

Une famille d'invariants stables pour l'analyse des objets 3D à niveaux de gris

A Set of Invariant and Stable Descriptors for 3D Gray-Levels Objects

par Mourad ZRIBI*, Faouzi GHORBEL**, Raymond MOCHÉ***, Alain HILLION****, Valérie BURDIN*****

* Laboratoire d'Analyse des Systèmes du Littoral (LASL-EA 2600), ULCO, B.P. 699, 50, rue Ferdinand Buisson bât B, 62228 Calais Cedex, France.

Tél : 03 21 46 06 85, Fax : 03 29 46 06 86, e-mail : Mourad.Zribi@lasl-gw.univ-littoral.fr

** Pôle Image (GRIFT) du Laboratoire CRISTAL de l'ENSI, Campus universitaire de la Manouba Tunisie.

*** Laboratoire de Statistique et Probabilités, EP CNRS 1765, UFR de Mathématiques (M2) USTL, Cité Scientifique, 59655 – Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

**** École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, Département ITI, Technopôle de Brest Iroise, BP 832, 29285 – Brest Cedex, France.

résumé et mots clés

La description d'objets tridimensionnels indépendamment de leur position et de leur orientation est un problème important et difficile de l'analyse de formes. Dans cet article, nous traitons ce problème à l'aide d'une pseudo-transformation de Fourier sur le groupe $M(3)$ des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions. Celle-ci nous permet de définir des descripteurs de volumes à niveaux de gris stables et invariants par rapport à $M(3)$. Cette méthode est appliquée à la classification et la description automatiques d'os humains.

Description de formes, groupe $M(3)$, pseudo-transformation de Fourier, descripteurs de volumes.

abstract and key words

The description of 3D objects independently of their position and orientation, is an important and difficult problem in pattern analysis. In this paper, we deal with this problem by a pseudo-Fourier transform on the group of motions of the 3D Euclidean space, which we denote by $M(3)$. This transform allows us to define 3D gray-levels object descriptors which are invariant and stable with respect to $M(3)$. This method is applied to human bones automatic classification and description.

Pattern recognition, $M(3)$ group, pseudo-Fourier transform, volume descriptors.

1. introduction

Plusieurs approches de l'analyse des formes ont été développées ces dernières années. Nous pouvons principalement les classer suivant deux types :

- les méthodes globales telles que la méthode des moments ([Flusser], [Sadjadi], [Shu], [Yajun], [Yang]), les descripteurs de Fourier ([Chen], [Fonga], [Gourd]), les descripteurs de Fourier-Mellin ([Derrode], [Grace], [Sheng]), ...
- les méthodes locales basées sur la géométrie différentielle ([Clements], [Gros], [Lamdan], [Matusiak], [You], [Lamiroy]). Dans cet article, nous proposons des descripteurs globaux d'objets 3D à niveaux de gris, invariants par rapport au groupe $M(3)$ des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions $E(3)$ et inspirés de la théorie de la représentation des groupes, afin de profiter des propriétés d'invariance de la mesure de Haar de $M(3)$ ([Villenkin], [Zribi, a]). Notre démarche est donc une transposition de la démarche suivie avec succès en dimension 2 par J. P. Gauthier, F. Gourd et H. Younes ([Gourd]) et parallèlement par F. Ghorbel ([Ghorbel, b], [Ghorbel, c]) pour la reconnaissance d'objets 2D à niveaux de gris et susceptible de s'appliquer à la détection de mouvements en analyse d'images. Les descripteurs obtenus ne vérifient pas le critère de complétude introduit par T. R. Crimmins ([Crimmins]), mais répondent bien au critère de stabilité ([Ghorbel, a]).

2. justification théorique des descripteurs proposés

2.1. objets 3D à niveaux de gris et déplacements de $E(3)$

Une origine et un repère orthonormé direct ayant été choisis, $E(3)$ est identifié à \mathbb{R}^3 . λ désigne toujours la mesure de Borel sur \mathbb{R} ([Malliavin], chap. II). Le groupe $So(3)$ des rotations de $E(3)$ étant isomorphe au groupe des matrices réelles orthogonales dont le déterminant est égal à 1, on identifie ces deux groupes. $So(3)$ se trouve ainsi muni de la topologie usuelle de l'espace des matrices réelles 3×3 . C'est un groupe topologique compact non commutatif qui peut être localement paramétré par les angles d'Euler φ, θ , et ψ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$ ([Schwartz], p. 99). La matrice d'une rotation définie par des angles d'Euler est :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les mesures de Haar de $So(3)$ à droite et à gauche sont égales, à un coefficient multiplicatif strictement positif près, à la mesure μ sur $So(3)$ de masse totale 1 qui admet localement pour densité la fonction $\frac{1}{8\pi^2} \sin \theta$ par rapport à la mesure de Borel λ^3 sur $[0, 2\pi[\times [0, \pi[\times [0, 2\pi[$.

Les déplacements de $E(3)$ sont les transformations affines de $E(3)$ qui conservent la distance et l'orientation. Tout déplacement D est la composée d'une translation de vecteur A et d'une rotation de matrice M , soit pour tout vecteur X de \mathbb{R}^3 , $D(X) = A + M \cdot X$. La composition de deux déplacements D et D' donne $D'(D(X)) = A' + M' \cdot A + M' \cdot M \cdot X$, autrement dit, la loi de composition interne de $M(3)$ est :

$$(A', M') \circ (A, M) = (A' + M' \cdot A, M' \cdot M).$$

L'ensemble des translations de $E(3)$ étant identifié à \mathbb{R}^3 , $M(3)$ est donc le produit semi-direct des groupes \mathbb{R}^3 et $So(3)$, soit $M(3) = \mathbb{R}^3 \rtimes So(3)$. De plus, $M(3)$ muni de la topologie-produit des topologies de \mathbb{R}^3 et de $So(3)$ est un groupe topologique localement compact non commutatif. On choisira comme exemplaire de sa mesure de Haar à droite ou à gauche la mesure-produit $\lambda^3 \otimes \mu$ telle que : $\lambda^3(dA) = dx dy dz$ et $\mu(dM) = \frac{1}{16\pi^2} \sin \theta d\varphi d\theta d\psi$.

