

# Détermination de stratégies de gestion dynamique optimale pour un radar à balayage électronique

## Determination of optimal dynamic management strategies for phased array radars

par E. DUFLOS<sup>a,b</sup>, M. de VILMORIN<sup>a,b</sup>, P. VANHEEGHE<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup> Institut Supérieur d'Électronique du Nord Département Signaux et Systèmes, 41 boulevard VAUBAN 59046 Lille Cedex - FRANCE

<sup>b</sup> LAIL - CNRS UPRESA 8021 École Centrale de Lille - Cité Scientifique - BP 48 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex - FRANCE

### *résumé et mots clés*

Le problème abordé est celui de la gestion dynamique optimale d'un radar à balayage électronique. Notre but est de montrer que la modélisation de la probabilité de détection d'une cible en fonction du temps d'observation de celle-ci, ainsi que l'écriture de critères permettant de quantifier la qualité de détection d'un ensemble de cibles, permet de définir des stratégies de gestion temporelle du capteur. Ces stratégies sont déterminées en environnement monocapteur – monocible et monocapteur – multicible. Nous verrons que les performances de ces stratégies peuvent être déterminées de façon analytique ou numérique. Le problème de la gestion optimale de la fonction de détection d'un capteur n'étant pas spécifique au radar, ce travail s'intègre dans une étude plus large dont le but est de déterminer des stratégies de gestion optimales pour un système multicapteur (radar et infrarouge) en environnement multicible.

Radar, gestion de capteurs, modélisation.

### *abstract and key words*

This work is a contribution to the optimal sensors management problem. The sensors considered in this paper are phased array radars. The authors aim at showing that the modelling of the detection probability of a target with respect to the observation time of that target and the determination of a criterion measuring the quality of the detection in a multitarget environment, allows to derive time managements of the sensor, the performances of which can be analytically or numerically determined. These strategies are derived in a monosensor – monotarget environment and in a monosensor – multitarget environment. The optimal management of the detection function of a sensor being not specific to the radar, this work is a part of a main study which takes aim at determining optimal sensors management for a multisensor system (radar and infrared) in a multitarget environment.

Radar, sensors management, modelling

1. Notons l'importante contribution de M. Michel Prenat et de sa société, Thalès Optronique, aux travaux concernant cet article ainsi qu'à sa rédaction.

## 1. introduction

Les systèmes modernes de détection et de poursuite de cibles utilisent des radars à balayage électronique dont l'une des principales caractéristiques est de pouvoir rediriger leur faisceau d'analyse dans n'importe quelle direction sans aucune inertie ([17], [12]). Ceci permet de passer instantanément (ou presque) d'une phase de détection de nouvelles cibles à une phase de poursuite de cibles déjà détectées. Ces deux fonctions peuvent donc se trouver entrelacées au cours du temps. Par conséquent, il est particulièrement intéressant, en vue d'optimiser les performances de détection, de localisation et d'identification du radar, de choisir de façon adaptative le temps alloué à chaque phase de détection et à chaque phase de poursuite. L'optimisation conduisant au temps à allouer peut alors se faire suivant des critères liés au contexte opérationnel du système de détection comme l'importance donnée à chaque cible, la qualité de la piste suivie, la proximité entre pistes ou encore l'information *a priori* dont on dispose sur les cibles présentes dans le volume que l'on cherche à analyser. La référence [3] traite de ce problème et fournit des éléments de synthèse ainsi qu'une bibliographie importante sur le sujet. En supposant que cette optimisation est réalisée, on dispose d'un temps  $T$  connu pour détecter de nouvelles cibles dans l'espace total à observer. Si cet espace est important,  $T$  peut être égal à la somme des durées de plusieurs phases de détection et sa valeur maximale soumise à des contraintes opérationnelles. Nous supposons dans cet article que les contraintes sont connues et que donc, le temps  $T$  est, lui aussi, connu. On cherche alors à utiliser ce temps de façon à optimiser le nombre de nouvelles détections : c'est le but des travaux présentés dans cet article.

On trouve dans [3] une synthèse des travaux les plus récents dans ce domaine. Ces travaux se fondent principalement sur une procédure de détection d'une cible en deux phases ([6], [4], [10]). Durant la première phase, appelée phase d'alerte, une statistique de détection à seuil est utilisée. Le seuil est choisi bas, ce qui a pour conséquence de produire un nombre non négligeable de fausses alarmes en plus des vraies détections. Durant la seconde phase, dite de confirmation, la valeur du seuil est augmentée de façon à éliminer les fausses alarmes. Durant cette phase, on peut également modifier la forme de l'onde émise par le radar afin de l'adapter à la cible. Lors de ces deux phases, un des paramètres qui peut avoir de l'importance est l'espacement entre deux faisceaux d'analyse : diminuer cet espacement permet de diminuer le nombre de cibles qui ne sont pas détectées parce qu'elles sont situées entre deux faisceaux adjacents. En revanche, le temps d'analyse d'un volume s'en trouve nécessairement allongé, ce qui peut être gênant si le temps total alloué à l'analyse du volume est fixé. Les références [1], [2] et [10] discutent, entre autre, d'un choix optimal pour ce paramètre. On trouve alors dans [3] une étude qui se fonde sur les résultats de la

référence [2] et qui évalue le temps entre deux intervalles de temps alloués à la détection lorsque la proportion de temps allouée à la poursuite est fixée.

