure 11. – Généralisation de la méthode à la détection d'ellipses de dimensions différentes. Image d'ellipses sur un fond damier a). Détection et classification des contours b). Illustration de la phase de regroupement et d'ajustement c). Résultat de la décision d).

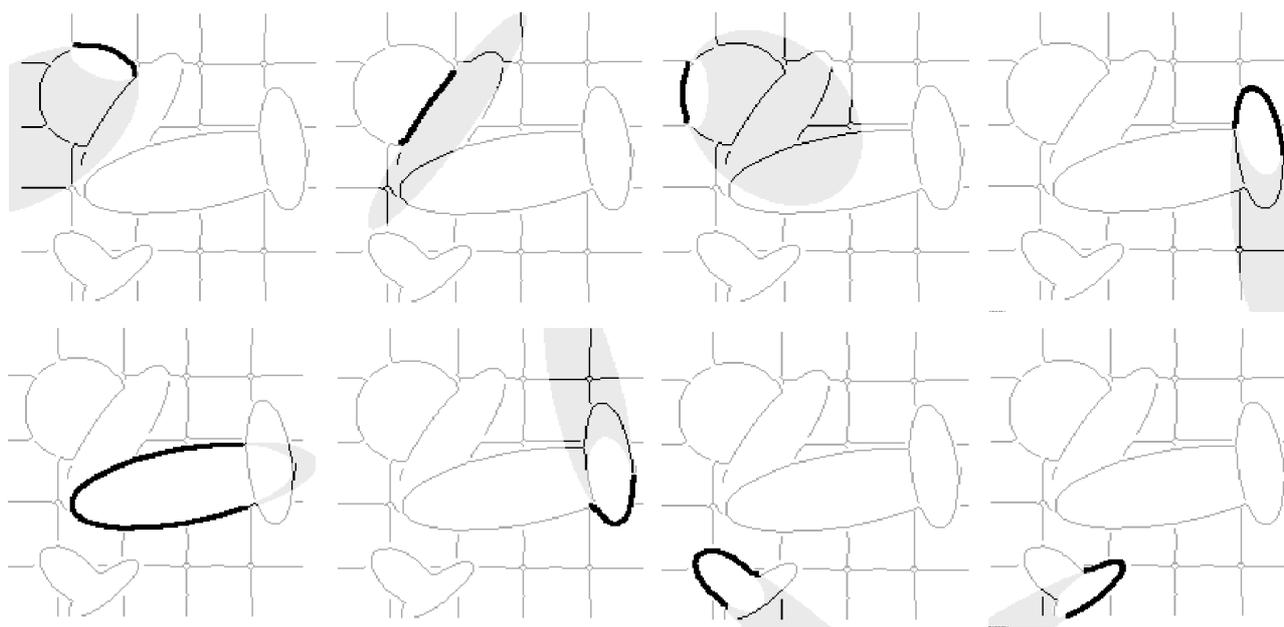


Figure 12. – Estimation des enveloppes (voir texte).