Un objet 3D à niveaux de gris est identifié à une fonction f définie sur \mathbb{R}^3 , mesurable, positive, bornée, nulle en dehors d'un compact $K_f \cdot f(x, y, z)$ est le niveau de gris au point (x, y, z) . f est elle-même considérée comme une fonction définie sur $M(3)$, ne dépendant que du vecteur de translation A . O désigne l'ensemble des objets 3D à niveaux de gris.

L'idée directrice de ce papier est d'associer à tout objet f de O sa transformée de Fourier, puis d'en déduire des descripteurs invariants en profitant de l'invariance de la mesure de Haar $\lambda^3 \otimes \mu$ par les applications $D \mapsto D_0 \circ D$ et $D \mapsto D \circ D_0$, pour tout déplacement D_0 .

2.2. une pseudo-transformation de Fourier sur le groupe $M(3)$

Malheureusement, la théorie de la transformation de Fourier sur $M(3)$ n'est pas achevée. On connaît cependant les représentations irréductibles de classes 1 de $M(3)$ ([Villenkin], chap. XI, § 2) à partir desquelles on peut définir une pseudo-transformation de Fourier. Pour cela, nous appellerons S^2 la sphère-unité de \mathbb{R}^3 , $L^2(S^2)$ l'espace de Hilbert des fonctions complexes définies sur S^2 , mesurables et de carré intégrable par rapport à la mesure uniforme \mathcal{U} de masse totale 1 sur S^2 muni de sa tribu borélienne. Remarquons que pour tout point ξ de S^2 , \mathcal{U} est la

mesure-image de μ par l'application $M \mapsto M \cdot \xi$, puisque cette mesure-image est invariante par rotation.

Définition 1 : On appelle pseudo-transformées de Fourier de tout objet f de \mathcal{O} les opérateurs, ou endomorphismes continus, $\tilde{f}_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, de $L^2(S^2)$ définis par :

$$\forall \varphi \in L^2(S^2) \text{ et } \forall \xi \in S^2,$$

$$\tilde{f}_\alpha(\varphi)(\xi) = \int_{M(3)} f(A) e^{-i\alpha A^t \cdot M \cdot \xi} \varphi(M \cdot \xi) \lambda^3(dA) \mu(dM). \square$$

La justification de cette définition est immédiate. De plus, elle peut être simplifiée considérablement en utilisant la transformée de Fourier usuelle \hat{f} de f considérée comme une fonction définie sur \mathbb{R}^3 , soit :

$$\forall U \in \mathbb{R}^3, \hat{f}(U) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iU^t \cdot A} f(A) \lambda^3(dA).$$

Théorème 1 : Pour tout objet f de \mathcal{O} , \tilde{f}_α peut être identifié à un élément de $L^2(S^2)$, à savoir l'application $S \mapsto \hat{f}(\alpha S)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{C} . \square

Démonstration. Calculons $\tilde{f}_\alpha(\varphi)(\xi)$ en intégrant d'abord par rapport à M grâce au théorème de Fubini, et en ramenant cette intégrale à une intégrale sur S^2 , grâce au théorème de transfert, puisque \mathcal{U} est l'image de μ par l'application $M \mapsto M \cdot \xi$. Enfin, intervertissons les intégrations, de nouveau d'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha(\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(A) \left(\int_{S^2} e^{-i\alpha A^t \cdot M \cdot \xi} \varphi(M \cdot \xi) \mu(dM) \right) \lambda^3(dA) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(A) \left(\int_{S^2} e^{-i\alpha A^t \cdot S} \varphi(S) \mathcal{U}(dS) \right) \lambda^3(dA) \\ &= \int_{S^2} \varphi(S) \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\alpha S^t \cdot A} f(A) \lambda^3(dA) \right) \mathcal{U}(dS) \\ &= \int_{S^2} \varphi(S) \hat{f}(\alpha S) \mathcal{U}(dS) = \langle \varphi, \overline{\hat{f}(\alpha \cdot)} \rangle_2, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est le produit scalaire de $L^2(S^2)$, tandis que $\| \cdot \|_2$ désignera sa norme. L'application $\varphi \mapsto \tilde{f}_\alpha(\varphi)(\xi)$ de $L^2(S^2)$ dans \mathbb{C} est donc une forme linéaire continue de l'espace de Hilbert $L^2(S^2)$ indépendante de ξ et identifiable à $\overline{\hat{f}(\alpha \cdot)}$, voir ([Schwartz], § 6). \square

2.3. descripteurs invariants pour les objets 3D à niveaux de gris

Il est clair que pour tout objet f de \mathcal{O} et tout vecteur U de \mathbb{R}^3 ,

$$|\hat{f}(U)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda^3 = \hat{f}(0) \text{ et } \hat{f}(-U) = \overline{\hat{f}(U)}.$$

De plus, \hat{f} est une fonction continue sur \mathbb{R}^3 qui s'annule à l'infini, c'est-à-dire telle que $\hat{f}(U) \xrightarrow{|U|_3 \rightarrow +\infty} 0$, où $| \cdot |_3$ désigne la norme euclidienne de $E(3)$ ([Hervé], prop. 2.1). Il en résulte, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, que

$$\alpha \mapsto I_f(\alpha) = \int_{S^2} |\hat{f}(\alpha S)|^2 \mathcal{U}(dS) = \|\hat{f}_\alpha\|_2^2$$

est une fonction continue positive sur \mathbb{R} et que $I_f(\alpha) \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0$.