Comme on le voit, toutes ces études portent sur les moyens à mettre en œuvre afin d'optimiser la détection d'une cible unique pendant le temps alloué à la détection et ce, bien que l'environnement soit la plupart du temps multicible. C'est pourquoi nous nous proposons, dans cet article, d'étudier l'optimisation de la procédure de détection de plusieurs cibles prises dans leur globalité et non plus une à une. Ce type de situation peut, par exemple, survenir lorsque le radar fait partie d'un ensemble de détection comprenant un système d'écoute radar de type ESM (Electrical Support Measurement) ou de type AEW (Airborne Early Warning). La position angulaire des cibles peut alors être estimée (ESM et AEW) ainsi que leur distance (AEW). Dans les deux cas, la précision de l'estimation n'est généralement pas très bonne. On peut alors chercher à redétecter ces cibles à l'aide du radar afin d'obtenir des informations complémentaires sur leurs positions, leurs vitesses radiales ... En définitive, nous nous posons le problème suivant : sachant qu'on connaît la position angulaire de  $N$  cibles que l'on cherche à détecter avec un radar à balayage électronique et qu'on dispose, pour effectuer ces détections, d'un temps  $T$  fixé et connu, quel temps le radar doit-il passer dans chacune des directions définissant les cibles afin d'optimiser la détection de l'ensemble des cibles ?

Le but de cet article est alors de montrer comment la modélisation, en fonction du temps d'observation, de la fonction élémentaire de détection du radar permet d'élaborer des stratégies de gestion temporelle du radar dont on est capable de déterminer les performances de façon analytique ou numérique. Nous verrons que les stratégies de gestion pourront être monocibles et multicibles et que l'optimisation de la stratégie en environnement monocible permettra la détermination de stratégies optimales en environnement multicible. Dans cette optique, la première partie de cet article se place dans un environnement monocapteur et monocible comme cela est fait dans la plupart des études d'optimisation de l'opération de détection : nous verrons comment modéliser la probabilité de détection élémentaire du radar. Pour cela, nous supposons une procédure de détection un peu plus simple que la procédure d'alerte et de confirmation. En effet, la modélisation analytique de la probabilité de détection de la phase de confirmation est particulièrement délicate ([3]) et nécessite à l'heure actuelle des travaux complémentaires. De même, nous avons introduit deux simplifications supplémentaires. Tout d'abord, en supposant la position angulaire des cibles connue, nous nous affranchissons de l'étude de l'espacement optimal entre deux faisceaux d'analyse. Ensuite, nous supposons que la scène se situe dans un espace à deux dimensions. Ceci ne restreint pas l'étude qui peut être étendue à trois dimensions. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces premiers résultats pour déterminer de façon analytique une répartition temporelle optimale du temps à passer sur chaque cible lorsque non seulement les positions angulaires mais également

les distances des cibles sont connues. Cette détermination nécessitera le choix d'un critère définissant l'optimalité. Enfin, dans la dernière partie nous adapterons la répartition temporelle déterminée dans la deuxième partie au cas où les distances ne sont pas connues. Ces travaux complètent et démontrent de façon rigoureuse les premiers résultats exposés dans [9].

## 2. modélisation des probabilités de détection élémentaires

### 2.1. introduction

La détermination de stratégies de gestion optimale des capteurs nécessite la compréhension de leurs caractéristiques. C'est pourquoi une phase de modélisation des probabilités de détection a été réalisée. Le but de cette modélisation est d'aider à déterminer :

1. comment on peut utiliser chaque capteur de façon optimale pour une opération de détection d'une seule cible,
2. une coordination optimale des déplacements angulaires des deux capteurs.

### 2.2. la modélisation

Le radar considéré dans cet article est un radar à balayage électronique : son axe mécanique est fixe et on commande l'angle d'émission de l'onde analysante. Ce type de radar est bien connu. L'expression de la probabilité de détection d'une cible l'est également si on considère que le signal parasite, qu'on suppose être uniquement dû au bruit thermique du radar, est modélisé par une variable aléatoire normale. Nous supposons dans tout ce qui suit que nous nous plaçons dans ce contexte et nous supposons de plus que l'intégration est cohérente et que la cible est fluctuante (voir l'annexe B pour la signification de ce dernier terme). Si ce radar observe pendant un temps  $T$  une cible à la distance  $d$  dans une direction qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe mécanique de l'antenne, alors le rapport signal sur bruit  $\rho$  d'un écho est égal à ([7]):

$$\rho = \alpha T \frac{\cos(\theta)^2}{d^4}, \quad (1)$$

avec  $\alpha$  une constante qui dépend des caractéristiques du radar et de la cible comme sa surface équivalente radar par exemple.

Dans tout cet article, nous supposons que les cibles à détecter ont toutes le même pouvoir de réflexion :  $\alpha$  sera donc constant. Un calcul plus détaillé permettant d'obtenir la formule (1) est proposé dans l'Annexe A. Pour conduire ce calcul et établir cette formule, nous avons fait l'hypothèse simplificatrice suivante : la cible étant dans une direction qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe mécanique de l'antenne, on suppose que le faisceau de celle-ci est orienté électroniquement de façon à ce que son axe intercepte exactement la cible. Le gain de l'antenne dans la direction de la cible est alors égal à son gain maximal, c'est-à-dire le gain qu'elle aurait si le faisceau n'était pas dépointé, multiplié par  $\cos(\theta)$ . Ceci est dû au fait que la surface apparente de l'antenne dans cette direction est multipliée par  $\cos(\theta)$  également. La valeur du gain maximal est intégrée dans le coefficient  $\alpha$  comme on peut le voir dans le calcul de l'Annexe A. Dans le cadre de cette étude, nous n'avons pas modélisé plus finement les effets d'espacement entre les faisceaux qui ont été étudiés en détail dans la référence [2].

Pour une cible de type *Swerling 1* ([15], [19], [12]), la probabilité de détection  $P_d$  est égale à ([3]) :

$$P_d = P_{fa}^{\frac{1}{1+\rho}}, \quad (2)$$

avec  $P_{fa}$  la probabilité de fausse alarme. Étant donnée l'importance de cette dernière égalité pour la suite, nous en donnons des éléments de démonstration dans l'annexe B. Ces éléments proviennent principalement des références [3] et [19].