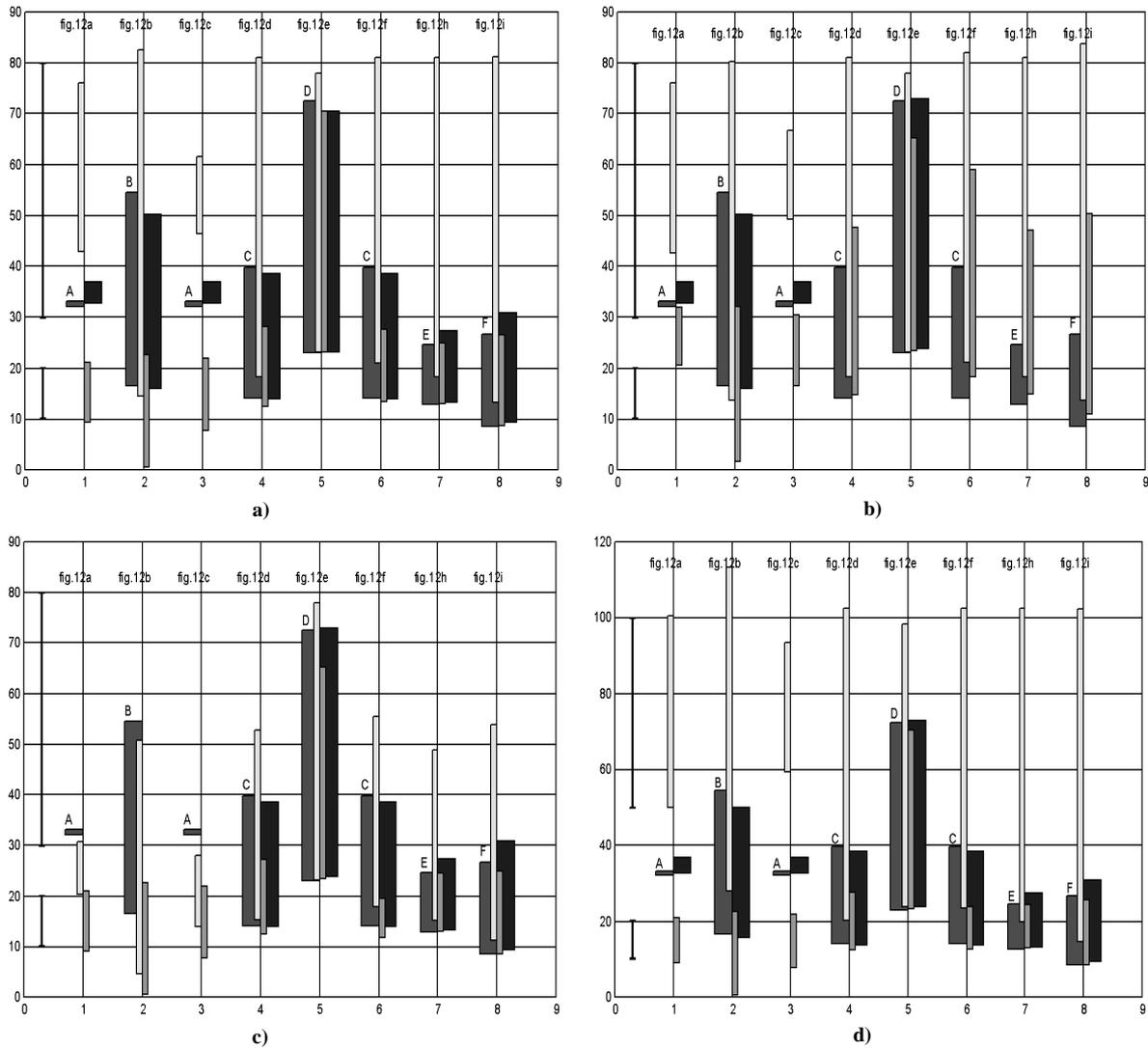


Figure 13. – Illustrations des dimensions obtenues pour les encadrements et les ellipses retenues durant la phase de décision pour les huit arcs de la figure 12.

Sur la figure a),  $(L_a, L_b) = (50, 800)$ ,  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*) = (20, 10)$  et  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*) = (80, 30)$ .

Sur la figure b),  $(L_a, L_b) = (200, 600)$ ,  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*) = (20, 10)$  et  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*) = (80, 30)$ .

Sur la figure c),  $(L_a, L_b) = (50, 100)$ ,  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*) = (20, 10)$  et  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*) = (80, 30)$ .

Sur la figure d),  $(L_a, L_b) = (50, 600)$ ,  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*) = (20, 10)$  et  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*) = (100, 50)$ .

maximal  $L_{max}$  vaut 320.5 (ellipse D). Afin de « casser » la continuité des contours, les ellipses se chevauchent partiellement et sont superposées à un fond de type damier. La figure 11.b illustre le résultat de la phase d'extraction des contours.

La figure 12 illustre, cas par cas, les enveloppes finales (zones grisées) estimées sur les segments étiquetés « courbes » (segments noirs) par la procédure de classification. Dans cet exemple, les bornes de l'intervalle d'analyse  $[L_a, L_b]$  sont fixées à  $[50, 800]$  et les solutions minimales et maximales sont définies respectivement par les deux couples de contraintes  $(\lambda_{1m}^* = 20, \lambda_{2m}^* = 10)$  et  $(\lambda_{1M}^* = 80, \lambda_{2M}^* = 30)$ .

En complément, nous proposons un graphique (figure 13.a) comportant huit colonnes, chacune d'elles résumant les résultats obtenus sur les arcs elliptiques des figures 12.a, 12.b, 12.c,...et 12.h. Chaque colonne comporte quatre barres grises, une barre représentant les dimensions d'une ellipse. La longueur du grand axe  $\lambda_1$  est donnée par la valeur maximale de la barre et la longueur du petit axe  $\lambda_2$  par la valeur minimale. Les deux barres centrales de couleur gris foncé correspondent aux dimensions de l'ellipse réelle (à gauche) et aux dimensions de l'ellipse retenue durant la phase de décision (à droite). Les deux barres de couleur gris clair représentent les dimensions des ellipses d'enca-

drement correspondant pour la barre du haut à la contrainte dimensionnelle  $(\lambda_{1M}^*, \lambda_{2M}^*)$  et pour la barre du bas à la contrainte dimensionnelle  $(\lambda_{1m}^*, \lambda_{2m}^*)$ .