I_f étant une fonction paire, on n'utilisera que sa restriction à $]0, +\infty[$. \mathbf{C}_∞ désignant l'ensemble des fonctions continues bornées positives définies sur $]0, +\infty[$ qui s'annulent à l'infini, on munira \mathcal{O} et \mathbf{C}_∞ , qui sont des espaces de fonctions bornées, de la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme, soit

$$\forall f \in \mathcal{O}, \|f\|_\infty = \sup(f(A); A \in \mathbb{R}^3) \text{ et } \forall \varphi \in \mathbf{C}_\infty, \|\varphi\|_\infty = \sup(\varphi(\alpha); \alpha > 0)$$

Définition 2 : Le descripteur que nous proposons est l'application $f \mapsto I_f$, ou I , de \mathcal{O} dans \mathbf{C}_∞ . \square

Si l'on passe en coordonnées sphériques sur S^2 , soit $x = \cos \varphi \cdot \cos \theta$, $y = \sin \varphi \cdot \cos \theta$, $z = \sin \theta$, $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, comme la mesure uniforme \mathcal{U} sur S^2 est la mesure de densité $\frac{1}{4\pi} \cdot \cos \theta$ par rapport à la mesure de Borel λ^2 sur $]0, 2\pi[\times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ([Villenkin], chap. III, § 6.5),

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{O} \text{ et } \forall \alpha > 0, I_f(\alpha) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \hat{f}(\alpha \cos \varphi \cdot \cos \theta, \alpha \sin \varphi \cdot \cos \theta, \alpha \sin \theta) \right|^2 \\ &\quad \cos \theta \lambda(d\varphi) \lambda(d\theta). \end{aligned}$$

Nous démontrons maintenant que I a les propriétés annoncées. Ce sont des conséquences immédiates de l'invariance de λ^3 par translation et par rotation.

Théorème 2 : Soit f_1 un objet 3D à niveaux de gris.

1. f_2 désignant l'objet obtenu en faisant subir à f_1 le déplacement D de vecteur de translation A et de matrice de rotation M ,
 - 1.a) $\forall U \in \mathbb{R}^3, \hat{f}_2(U) = e^{-iU^t \cdot A} \cdot \hat{f}_1(M^{-1} \cdot U)$,
 - 1.b) $I_{f_1} = I_{f_2}$.
2. Soit f' l'objet obtenu en faisant subir à f_1 une homothétie de rapport $k \neq 0$. Alors pour tout réel $\alpha > 0$, $I_{f'}(\alpha) = k^6 \cdot I_{f_1}(\alpha|k|)$. \square

Démonstration. 1.a) Pour tout vecteur X' de \mathbb{R}^3 , $f_2(X') = f_1(M^{-1}(X' - A))$, donc, d'après le théorème de changement de variables et puisque M est une matrice orthogonale, pour tout vecteur U de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} \widehat{f}_2(U) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iU^t \cdot X'} \cdot f_2(X') \lambda^3(dX') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iU^t \cdot (A+M \cdot X)} \cdot f_1(X) |\det M| \lambda^3(dX) \\ &= e^{-iU^t \cdot A} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(M^{-1} \cdot U)^t \cdot X} \cdot f_1(X) \lambda^3(dX) \\ &= e^{-iU^t \cdot A} \widehat{f}_1(M^{-1} \cdot U). \end{aligned}$$

1.b) Pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} I_{f_2}(\alpha) &= \int_{S^2} \left| \widehat{f}_2(\alpha S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) \\ &= \int_{S^2} \left| e^{-i\alpha S^t \cdot A} \cdot \widehat{f}_1(\alpha M^{-1} \cdot S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) \\ &= \int_{S^2} \left| \widehat{f}_1(M^{-1} \cdot \alpha S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) \\ &= \alpha^2 \int_{S^2_\alpha} \left| \widehat{f}_1(M^{-1} \cdot S) \right|^2 \mathcal{U}_\alpha(dS) \end{aligned}$$

où \mathcal{U}_α est la mesure uniforme sur la sphère S^2_α de rayon $\alpha > 0$, d'après le théorème de transfert, soit

$$I_{f_2}(\alpha) = \alpha^2 \int_{S^2_\alpha} \left| \widehat{f}_1(S) \right|^2 \mathcal{U}_\alpha(dS)$$

de nouveau d'après le théorème de transfert, parce que \mathcal{U}_α est invariante par rotation, puis

$$I_{f_2}(\alpha) = \int_{S^2} \left| \widehat{f}_1(\alpha S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) = I_{f_1}(\alpha).$$

2. Pour tous vecteurs X' et U de \mathbb{R}^3 , $f'(X') = f_1\left(\frac{X'}{k}\right)$, donc

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(U) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iU^t \cdot X'} \cdot f'(X') \lambda^3(dX') \\ &= |k|^3 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ikU^t \cdot X} \cdot f_1(X) \lambda^3(dX) = |k|^3 \widehat{f}_1(kU). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} I_{f'}(\alpha) &= \int_{S^2} \left| \widehat{f}'(\alpha S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) \\ &= k^6 \int_{S^2} \left| \widehat{f}_1(|k|\alpha S) \right|^2 \mathcal{U}(dS) = k^6 I_{f_1}(|k|\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

I est donc invariant par tout déplacement de $E(3)$. Par conséquent, il est également invariant par tout changement de repère orthonormé, direct ou non, de l'espace affine euclidien $E(3)$.

2.4. stabilité du descripteur I

On dit qu'un descripteur est stable si deux objets de \mathbf{O} dont les formes sont voisines ont des descripteurs voisins. La stabilité éventuelle de I dépend évidemment des topologies mises sur \mathbf{O} et \mathbf{C}_∞ . La topologie la plus satisfaisante est celle qui est associée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ dans chacun de ces espaces.

Théorème 3 : Pour tous objets f et g de \mathbf{O} ,

$$\|I_f - I_g\|_\infty \leq (\widehat{f}(0) - \widehat{g}(0)) \cdot \lambda^3(K_f \cup K_g) \cdot \|f - g\|_\infty. \quad \square$$

Démonstration. Pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} |I_f(\alpha) - I_g(\alpha)| &= \left| \int_{S^2} \left(\left| \widehat{f}(\alpha S) \right|^2 - \left| \widehat{g}(\alpha S) \right|^2 \right) \mathcal{U}(dS) \right| \\ &\leq \int_{S^2} \left(\left| \widehat{f}(\alpha S) \right| + \left| \widehat{g}(\alpha S) \right| \right) \cdot \left| \widehat{f}(\alpha S) - \widehat{g}(\alpha S) \right| \mathcal{U}(dS) \\ &\leq (\widehat{f}(0) + \widehat{g}(0)) \int_{S^2} \left| \widehat{f}(\alpha S) - \widehat{g}(\alpha S) \right| \mathcal{U}(dS) \\ &= (\widehat{f}(0) + \widehat{g}(0)) \int_{S^2} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\alpha S^t \cdot U} (f(U) - g(U)) \lambda^3(dU) \right| \mathcal{U}(dS) \\ &\leq (\widehat{f}(0) + \widehat{g}(0)) \int_{S^2} \left(\int_{K_f \cup K_g} |f - g| d\lambda^3 \right) \mathcal{U}(dS) \\ &\leq (\widehat{f}(0) + \widehat{g}(0)) \cdot \lambda^3(K_f \cup K_g) \cdot \|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité annoncée. \square