### 2.3. calibration du radar

La constante  $\alpha$  dépend des caractéristiques du radar et de la cible. Pour illustrer les résultats théoriques qui suivent, nous supposons que la constante  $\alpha$  est telle que le rapport signal sur bruit d'une cible située à 50 km dans l'axe mécanique du radar (dépointage nul soit  $\theta = 0$ ) et observée pendant 5 ms, est égal à 15 dB.  $\alpha$  est alors égal à  $4 \cdot 10^{22}$ .

Nous avons également choisi d'effectuer le calibrage de la probabilité de fausse alarme pour un objet situé au maximum à 50 km. Pour cela, nous supposons que le radar, qui effectue des mesures de la distance et de la vitesse radiale d'une cible, possède une résolution de 50 m en distance. Donc, pour un objet situé à 50 km le radar possède 1 000 cellules de résolution en position. Si on suppose que le radar possède également 1 000 cellules de résolution en vitesse, il forme durant son analyse d'une direction  $10^6$  cellules de résolution. Si l'analyse d'une direction dure 10 ms, alors le radar teste la détection dans  $10^8$  cellules par seconde. Pour obtenir, par exemple, une fausse alarme par seconde, il faut donc une probabilité de fausse alarme par cellule égale à  $10^{-8}$ .

### 3. optimisation de la probabilité de détection d'une cible

Si on utilise les formules précédentes, on remarque que pour des temps d'intégration usuels, la probabilité de détection décroît fortement avec la distance. Un premier moyen de l'augmenter, consiste à utiliser la procédure de détection de type « alerte et confirmation » qui a été décrite dans l'introduction. Un second moyen consiste à augmenter  $T$  ce qui conduit à deux problèmes :

1. pour les fortes probabilités de détection, la pente  $\frac{dP_d}{dT}$  est faible,
2. l'utilisation d'un temps  $T$  long peut être difficile parce que la cible est intrinsèquement non stationnaire.

Une troisième possibilité pour accroître cette probabilité de détection est d'utiliser le capteur d'une autre façon. Au lieu d'effectuer pendant le temps disponible  $T$  une seule acquisition de signal donc d'effectuer une seule détection, il est possible d'acquérir  $N$  signaux élémentaires. Deux stratégies sont alors possibles. On peut faire la sommation des  $N$  signaux reçus par le radar, c'est-à-dire les puissances reçues, et effectuer une opération de détection sur le signal somme : on fait de la post-intégration. Cette méthode peut poser des problèmes si la cible change de cellule de résolution. Il faut alors faire la somme des signaux dans les différentes cellules où est passée la cible. Une autre stratégie consiste à effectuer une détection élémentaire sur chaque signal reçu donc d'effectuer  $N$  détections élémentaires ([12]) indépendantes dont la probabilité de détection élémentaire  $P_{de}$  est donnée par l'équation (2). Un moyen connu pour obtenir des probabilités de détection élémentaires indépendantes est que le radar émette avec une fréquence différente lors de chaque détection élémentaire ([8]). C'est cette stratégie que nous retiendrons pour la suite de nos travaux. Les détections élémentaires étant indépendantes, la probabilité de ne pas détecter la cible après les  $N$  détections, est égale à :

$$(1 - P_{de})^N. \quad (3)$$

La probabilité de détection cumulée, c'est-à-dire la probabilité de détecter la cible après les  $N$  détections, est donc égale à :

$$P_d = 1 - (1 - P_{de})^N. \quad (4)$$

Si on prend en compte le modèle (2) de la probabilité de détection élémentaire, il est alors possible de définir une stratégie optimale de détection d'une cible dont on peut évaluer les performances de façon analytique.

LEMME 1 : On appelle  $\gamma_r = \ln \frac{1}{2}$  la solution de l'équation :

$$\frac{\gamma_r \exp(\gamma_r)}{1 - \exp(\gamma_r)} - \ln(1 - \exp(\gamma_r)) = 0. \quad (5)$$

Si on réalise, pendant un temps  $T$  fixé,  $N$  détections élémentaires indépendantes sur une cible située à la distance  $d$  du radar, si chaque détection élémentaire dure  $\frac{T}{N}$  et si la cible est telle que son rapport signal sur bruit est grand devant un, alors la probabilité de détection est maximale lorsque :

$$N = N_{opt} = \frac{\gamma_r \alpha T (\cos(\theta))^2}{d^4 \ln(P_{fa})}. \quad (6)$$

Pour cette valeur optimale, la probabilité de détection élémentaire est égale à 0.5 et la probabilité de détection totale est égale à :

$$P_d = 1 - \exp\left(\frac{-T}{\tau_R}\right) \quad (7)$$

avec

$$\tau_R = -\frac{d^4 \ln(P_{fa})}{\gamma_r \alpha (\cos(\theta))^2 \ln(1 - \exp(\gamma_r))}. \quad (8)$$

PREUVE :

Si on suppose que le rapport signal sur bruit est grand devant un alors, en utilisant l'expression (2), on peut approcher la probabilité de détection élémentaire par :

$$P_{de} = P_{fa}^{\frac{1}{2}} = P_{fa}^{\frac{Nd^4}{\alpha T (\cos(\theta))^2}}. \quad (9)$$

D'après (4), la probabilité de détection est alors égale à :

$$P_d = 1 - \exp(N \ln(1 - \exp(uN))) \quad (10)$$

avec

$$u = \frac{d^4 \ln(P_{fa})}{\alpha T (\cos(\theta))^2}. \quad (11)$$

Nous recherchons le nombre  $N$  de cycles qui maximise cette probabilité de détection. On dérive (10) par rapport à  $N$  :

$$\frac{dP_d}{dN} = \left( \frac{Nu \exp(uN)}{1 - \exp(uN)} - \ln(1 - \exp(uN)) \right) \exp(N \ln(1 - \exp(uN))). \quad (12)$$