La figure 11.c représente l'ensemble des ellipses candidates issues de la phase de regroupement/ajustement, et la figure 11.d, les solutions obtenues par la procédure de décision. La paramétrisation des ensembles flous relatifs aux variables dimensionnelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (contrôleur  $C_{AB}$ ) a été modifiée en conséquence. Les graphiques 13.b et 13.c illustrent les résultats obtenus lorsque les valeurs des bornes  $[L_a, L_b]$  ne respectent pas les conditions imposées précédemment. Dans certaines situations, les barres d'encadrement sont mal positionnées, ce qui peut entraîner une absence de détection. Sur la figure 13.b, l'intervalle  $[L_a, L_b] = [200, 600]$  avec  $L_a > L_{min}$ , les ellipses **C**, **E** et **F** n'ont pas été détectées (voir colonnes 4,6,7 et 8 de cette figure). Sur la figure 13.c, l'intervalle  $[L_a, L_b] = [50,100]$  avec  $L_b < L_{max}$ , les ellipses **A** et **B** n'ont pas été détectées (voir colonnes 1,2 et 3 de cette figure). Par contre pour l'ellipse **E**, la longueur de l'arc étant largement supérieur à 50 % de la longueur totale, l'influence de la contrainte dimensionnelle à peu d'effet sur le résultat de l'estimation. Dans ces deux cas, les contraintes dimensionnelles sont définies comme précédemment. Le graphique 13.d illustre les résultats obtenus lorsque les valeurs des bornes  $[L_a, L_b]$  sont correctement choisies mais avec une légère modification des dimensions de l'encadrement maximal. Dans cet exemple,  $[L_a, L_b] = [50,600]$ ,  $(\lambda_{1m}^* = 20, \lambda_{2m}^* = 10)$  et  $(\lambda_{1M}^* = 100, \lambda_{2M}^* = 50)$ . Dans ce cas, on ne fait « qu'agrandir » l'intervalle de confiance autour de chaque section, l'encadrement est alors suffisant pour réaliser une bonne détection.

## 5. conclusion

Cet article expose une méthode originale pour extraire des formes elliptiques dans des images de contours. D'abord, nous avons proposé un critère d'ajustement basé sur la représentation explicite de l'ellipse. Nous avons montré que cette représentation est bien adaptée pour intégrer les caractéristiques dimensionnelles des ellipses présentes dans les images. Sous cette contrainte, la procédure d'ajustement est stable et robuste en présence de données incomplètes et bruitées. L'estimation d'une enveloppe de confiance établie sur cette information constitue une ouverture intéressante et pratique pour appréhender de façon optimale la recherche des segments d'ellipses non connexes dans un processus de détection automatique. Enfin, nous avons proposé une procédure décisionnelle établie sur une représentation floue des mesures de l'ajustement permettant de donner une solution avec un degré de confiance.

Lorsque l'on connaît les caractéristiques dimensionnelles des ellipses, cette méthode peut s'avérer une alternative pratique

vis-à-vis des méthodes d'estimation robustes classiques telles que la transformée de Hough ou les Fuzzy c-shells qui peuvent être mises en échec lorsque le bruit est élevé et surtout, lorsque les données sont incomplètes. En effet, de façon générale, ces méthodes sont établies sur des propriétés de symétrie afin de réduire les coûts de calcul (TH) ou exigent une densité d'observations suffisante pour assurer la stabilité de la détection (Fuzzy c-shells).

Cette première version de l'algorithme peut donner lieu à de nouvelles perspectives :

– Au niveau de l'estimation, il semble intéressant de transposer cette méthode à d'autres modèles de représentation possédant une paramétrisation sur le cercle unité ou sur la sphère. Une réflexion est en cours pour généraliser cette approche aux courbes de Lamé qui sont une généralisation des ellipses en 2D et des superquadriques en 3D. L'utilisation d'une telle méthodologie en reconnaissance des formes pourrait s'ouvrir à d'autres formes que l'ellipse.

– En ce qui concerne la stratégie de décision floue adoptée, elle constitue un outil puissant pour intégrer des informations de nature différente. Dans le type d'application qui nous préoccupe, nous travaillons avec des images acquises en lumière transmise. Afin d'améliorer la certitude sur le résultat, il est envisagé de combiner des mesures supplémentaires issues par exemple d'images acquises en fluorescence. L'information région est alors présente et pourrait être « intégrée » dans la procédure de décision.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. L. Rosin, Ellipse fitting using orthogonal hyperbolae and stirling's oval. *Graphical Models and Image Processing.*, 60(3) : pp. 209-213, 1998.
- [2] P. D. Sampson, Fitting conic sections to 'very scattered' data: An iterative refinement of the bookstein algorithm. *Computer Graphics and Image Processing*, 18(1) : pp. 97-108, 1982.
- [3] R. Saffé-Rad, I Tchoukanov, B. Benhabib, Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey level images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: image Understanding*, 54 : pp. 259-274, 1991.
- [4] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations to edge and range image segmentation. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, 13(11) : pp. 1115-1138, 1991.
- [5] W. Gander, G.H. Golud, and R. Strelbel, Least squares fitting of circles and ellipses. *BIT*, 34 : pp. 558-578, 1994.
- [6] F. Bookstein. Fitting conic sections to scattered data. *Computer Vision, Graphics and Image Processing.*, 9 : pp. 56-71, 1979.
- [7] P. L. Rosin. Analysing error of fit functions for ellipses. *Pattern Recognition Letters*, 17 : pp. 1461-1470, 1996.
- [8] Z. Zhang. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting. *Image and Vision Computing*, 15(1) : pp. 57-76, 1997.
- [9] A. W. Fitzgibbon and R.B. Fisher. A buyer's guide to conic fitting. *Proc. Sixth British Machine Vision Conf., D. Pycock ed.*, 2 : pp. 513-522, 1995.
- [10] S. S. Rao. Optimization: Theory and applications. *Wiley Eastern*, 2 edition., 1984.