Comme tous les objets sont contenus dans un même compact de \mathbb{R}^3 , on peut conclure que l'application $f \mapsto I_f$ ainsi réduite est continue par rapport aux topologies considérées pour lesquelles le descripteur I est donc stable. La fin du calcul précédent montre aussi que I reste stable lorsqu'on muni \mathbf{O} de la norme usuelle $\| \cdot \|_1$ définie par :

$$\forall f \in \mathbf{O}, \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |f| d\lambda^3 = \int_{K_f} |f| d\lambda^3.$$

Théorème 4 : Pour tous objets f et g de \mathbf{O} ,

$$\|I_f - I_g\|_\infty \leq (\widehat{f}(0) + \widehat{g}(0)) \cdot \|f - g\|_1. \quad \square$$

D'après ce théorème, on déduit un critère de comparaison entre les descripteurs défini par :

$$d(I_f, I_g) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} |I_f(\alpha) - I_g(\alpha)|.$$

Ce critère est utilisé comme outil de classification des objets 3D de formes différentes.

3. pratique des descripteurs $I_f, f \in \mathbf{O}$

3.1. approximation de ces descripteurs

Etant donné un objet f de \mathbf{O} , on commence par le discrétiser en disposant dans le tableau dans lequel il se trouve des points régulièrement espacés. On note ces points par (j_d, k_d, l_d) où j, k, l sont des entiers compris entre 0 et $N-1$ et d la distance unité. Un point $V = (V_1, V_2, V_3)$ de ce tableau est référé comme un point digital. On associe à chaque point digital V les points (x_1, x_2, x_3) de l'espace continu tel que : $V_i - \frac{d}{2} \leq x_i \leq V_i + \frac{d}{2}$ pour $i = 1, 2, 3$. Il en résulte qu'un élément volume est un cube unité qu'on appelle voxel V ([Cohen]). On associe ensuite à chaque voxel une valeur voisine des valeurs prises par f dans ce voxel. On définit ainsi un nouvel objet f^* qui est une approximation de l'objet considéré f , telle que $K_f = K_{f^*} \cdot f^*$ est une fonction à valeurs entières. Dans le cas d'une image binaire, f^* serait une fonction à valeurs binaires. On ne calcule pas le descripteur I_f , mais le descripteur I_{f^*} , qui en est une approximation parce que I est stable, d'après le théorème 3, qui permet de contrôler l'erreur ainsi faite puisque :

$$\|I_f - I_{f^*}\|_\infty \leq (\hat{f}(0) + \hat{f}^*(0)) \cdot \lambda^3(K_f) \cdot \|f - f^*\|_\infty.$$

Pour calculer : $I_{f^*}(\alpha) = \int_{S^2} |\hat{f}^*(\alpha S)|^2 \mathcal{U}(dS)$, on calcule \hat{f}^* en utilisant la transformée de Fourier rapide 3D (FFT 3D), puis on calcule l'intégrale

$$I_{f^*}(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \hat{f}^*(\alpha \cos \varphi \cdot \cos \theta, \alpha \sin \varphi \cdot \cos \theta, \alpha \sin \theta) \right|^2 \cos \theta \lambda(d\varphi) \lambda(d\theta)$$

par la méthode des rectangles. Le pas choisi pour α est 1 et le nombre de points par sphère est égale à trois fois le nombre de voxels de la largeur de l'image [Zribi, b].

3.2. choix d'un rayon de coupure α_M

On sait que pour tout objet f de \mathbf{O} , I_f s'annule à l'infini. Par conséquent, $I_f(\alpha)$ et $I_{f^*}(\alpha)$ deviennent négligeables dès que α dépasse un certain seuil α_M que nous appelons rayon de coupure, à partir duquel nous cessons les calculs. Pour choisir α_M , nous supposons que l'origine du repère est le centre C de l'image. L'énergie du signal f^* contenue dans la sphère S_α^2 est

$$E_{f^*}(\alpha) = \int_{S_\alpha^2} |\hat{f}^*|^2 d\lambda^3.$$

Pour les images à texture douce, elle est concentrée autour de C ([Besancon]) ; α_M est alors petit. Pour les images à texture grossière, elle est portée par les hautes fréquences, donc α_M est grand. En l'absence de toute information sur la répartition de l'énergie de f^* , nous avons choisi $\alpha_M = \frac{N}{2}$, N^3 désignant le nombre de voxels de l'image.

3.3. application à la reconnaissance d'images médicales

L'objet de cette application est de tester le comportement des descripteurs invariants $I_f, f \in \mathbf{O}$, en vue de la classification et de la reconnaissance automatiques d'os humains. Ces descripteurs invariants permettent au médecin d'avoir une évaluation quantitative d'information sur les formes des objets volumiques et de mesurer la ressemblance entre les structures 3D. L'étude a porté sur des données médicales issues de deux sources différentes :

- une série de coupes sagittales scanner X (image a) de la symphyse pubienne (image f),
- une série de coupes sagittales I.R.M de la colonne vertébrale (image i).

La symphyse pubienne est la partie de l'os du bassin située en avant du corps. L'acquisition de type scanner [Martin] où I.R.M [Gado] permet d'étudier l'intérieur des structures osseuses, ce qui est essentiel si nous voulons développer une véritable morphométrie osseuse interne et externe [Burdin]. Pour une acquisition scanner de coupes jointives de 1 mm d'épaisseur, on obtient un volume anisotrope de taille $100 \times 70 \times 15$ pixels environ. Bien qu'il soit possible de travailler avec une résolution différente dans les trois directions, nous adoptons une approche plus classique consistant à modifier la résolution dans le plan d'acquisition des coupes pour la rendre isotrope. Cette approche consiste à rééchantillonner z à la résolution de x et de y par interpolation cubique sur chaque colonne (x et y constants). Ainsi, nous obtenons une information tridimensionnelle de bonne qualité puisque les éléments de volume (voxels) sont cubiques et les directions deviennent équivalentes pour les traitements futurs. La résolution est alors 0,6 mm environ par pixel sur les trois axes.