Le maximum de  $P_d$  est obtenu en résolvant  $\frac{dP_d}{dN} = 0$ . On pose pour cela  $\gamma_r = uN$ . La solution de  $\frac{dP_d}{dN} = 0$  est directement obtenue en résolvant l'équation (5) issue du changement de variable linéaire en  $N$ . Par conséquent, la subdivision optimale  $N_{opt}$  du temps  $T$  est donnée par :

$$N_{opt} = \frac{\gamma_r}{u} \quad (13)$$

soit donc au nombre de cycles donné par l'expression (6). En introduisant cette valeur de  $N_{opt}$  dans l'expression (10) de la probabilité de détection, on obtient l'expression (7). De même, en introduisant cette valeur de  $N_{opt}$  dans l'expression (9) de la probabilité de détection élémentaire approchée, on trouve que cette dernière est égale à  $P_{de} = \exp\gamma_r = 0.5$ . ■

Les résultats exprimés dans le lemme qui précède montrent d'une part que la modélisation des fonctions élémentaires de détection permet de définir analytiquement des stratégies pour optimiser les performances de détection d'une cible et que d'autre part, il est possible de quantifier ces performances.

Remarque : le nombre de cycles défini par (13) n'est bien sûr pas entier dans le cas général. Dans un cadre applicatif, il faudrait choisir ce nombre égal à la partie entière de  $N_{opt}$  plus un. Nous garderons néanmoins la valeur de  $N_{opt}$  dans la suite pour deux raisons. Tout d'abord parce qu'elle permet de calculer les performances optimales qui, nous en sommes conscients, peuvent ne pas être atteignables (tout comme la borne de Cramer-Rao en théorie de l'estimation). Ensuite, garder cette valeur n'enlève rien à la généralité de ce qui suit. On pourrait tout aussi bien reprendre les mêmes résultats en remplaçant  $N_{opt}$  par sa valeur entière opérationnelle correspondante.

Nous venons de définir une méthode de détection optimale d'une cible par le radar. Nous allons voir dans ce qui suit comment il est possible d'utiliser ce premier résultat lorsque le radar est confronté à un environnement multicible. Puisque nous recherchons une gestion optimale du temps, nous allons dans le paragraphe 4 déterminer un critère qui définira l'optimalité.

## 4. répartition optimale du temps en environnement monocapteur pour une scène donnée

### 4.1. définition d'un critère

Nous nous plaçons dans le cadre d'une scène dont on sait qu'elle comporte  $p$  objets dont le dépointage  $\theta_i$  et la distance  $d_i$

( $i \in \{1, \dots, p\}$ ) sont connus. On cherche à détecter ces objets avec le radar. Celui-ci dispose pour cela d'un temps  $T$  fixé. Si on appelle  $t_i$  le temps que le capteur va passer sur la cible  $i$  on a :

$$\sum_{i=1}^p t_i = T, \quad (14)$$

avec :

$$t_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (15)$$

Conformément à ce qui a été vu au paragraphe précédent, on optimise la détection pendant chaque temps  $t_i$  en mettant en place une stratégie de découpage optimal du temps en  $n_i$  sous-intervalles. Par conséquent, la probabilité de détection de chaque cible  $i$  par le radar est donnée par le lemme 1 et est égale à :

$$P_{di}(t_i) = 1 - \exp\left(-\frac{t_i}{\tau_{Ri}}\right) \quad (16)$$

avec  $\tau_{Ri} = -\frac{d_i^4 \ln(P_{fa})}{\gamma_r \alpha(\cos(\theta_i))^2 \ln(1 - \exp(\gamma_r))}$ .

Chaque probabilité étant positive, si on veut toutes les maximiser il suffit de maximiser le critère :

$$J = \sum_{i=1}^P P_{di}(t_i). \quad (17)$$

Cette forme de critère donne le même poids à la détection de toutes les cibles. On peut le généraliser en introduisant des poids différents  $\varepsilon_i$  à chaque probabilité  $P_{di}(t_i)$ . Ceci signifie que la détection de certaines cibles peut être plus importante que celle d'autres cibles. Le critère  $J$  à optimiser devient alors :

$$J = \sum_{i=1}^P \varepsilon_i P_{di}(t_i). \quad (18)$$

Étant donnée l'expression (16) des probabilités de détection  $P_{di}(t_i)$ , ce critère atteindra son maximum lorsque les temps  $t_i$  tendront vers l'infini ; ce qui corrobore la remarque faite dans l'introduction. On va donc chercher à optimiser ce critère sous la contrainte égalité (14) et sous les  $p$  contraintes inégalités (15). Dans le but de formaliser ce problème d'optimisation, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_p]^T, \quad (19)$$

$$f(\mathbf{t}) = -\sum_{i=1}^P \varepsilon_i P_{di}(t_i), \quad (20)$$

$$h(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^p t_i - T, \quad (21)$$

$$g_i(\mathbf{t}) = t_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (22)$$

Avec ces notations, la maximisation sous contraintes de la fonction  $J$  revient à minimiser sous les mêmes contraintes la fonction  $f(\mathbf{t})$  définie sur  $\mathfrak{R}^p$ . Les  $p$  contraintes  $g_i(\mathbf{t}) \geq 0$  nous amènent à rechercher un minimum sur  $\mathfrak{R}^{p+}$ . Le Lagrangien associé à l'optimisation de la fonction  $f(\mathbf{t})$  s'écrit alors :

$$\mathcal{L}(\mathbf{t}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{t}) + \lambda h(\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(\mathbf{t}), \quad (23)$$

avec  $\lambda$  et :

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_p]^T, \quad (24)$$

les multiplicateurs de Lagrange-Karush-Kuhn-Tucker (Lagrange-KKT) ([11]). Nous allons maintenant réaliser la minimisation de la fonction  $f(\mathbf{t})$  qui va nous permettre de déterminer une répartition du temps à passer sur chaque cible.