- [11] P.L. Rosin. A note on the least square fitting of ellipses. *Pattern Recognition Letters.*, 14 : pp. 799-808, 1993.
- [12] P. L. Rosin and G.A.W. West. Segmenting curves into elliptic arc and straight lines. *Third Int'l Conf. Computer Vision, Japan*, pp. 75-78, 1990.
- [13] H. Bendtsen and I. Wright. Fitting ellipses to noisy spatial data. *Technical report, Dept. of Mathematics and Statistics, Curtin University*, 1992.
- [14] A. W. Fitzgibbon, M. Pilu, and R.B. Fisher. Direct least squares fitting of ellipses. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(5): pp. 476-480, 1999.
- [15] R. Halir and J. Flusser. Numerically stable direct least squares fitting of ellipses. *Proceedings of the 6th International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualisation, WSG'98*, pp. 103-108, 1998.
- [16] J. Porill. Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using bias corrected kalman filter. *Image and Vision Computing*, 8(1): pp. 37-41, 1990.
- [17] T. Ellis, A. Abbood, and B. Billault. Ellipse detection and matching with uncertainty. *Image and Vision Computing*, 10(5): pp. 271-276, 1992.
- [18] K. Kanatani. Renormalisation for unbiased estimation. *In Proc. 4th Int'l Conf. Comput. Vision (Berlin)*, pp. 599-606, 1993.
- [19] W. Chojnacki, M. Brooks, and A. Van den Hengel. On the fitting of surfaces to data with covariances. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence.*, 22(11): pp. 1294-1303, 2000.
- [20] J. Cabrera and P. Meer, Unbiased estimation of ellipses by bootstrapping. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(7): pp. 752-756, 1996.
- [21] C. Daul, P. Graebbling, and Ernest Hirsch. From the hough transform to a new approach for the detection and approximation of elliptical arcs. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(3) : pp. 215-236, 1998.
- [22] R. N. Dave and K. Bhaswan. Adaptive fuzzy c-shells clustering and detection of ellipses. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(5) : pp. 643-662, 1992.
- [23] R. Krishnapuram and J. Keller. A possibilistic approach to clustering. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems.*, 1(2) : pp. 98-110, 1993.
- [24] I. Gath and D. Hoory. Fuzzy clustering of elliptic ring-shaped clusters. *Pattern recognition letters*, 16(3) : pp. 727-741, 1995.
- [25] E. Lutton and P. Martinez. A genetic algorithm for the detection of 2d geometric primitives in images. *Rapport INRIA*, (2110), 1993.
- [26] P. Y. Yin. A new circle/ellipse detector using genetic algorithms. *Pattern recognition letters*, 20 : pp. 731-740, 1999.
- [27] P. J. Rousseeuw and A.M. Leroy. Robust regression and outlier detection. *John Wiley and Sons, New-york*, 1987.
- [28] M. Li. Minimum description length based 2d shape description. *4th. Proc. International Conference on Computer Vision*, pp. 512-517, 1993.
- [29] R. Deriche. Fast algorithms for low-level vision. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1(12): pp. 78-88, 1990.
- [30] K. Sohn, W.E. Alexander, J.H. Kim, and W.E. Snyder. A constrained regularization approach to robust corner detection. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(5): pp. 820-828, 1994.
- [31] D. M. Wuescher and K.I. Boyer. Robust contour decomposition using a constant curvature criterion. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(1): pp. 41-51, 1991.

Manuscrit reçu le 30 juin 2000.

#### L'AUTEUR

F DUFRENOIS



De formation universitaire ayant conduit à un DEA en électronique, il soutient sa thèse de doctorat en électronique en 1994 à Lille. Il est maître de conférences en automatique à Calais. Son activité de recherche s'articule autour des domaines du traitement et de l'interprétation des images, de la reconstruction 3D et de l'analyse du mouvement déformable.