La série de coupes d'images (image b , image c) scanner présente un bruit (des taches dans le fond de l'image) qui risque d'être non souhaitable pour l'extraction des primitives invariantes. Afin de remédier à ce problème, nous avons utilisé une technique de filtrage basée sur la morphologie mathématique ([Matheron], [Serra]). L'image (d) et l'image (e) représente le résultat obtenue en utilisant cette technique de filtrage.

L'obtention de l'information volumique passe par une reconstruction tridimensionnelle à partir d'empilements d'images bidimensionnelles scanner ou I.R.M qui représentent les objets

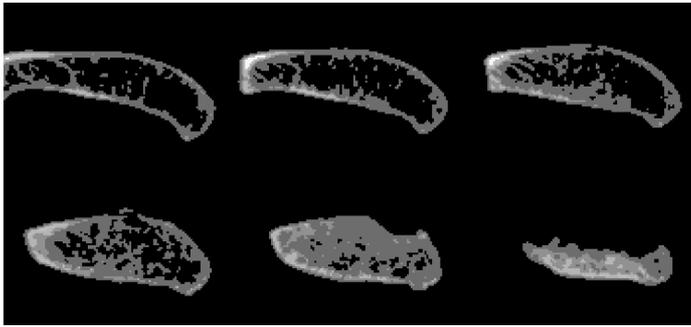


Image (a)

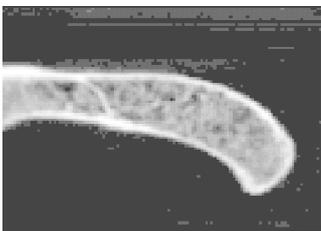


Image (b)

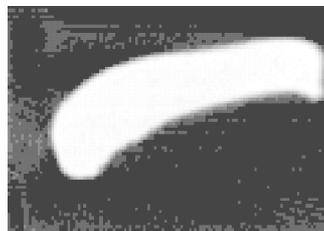


Image (c)

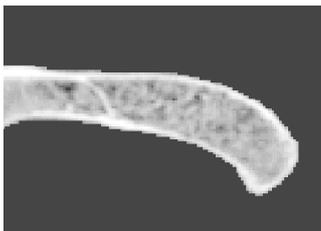


Image (d)

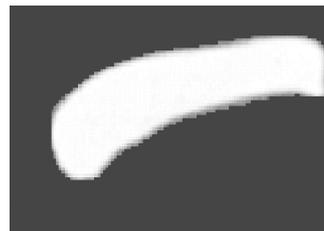


Image (e)



Image (f)



Image (g)



Image (h)



Image (i)

considérés. Cette technique constitue un outil précieux pour le médecin qui verrait alors la structure anatomique en trois dimensions et ne serait plus obligé de créer mentalement le volume d'un organe à partir des projections radiographiques. L'image (f) et l'image (h) montrent un rendu volumique direct de quelques symphyses pubiennes. La source lumineuse est située sur la gauche ou sur la droite et les rayons incidents sont inclinés de 45° par rapport au plan de projection. L'algorithme de visualisation est de type rendu volumique direct [Jacq]. L'image (g) montre le même rendu après application du déplacement composé de la translation de vecteur (1, 3, 2) et de la rotation d'angles d'Euler (15° , 0° , 90°) sur le volume de l'image (f). De même, on applique à l'image (i) une légère déformation non linéaire. Cette déformation est une fonction D qui modifie explicitement l'ensemble des coordonnées des points dans l'espace : $(X_1, X_2, X_3) = D(x_1, x_2, x_3)$ où (x_1, x_2, x_3) représente les points du solide avant déformation et (X_1, X_2, X_3) les points correspondants après déformation. (x_1, x_2, x_3) et (X_1, X_2, X_3) sont exprimés dans le système de coordonnées centré sur l'objet. Dans notre application D a été définie par : $D(x_1 + \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_2, x_3 + \varepsilon_3)$ avec $0 < \varepsilon_i \lll 1$ pour $i = 1, 2, 3$. Il s'agit d'une transformation affine.

3.4. commentaires

Les courbes I_f et I_g de la figure 1 représentent respectivement les descripteurs invariants de l'objet 3D de l'image (f) et de celui de l'image (g). L'écart constaté entre I_f et I_g est dû à la méthode de calcul, plus précisément à la discrétisation de l'image et à la discrétisation incluse dans la transformation de Fourier rapide. Les courbes I_i et $I_{D(i)}$ de la figure 2 représentent respectivement les descripteurs invariants de l'objet de l'image (i) et du même objet après une légère déformation. On constate que ces deux courbes sont presque confondues, ce qui confirme expérimentalement la stabilité de I .

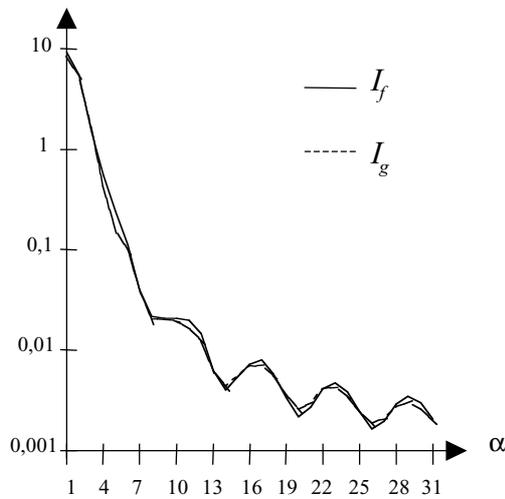


Figure 1. – Invariance par rapport aux déplacements (Echelle logarithmique).