## 4.2. optimisation du critère

LEMME 2 : Soit la fonction  $\lfloor x \rfloor^+$  définie sur  $\mathfrak{R}$  par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor^+ = x & \text{si } x > 0 \\ \lfloor x \rfloor^+ = 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad (25)$$

et  $\underline{\lambda}$  l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^p \frac{\tau_{Ri}}{T} \left[ \ln \left( \frac{\varepsilon_i T}{\tau_{Ri} \lambda} \right) \right]^+ - 1 = 0. \quad (26)$$

On appelle  $\mathcal{I}$  l'ensemble défini par :

$$\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \underline{\lambda} < \frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri}}\}. \quad (27)$$

La répartition optimale  $\{t_1, \dots, t_p\}$  qui optimise le Lagrangien (23) avec les probabilités de détection  $P_{di}(t_i)$  définies par (16) est égale à :

$$\begin{cases} t_i = \tau_{Ri} \ln \left( \frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri} \underline{\lambda}} \right) & \text{si } i \in \mathcal{I} \\ t_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (28)$$

Le nombre optimal  $n_i$  de détections élémentaires à réaliser dans chaque intervalle de temps  $t_i$  non nul est alors égal à :

$$n_i = \frac{\gamma_r \alpha t_i (\cos(\theta_i))^2}{d_i^4 \ln(P_{fa})}. \quad (29)$$

PREUVE :

La démonstration de la répartition temporelle (28) est détaillée dans l'Annexe C.

Le temps à passer sur chaque cible étant maintenant connu, le nombre optimal de détections élémentaires à effectuer est donné par (6) en remplaçant  $T$  par  $t_i$ . ■

Remarque : l'étude précédente du cas monocible-monocapteur a permis d'obtenir des probabilités de détection convexes qui ont rendu plus aisée la résolution du problème d'optimisation.

Le lemme 2 permet d'obtenir la répartition temporelle optimale à partir de  $\underline{\lambda}$  qui est l'unique solution de l'équation (26). Nous ne connaissons pas la solution analytique de cette équation et nous ne pouvons donc pas trouver, dans le cas général, d'expression analytique plus simple pour la répartition (28). Il existe néanmoins un cas où il est possible de déterminer analytiquement  $\underline{\lambda}$ . Ce cas apparaît lorsque  $\text{Card } P_{\mathcal{I}}(T) = p$ .

LEMME 3 : Si  $\text{Card } P_{\mathcal{I}}(T) = p$  alors la répartition temporelle (28) s'écrit :

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^p \tau_{Rj} \ln \left( \frac{\varepsilon_i \tau_{Rj}}{\varepsilon_j \tau_{Ri}} \right) - T}{\sum_{j=1}^p \left( \frac{\tau_{Rj}}{\tau_{Ri}} \right)} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (30)$$

Une condition suffisante pour que la répartition temporelle optimale soit donnée par (30) est qu'il existe  $\lambda_0 > \underline{\lambda}$  tel que :

$$\lambda_0 < \frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (31)$$

PREUVE :

D'après le lemme 2, si  $\text{Card } P_{\mathcal{I}}(T) = p$  alors  $\underline{\lambda}$  est l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{i=1}^p \frac{\tau_{Ri}}{T} \ln \left( \frac{\varepsilon_i T}{\tau_{Ri} \lambda} \right) - 1 = 0, \quad (32)$$

c'est-à-dire que  $\underline{\lambda}$  est égal à :

$$\underline{\lambda} = \exp \left( \frac{\sum_{j=1}^p \tau_{Rj} \ln \left( \frac{\varepsilon_j T}{\tau_{Rj}} \right) - T}{\sum_{j=1}^p \tau_{Rj}} \right). \quad (33)$$

Si  $\text{Card } P_{\mathcal{I}}(T) = p$ , alors il existe un temps d'observation  $t_i$  non nul pour chaque cible. Ce temps est défini par les  $p$  égalités (28) dans lesquelles on remplace  $\underline{\lambda}$  par son expression (33). On obtient alors l'expression (30).

Si maintenant il existe  $\lambda_0 > \underline{\lambda}$  tel que les  $p$  inégalités (31) soient vérifiées, alors on a aussi :

$$\lambda_0 < \frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}. \quad (34)$$

D'après la définition (27) de l'ensemble  $\mathcal{I}$  on a bien  $\text{Card } P_{\mathcal{I}}(T) = p$ . ■



et  $D = \{d_1, \dots, d_{p_{\mathcal{I}}(T)}\}$  l'ensemble de toutes les distances indiquées dans  $\mathcal{C}$  par  $r$ ,  $P_{p,j}$  l'ensemble de toutes les combinaisons de  $j$  éléments dans l'ensemble  $D$  de  $p_{\mathcal{I}}(T)$  éléments,  $c_{p,j}(k)$  la  $k^{\text{ième}}$  combinaison de  $P_{p,j}$ ,  $d_{p,j,k}(l)$  le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $c_{p,j}(k)$ ,  $\overline{c_{p,j}}(k)$  l'ensemble complémentaire de  $c_{p,j}(k)$  dans  $D$  et  $\overline{d_{p,j,k}}(l)$  le  $l^{\text{ième}}$  élément de  $\overline{c_{p,j}}(k)$ . Si on suppose que pour déterminer les temps  $t_i$  à passer sur chaque cible, celles-ci sont toutes situées à la même distance  $d_{ref}$ , alors le temps  $T$  permet de satisfaire la contrainte « pendant le temps  $T$  la probabilité qu'au moins  $x$  % des cibles aient été détectées est supérieure à  $p_0$  » si et seulement si :

$$p_{\mathcal{I}}(T) \geq p_x \quad (41)$$

et

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)-1} \left( \sum_{k=1}^j \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), d_{ref}, T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, d_{ref}, T) - p_0 \geq 0 \quad (42)$$

avec  $p_x$  le plus petit entier tel que  $\frac{p_x}{p} > \frac{x}{100}$  et avec  $P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T)$ ,  $P_d(\overline{d_{p,j,k}}(l), d_{ref}, T)$  et  $P_d(d_l, d_{ref}, T)$  définies par (35).

PREUVE :

Si on veut détecter au moins  $x$  % des cibles dans un ensemble de  $p$  cibles, il faut nécessairement avoir passé un temps non nul sur plus de  $p_x$  cibles. La condition (41) doit donc nécessairement être satisfaite. On suppose que c'est le cas. Si on veut détecter au moins  $x$  % des cibles dans l'ensemble initial de  $p$  cibles, il faut nécessairement détecter un nombre de cibles  $j$  qui appartient à l'ensemble  $\{p_x, p_x + 1, \dots, p_{\mathcal{I}}(T)\}$ . Pour chaque  $j$  il y a  $Card(P_{p,j}) = \binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}$  possibilités de détection. Pour chaque possibilité, les cibles détectées sont celles dont la distance appartient à  $c_{p,j}(k)$  ( $k \in \{1, \dots, \binom{p_{\mathcal{I}}(T)}{j}\}$ ) et les cibles non détectées celles dont la distance appartient à  $\overline{c_{p,j}}(k)$ . Compte tenu du résultat énoncé dans le lemme 4, et compte tenu que tous ces événements sont indépendants, la probabilité de détecter exactement  $j$  cibles est égale à (lorsque  $j < p_{\mathcal{I}}(T)$ ) :

$$\sum_{k=1}^j \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), d_{ref}, T)) \right], \quad (43)$$

avec  $P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T)$ ,  $P_d(\overline{d_{p,j,k}}(l), d_{ref}, T)$  et  $P_d(d_l, d_{ref}, T)$  définies par (35). Par conséquent, la probabilité de détecter plus de  $x$  % des cibles pendant le temps  $T$  est égale à :

$$\sum_{j=p_x}^{p_{\mathcal{I}}(T)} \left( \sum_{k=1}^j \left[ \prod_{l=1}^j P_d(d_{p,j,k}(l), d_{ref}, T) \prod_{n=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)-j} (1 - P_d(\overline{d_{p,j,k}}(n), d_{ref}, T)) \right] \right) + \prod_{l=1}^{p_{\mathcal{I}}(T)} P_d(d_l, d_{ref}, T), \quad (44)$$

le dernier terme correspondant à la détection de 100 % des cibles sur lesquelles on passe du temps. Par conséquent, si le temps  $T$  vérifie la contrainte « pendant le temps  $T$  la probabilité qu'au moins  $x$  % des cibles aient été détectées est supérieure à  $p_0$  » alors on a nécessairement (44) qui doit être supérieur à  $p_0$ . L'inégalité (42) doit donc bien être vérifiée.

Inversement, si (41) est vérifiée, alors on peut calculer pour un  $T$  donné la probabilité (44) qui représente la probabilité qu'au moins  $x$  % des cibles aient été détectées. Si cette probabilité est supérieure à  $p_0$  alors le temps  $T$  vérifie bien la contrainte. ■

Le résultat exprimé dans ce théorème est intéressant car, pour une configuration donnée de cibles, il permet de connaître si le temps d'observation que l'on s'octroie d'un point de vue opérationnel permet de satisfaire la contrainte. Il est même possible de trouver le temps minimum  $T_{min}$  qui permet de satisfaire la contrainte puisqu'il est immédiat, d'après le théorème 1, que  $T_{min}$  est le plus petit temps qui permet de satisfaire les deux inégalités (41) et (42). Nous allons illustrer ces propos dans le paragraphe qui suit par quelques simulations.

## 4.4. étude par simulations

### 4.4.1. description des simulations

Pour illustrer les résultats qui précèdent, nous les avons mis en œuvre sur un système de dix cibles situées à des distances différentes. Pour ces simulations, nous avons pris  $x$  % = 80 % et  $p_0 = 0.9$ . Plusieurs scénarios ont été traités afin de tester la sensibilité de la stratégie en fonction de  $d_{ref}$ . Les paramètres de calibration des capteurs sont ceux déterminés au paragraphe 2.3. Nous présentons dans la suite quatre scénarios décrits dans les tableaux 1, 2, 3 et 4. Les pondérations  $\varepsilon_i$  des cibles sont toutes choisies égales à l'unité quel que soit le scénario.

Tableau 1. – Description du scénario 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ en km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\theta_i$ en degré	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 2. – Description du scénario 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ en km	10	15	17	20	21	22	23	24	25	50
$\theta_i$ en degré	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 3. – Description du scénario 3

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ en km	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\theta_i$ en degré	-25	-20	-15	-5	0	10	20	30	40	50

Tableau 4. – Description du scénario 4

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_i$ en km	10	15	17	20	21	22	23	24	25	50
$\theta_i$ en degré	-25	-20	-15	-5	0	10	20	30	40	50

#### 4.4.2. simulations

Compte tenu de la calibration du capteur, les probabilités de détection (35) s'écrivent :

$$\begin{cases} P_{di}(d_i, d_{ref}, T) = 1 - \exp\left(\frac{1.37 \cdot 10^{21} t_i(d_{ref}, T) (\cos(\theta_i))^2}{d_{ref}^4} \ln\left(1 - \exp\left(-0.69\left(\frac{d_i}{d_{ref}}\right)^4\right)\right)\right) & \text{si } i \in \mathcal{I} \\ P_{di}(d_i, d_{ref}, T) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (45)$$

avec :

$$t_i(d_{ref}, T) = \tau_{Ri}(d_{ref}) \ln\left(\frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri}(d_{ref}) \underline{\lambda}(T, d_{ref})}\right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \quad (46)$$

et :

$$\tau_{Ri}(d_{ref}) = \frac{9.67 \cdot 10^{-22} d_{ref}^4}{(\cos(\theta_i))^2} \quad (47)$$