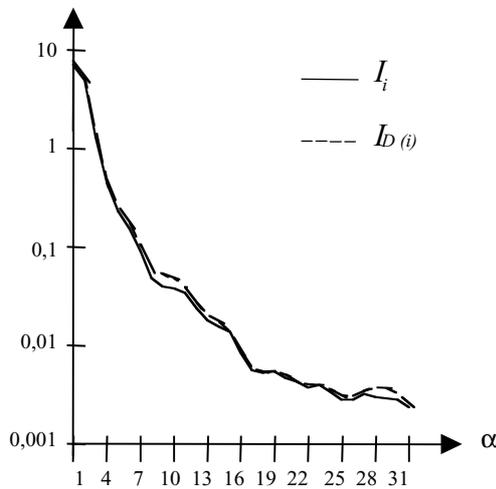


Figure 2. – Stabilité des descripteurs invariants (Echelle logarithmique).

Les courbes I_f et I_i des figures 1 et 2 représentent respectivement les descripteurs invariants des objets symphyse (image f) et colonne vertébrale (image i). On constate que ces descripteurs d'objets de formes différentes sont très différents; autrement dit, I semble avoir de bonnes propriétés de discrimination des formes.

Les courbes I_{f_1} et I_{f_2} de la figure 3 représentent les valeurs des descripteurs invariants calculés sur deux symphyses de même formes (image h) mais de textures différentes. La première courbe I_{f_1} représente les valeurs des descripteurs invariants calculés sur l'image binaire et la deuxième courbe I_{f_2} est obtenue à partir des valeurs des descripteurs invariants calculés sur l'image à niveaux de gris différents. On remarque que ces deux courbes ne sont pas confondues. Cela montre que ces descripteurs invariants tiennent bien compte de la texture de l'objet [Brochard].

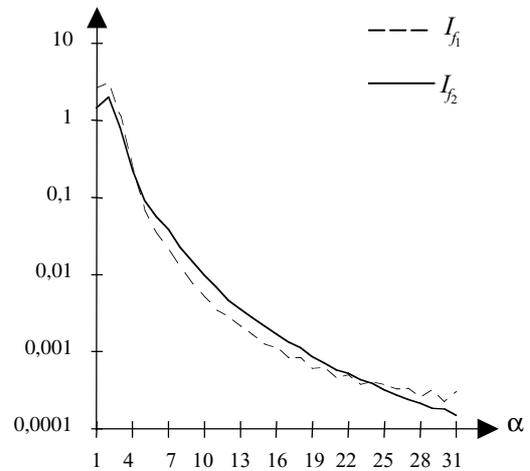


Figure 3. – Discrimination par rapport à la texture (Echelle logarithmique).

Les courbes I_{g_1} , I_{g_2} et I_{g_3} de la figure 4 représentent respectivement les descripteurs invariants de trois symphyses pubiennes d'âge 23 ans, 39 ans et 49 ans. On remarque que ces descripteurs d'objets d'âges différents n'ont pas les mêmes valeurs. Ceci prouve que ces descripteurs pourront s'étendre à classer les symphyses dans une classe d'âge.

Le tableau 1 présente les différents temps de calcul machine obtenus sur une station de travail SUN4. Les invariants des

Tableau 1. – Temps de calcul mis par ces deux familles d'invariants appliquées à l'Image (f).

Machine SUN4	Invariants des moments 3D	Descripteurs invariants
Nombre d'invariants	3	31
Temps de calcul	346.2 s	56.4 s

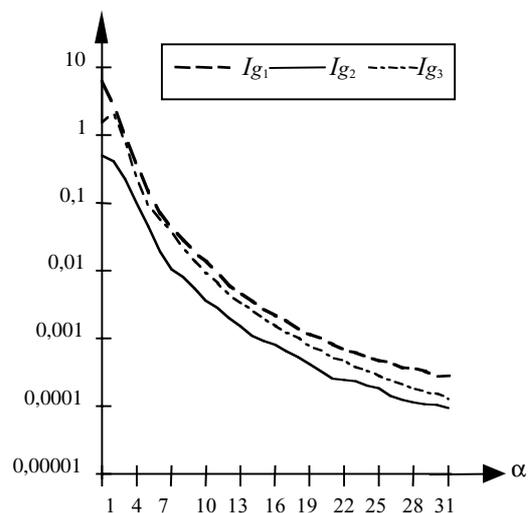


Figure 4. – Discrimination par rapport à l'âge (Echelle logarithmique).

moments 3D et les descripteurs proposés ont été appliqués à l'image (f). On remarque que les descripteurs invariants ont permis d'avoir une amélioration au niveau du temps de calcul par rapport aux invariants des moments.

La figure 5 présente une séquence de superquadriques ([Solina]) de formes variées d'équation :

$$F(x, y, z) = \left(\left(\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}} \right)^{\varepsilon_1}.$$

Le calcul des descripteurs invariants de ces formes permet, d'une part de compresser l'information des volumes et de décrire les formes indépendamment de leur position dans l'espace, d'autre part, de déterminer la distance entre les descripteurs de différentes formes afin de les regrouper suivant les formes les plus proches. La courbe tracée dans la figure 6 représente les différentes valeurs des distances entre la première forme et les

formes suivantes. On remarque qu'à partir de ce graphe, il pourrait y avoir trois groupes d'objets de formes les plus proches pour chaque groupe.

Les trois groupes d'objets sont définies par :

Groupe 1 : les objets 2, 4, 5, 11 ; de paramètres : $a = 16$, $b = 14$, $c = 12$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$.

Groupe 2 : les objets 1, 6, 8, 9 ; de paramètres : $a = 16$, $b = 14$, $c = 12$, $\varepsilon_1 = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$, $\varepsilon_2 = 1$.

Groupe 3 : les objets 3, 7, 10, 12 ; de paramètres : $a = 15$, $b = 13$, $c = 16$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.25, 1.5, 1.75, 2$.

4. conclusion

Dans ce papier, nous avons proposé une méthode de description d'objets 3D à niveaux de gris basée sur la transformation de Fourier. Celle-ci a permis de construire une famille d'invariants stables adaptée au groupe des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions. Ce nouvel outil peut prendre en compte l'information contenue dans la texture de l'objet et ne suppose aucune connaissance préalable sur le type de forme à étudier. Comme cette famille d'invariants n'est pas complète, nous ne pouvons pas envisager la reconstruction des objets à partir de leurs descripteurs invariants. La complexité algorithmique des calculs est certaine, mais en exprimant I_f à l'aide de la transformée de Fourier usuelle \hat{f} de f , nous avons pu utiliser un algorithme de calcul assez rapide.