Le calcul de ces probabilités nécessite le calcul de  $\underline{\lambda}$ . Cette unique racine de l'équation (26) est obtenue numériquement pour chaque  $T$  et chaque  $d_{ref}$  testés. Elle permet également de connaître de façon explicite l'ensemble  $\mathcal{I}$  ainsi que son cardinal et l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Pour le scénario 4, la figure 1 représente, en fonction de  $\mathcal{I}$ , l'évolution de la probabilité de détecter plus de 80 % des cibles lorsque  $d_{ref} = 20$  km. Nous ne présentons pas cette probabilité pour les autres scénarios car l'allure est la même. Cette probabilité étant une fonction croissante du temps, on voit bien qu'il est possible de déterminer le temps  $T_{min}$ . Il suffit de regarder pour quel  $T$  la probabilité est égale à  $p_0 = 0.9$ . On trouve pour ce scénario, et pour cette valeur de  $d_{ref}$ ,  $T_{min} = 0.0095$ . Il est également intéressant d'analyser l'évolution du nombre de cibles sur lesquelles on passe un temps non nul. La figure 2 représente cette évolution en fonction du temps d'observation pour la même valeur de  $d_{ref}$  que précédemment. On y voit clairement que pour des temps  $T$  trop faibles, il n'est pas possible d'observer toutes les cibles puisqu'en début de simulation on n'observe que six cibles. On passe progressivement à dix cibles lorsque  $T$  augmente. Si on s'intéresse aux cibles qui ne sont pas observées, on remarque que ce sont les plus lointaines, ce qui semble normal puisque ce sont celles qui ont la probabilité la plus faible d'être détectées. Comme nous n'avons pas introduit de pondérations différentes pour les cibles, c'est le critère de distance qui agit directement sur l'optimisation du critère.

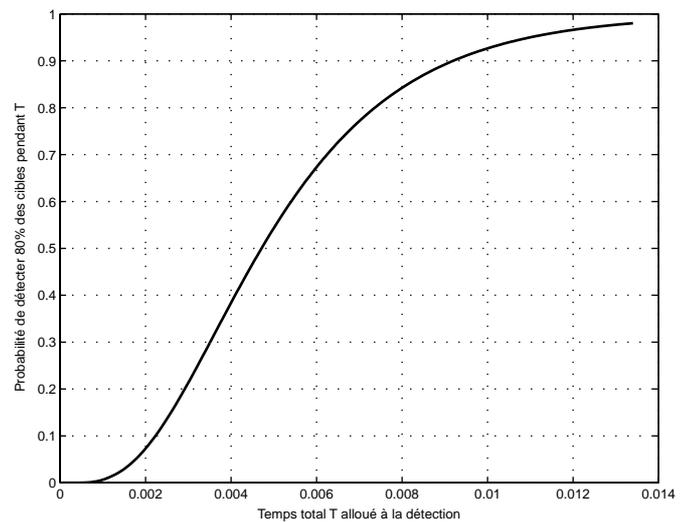


Figure 1. – Scénario 4 : évolution en fonction de  $T$  de la probabilité qu'au moins 80 % des cibles soient détectées lorsque  $d_{ref} = 20$  km.

## Détermination de stratégies de gestion dynamique optimale

Pour chacun des quatre scénarios nous avons également évalué, pour différentes valeurs de  $d_{ref}$ , le temps  $T_{min}$ . N'ayant pour l'instant aucun résultat de l'influence de  $T$  sur l'évolution de  $\underline{\lambda}$  et de  $p_I(T)$ , la méthode est la suivante : pour chaque valeur de  $d_{ref}$  nous avons calculé numériquement la probabilité (44) que plus de 80 % des cibles soient détectées pour des valeurs croissantes de  $T$ . La première valeur de  $T$  permettant de satisfaire  $p_0 \geq 0.9$  est une estimation numérique de  $T_{min}$ . Les résultats des simulations sont représentés sur la figure 3 pour le scénario 1, sur la figure 4 pour le scénario 2, sur la figure 5 pour le scénario 3 et sur la figure 6 pour le scénario 4.

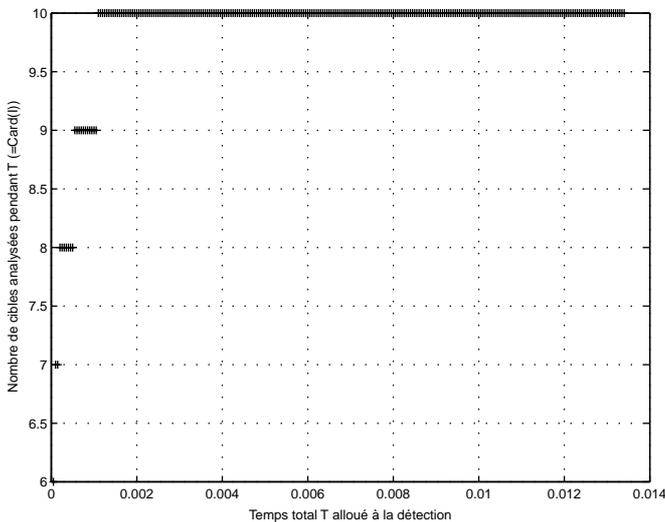


Figure 2. – Scénario 4 : évolution en fonction de  $T$  du nombre de cibles sur lesquelles on passe un temps non nul lorsque  $d_{ref} = 20$  km.