La suite de notre travail dans un avenir très proche consistera à valoriser cet outil pour d'autres applications (codage d'images tridimensionnelles, indexation de bases de données images,...). Un autre aspect important qui nous préoccupera est celui de la complétude. Cela permettra la reconstruction de l'objet 3D à partir des descripteurs invariants correspondants.

Remerciements : Nous tenons à remercier le Professeur E. Baccino (Faculté de Médecine de Montpellier) ainsi que le Docteur H. HELET (Institut Calot de Berck) pour les données médicales tridimensionnelles qui nous ont permis de tester cette nouvelle famille d'invariants.

RÉFÉRENCES

- [Besancon] J. Besancon, "Vision par ordinateur en deux et trois dimensions", Paris, Eyrolles, 1988.
- [Brochard] J. Brochard, M. Khoudeir and B. Augereau, "Invariant feature extraction for 3D texture analysis using the autocorrelation function", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 22, pp. 759-768, 2001.
- [Burdin] V. Burdin and C. Roux, " Modeling and analysis of 3D elongated Shapes with applications to long bone morphometry", *IEEE Trans. On Medical Imaging*, Vol. 15 N° 1, 1996.
- [Clements] D.T. Clements, D.W. Jacobs, "Model group indexing for recognition", *IEEE PAMI*, Vol. 13, N° 10, pp. 1007-1017, 1991.

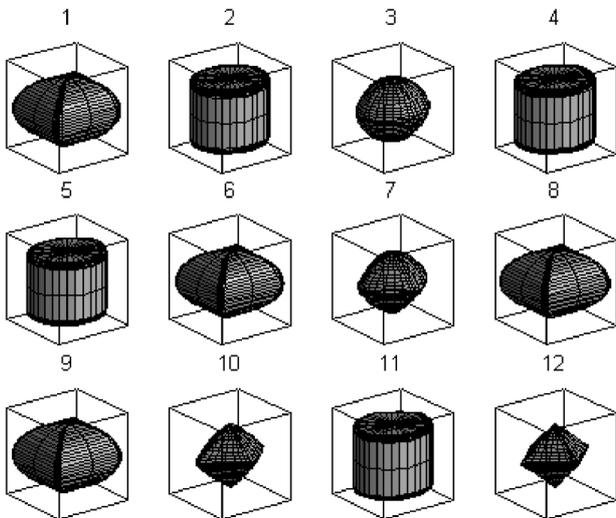


Figure 5. – Séquence de superquadriques de formes différentes.

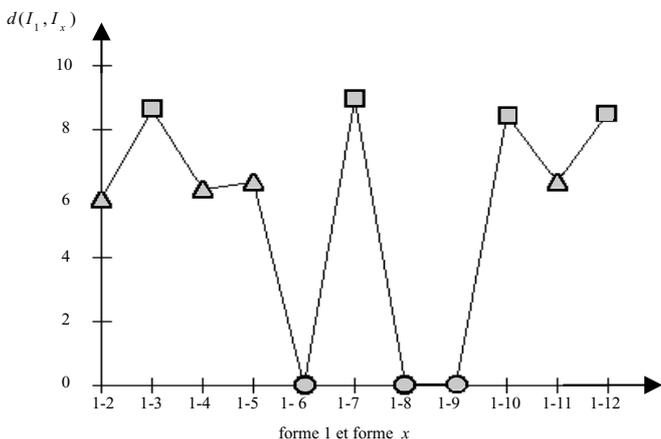


Figure 6. – Variation de la distance entre les descripteurs des différentes formes.

- [Chen] S. Chen, "A new vision system and the Fourier descriptors method by group representations theory", *CDC Conference*, Las Vegas, USA, 1985.
- [Cohen] D. Cohen-Or and A. Kaufman, "Fundamentals of surface voxelization", *Graphical Models and Image Processing*, Vol. 57 N° 6, pp. 453-461, 1995.
- [Crimmins] T. R. Crimmins, "A complete set of Fourier descriptors for two-dimensional shape", *IEEE Trans.*, SMC-121 N° 6, pp. 848-855, 1982.
- [Derrode] Stéphane Derrode, Rim Mezhour et Faouzi Ghorbel, "Comparaison de deux familles complètes de descripteurs de formes pour l'indexation de bases d'objets 2D à niveaux de gris", *Annals of Telecommunications*, Vol. 55, N° 3-4, pp. 184-193, 2000.
- [Flusser] Jean Flusser, "On the independence of rotation moment invariants", *Pattern Recognition* 33, pp. 1405-1410, 2000.
- [Fonga] Hubert Fonga, "Pattern recognition in gray-level images by Fourier analysis", *Pattern Recognition* 17, pp. 1477-1489, 1996.
- [Gado] M. H. Gado, M. E. Phelps and R. E. Colema, "Reconstruction tomography in diagnostic radiology and nuclear medicine", *University Park Press, Baltimore*, 1979.
- [Ghorbel, a] F. Ghorbel, "Towards a unified approach for invariant image description ; Application to image coding", *Special Issue on Image Coding, Annales of Telecommunications* 53(5/6), pp. 242-260, 1998.
- [Ghorbel, b] F. Ghorbel, "Vers une approche mathématique unifiée des aspects géométriques et statistiques de la reconnaissance des formes", *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes I, 1990.
- [Ghorbel, c] F. Ghorbel, "A Complete invariant description for gray-level images by the harmonic analysis approach", *Pattern Recognition Letters*, pp. 1043-1051, 1994.
- [Gourd] F. Gourd, J.-P. Gauthier et H. Younes, "Une méthode d'invariants de l'analyse harmonique en reconnaissance de formes", *Traitement du Signal*, Vol. 6, pp. 161-178, 1989.
- [Grace] A.E. Grace and M. Spann, "A comparison between Fourier-Mellin descriptors and moments based features for invariant object recognition using neural networks", *Pattern Recognition Letters* 12, pp. 635-643, 1991.
- [Gros] P. Gros, O. Bournez and E. Boyer, "Using geometric quasi-invariants to match and model images of line segments", *Rapport de recherche INRIA* numéro 2608, 1995.
- [Hervé] M. Hervé, "Transformation de Fourier et distributions", *PUF*, Paris, 1986.
- [Jacq] J. Jacq, and C. Roux. "A direct multi-volume rendering method aiming at comparisons of 3-D images and models". *IEEE Trans. on Information Technology in Biomedicine*, Vol. 1, N° 1, pp. 30-43, 1997.
- [Lamdan] Y. Lamdan and H.J. Wolfson, "Geometric hashing : a general an efficient model-based recognition scheme", *Proceedings 2nd Int'l Conf. On Computer Vision*, pp. 238-249, 1988.
- [Lamiroy] B. Lamiroy, "Reconnaissance et modélisation d'objets 3D à l'aide d'invariants projectifs et affines", *Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 1998.
- [Malliavin] P. Malliavin et H. Airault, "Intégration, analyse de Fourier probabilités, analyse gaussienne", *Masson*, Paris, 1982.
- [Martin] Y. Martin-Bouyer, S. Verdeille, F. Besse et M. Tonnelier, "Reconstruction tridimensionnelle en scanner", *Innovation et Technologie en Biologie et Médecine*, Vol. 10, N° 5, pp. 201-204, 1989.
- [Matheron] J. Matheron, "Filtres and lattices", *Rapport du centre de Géostatistique et de morphologie mathématique, Ecole des Mines, Fontainebleau*, N° 851, 1983.
- [Matusiak] S. Matusiak, "Description invariante et locale des formes planes, application à l'indexation d'une base d'images", *Thèse de doctorat de l'université de Valenciennes*, 1999.
- [Sadjadi] F. A. Sadjadi et E. L. Hall, "Three dimensional moment invariants", *IEEE Trans.*, Vol. PAMI-2, pp. 127-136, 1980.
- [Schwartz] L. Schwartz, "Analyse hilbertienne", *Hermann*, Paris, 1979.
- [Serra] J. Serra, "Quelques semi-groupes de filtrages morphologiques", *Rapport du centre de Géostatistique et de morphologie mathématique, Ecole des Mines, Fontainebleau*, N° 807, 1983.
- [Sheng] Y. Sheng and C. Lejeune, "Invariant pattern recognition using Fourier-Mellin transforms and neural networks", *J. of Optics*, 22(5), pp. 223-228, 1991.
- [Shu] H.Z. Shu, L.M. Luo, W.X. Yu and Y. Fu, "A new fast method for computing Legendre moments", *Pattern Recognition* 33, pp. 341-348, 1998.
- [Solina] F. Solina and R. Bajcsy, "Recovery of parametric models from range images: The case for superquadrics with global deformations", *IEEE Trans. An. And Mach. Inte.*, Vol. 12, N° 2, pp. 131-147, 1990.
- [You] K. C. You and K. S. Fu, "A Syntactic approach to shape recognition using attributed grammars", *IEEE Trans.*, Vol. SMC-9, pp. 334-345, 1979.
- [Villenkin] N. Ja. Villenkin, "Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes", *Dunod*, Paris, 1969.
- [Yajun] Yajun Li, "Reforming the theory of invariant moments for pattern recognition", *Pattern Recognition*, Vol. 25, No 7, pp. 723-730, 1992.
- [Yang] Luren Yang and Fritz Albrechtsen, "Fast and exact computation of cartesian geometric moments using discrete Green's theorem", *Pattern Recognition*, Vol. 29, No 7, pp. 1061-1073, 1996.
- [Zribi, a] M. Zribi, H. Fonga and F. Ghorbel, "Set of invariant features for three-dimensional gray-level objects by harmonic analysis", *13th ICPR*, Vol. I, pp. 549-553, 1996.
- [Zribi, b] M. Zribi, "Les Fonctions spéciales et les représentations des groupes pour la reconnaissance de formes. Application à l'imagerie médicale", *Thèse de doctorat de l'université de Rennes I*, 1997.

Manuscrit reçu le 31 mai 2001

Une famille d'invariants stables pour l'analyse des objets 3D à niveaux de gris

LES AUTEURS

Mourad ZRIBI



Mourad Zribi a obtenu le titre de docteur de l'Université de Rennes I en 1997 en Traitement du Signal et Télécommunications, au sein du GRIF à l'Ecole Nouvelles d'Ingénieurs en Communication de Lille. Il est maître de conférences à l'Université du Littoral Côte d'Opale depuis 1999 et travaille au Laboratoire d'Analyse des Systèmes du Littoral (UPRS EA 2600) à Calais. Son domaine de recherche concerne la reconnaissance de formes, la fusion

d'informations par l'approche bayésienne et la théorie des croyances de Dempster-Shafer.

Faouzi GHORBEL

Faouzi Ghorbel né à Sfax en Tunisie, titulaire d'une maîtrise de mathématiques, du diplôme d'ingénieur de l'ENST Bretagne, du Doctorat puis de l'Habilitation à Diriger des Recherches en Télécommunications de l'Université de Rennes I, est nommé maître de conférences à l'INT en 1991 (Institut National des Télécommunications) puis professeur à l'Université de Tunis II en 1996. De 1998 à 2001, il est chargé de la direction scientifique du centre de Recherche du Ministère tunisien des Communications. Actuellement et depuis 1997, il dirige le pôle image (GRIFT) du Laboratoire CRISTAL.

Raymond MOCHÉ



Raymond Moché, docteur ès sciences mathématiques, professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, est actuellement en délégation à l'Université Galatasaray d'Istanbul. Ses recherches se situent principalement en statistique des processus.

Alain HILLION



Alain Hillion, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, Docteur ès Sciences Mathématiques, est Professeur et Directeur Scientifique de l'ENST Bretagne. Ses travaux actuels concernent le Traitement et la Modélisation des Images, la Reconnaissance des Formes et la Décision Statistique.

Valérie BURDIN



Valérie Burdin est maître ès sciences mathématiques et docteur en Télécommunications de l'Université de Rennes I. Elle est maître de conférences dans le département Image et Traitement de l'Information de l'ENST Bretagne depuis 1997. Elle effectue ses recherches au LaTIM ERIT-M 102 de l'INSERM dans le domaine de l'imagerie médicale. Elle s'intéresse en particulier à l'analyse de mouvements et à la modélisation morpho-fonctionnelle des articulations. Elle est membre de sociétés savantes comme la SFGMB et IEEE EMBS.