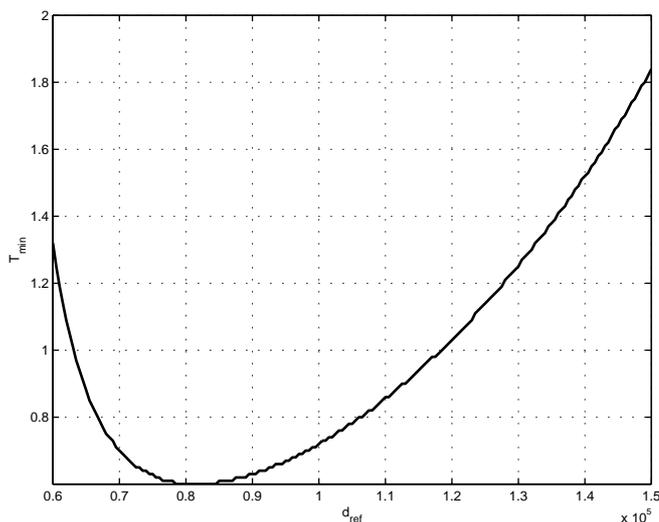


Figure 3. – Scénario 1 : évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80 % des cibles soient détectées soit égale à 0.9.

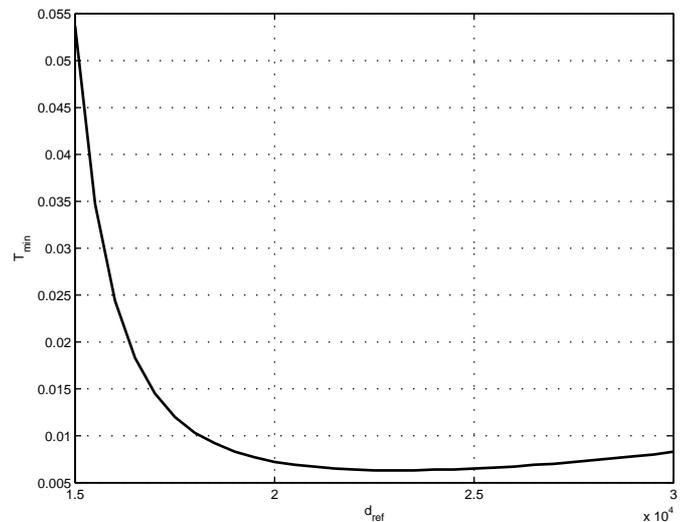


Figure 4. – Scénario 2 : évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80 % des cibles soient détectées soit égale à 0.9.

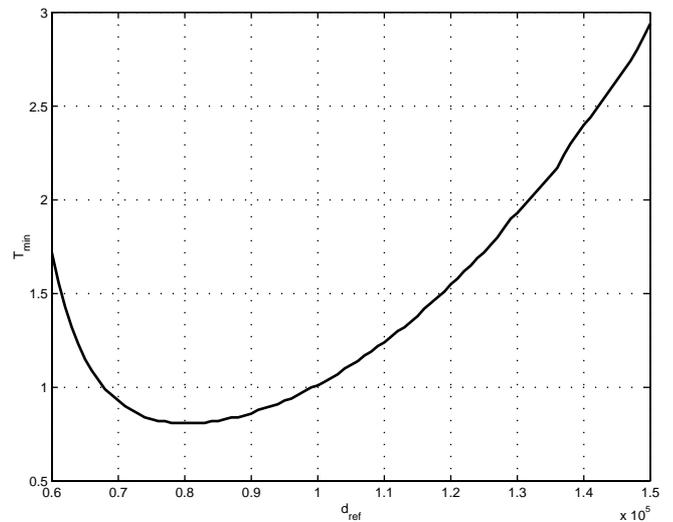


Figure 5. – Scénario 3 : évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80 % des cibles soient détectées soit égale à 0.9.

On remarque que, quel que soit le scénario, l'évolution de la fonction  $T_{min} = f(d_{ref})$  est la même. Cette évolution a été constatée sur toutes les simulations que nous avons réalisées. On notera que le début de l'intervalle de simulation pour  $d_{ref}$  n'est pas le même pour toutes les simulations. Ceci est dû à des problèmes numériques qui surviennent lorsque  $d_{ref}$  devient inférieure à une certaine valeur limite qui dépend de la distribution initiale des distances. Sur l'intervalle de simulation de  $d_{ref}$ , la fonction  $T_{min} = f(d_{ref})$  commence toujours par être strictement décroissante avant de devenir strictement croissante. Pour

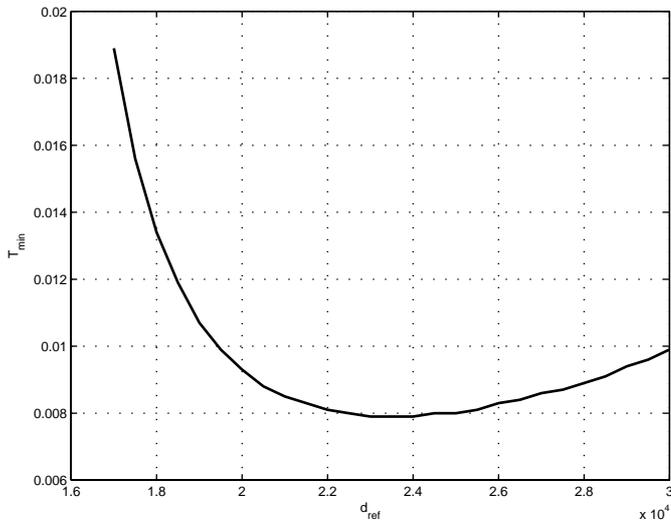


Figure 6. – Scénario 4 : évolution en fonction de  $d_{ref}$  du temps nécessaire pour que la probabilité que 80 % des cibles soient détectées soit égale à 0.9.

chaque scénario, la valeur de  $d_{ref}$  à partir de laquelle la fonction devient croissante ainsi que le temps  $T_{min}$  correspondant, sont reportés dans le tableau 5. L’analyse de ce tableau permet de remarquer que la distance  $d_{ref}$  optimale (c’est-à-dire celle qui permet d’obtenir le temps le plus faible) est proche de la distance pour laquelle  $x\% = 80\%$  des cibles ont une distance comprise dans l’intervalle  $[0, d_{ref}]$ . Ce résultat qui s’avère vérifié dans toutes les simulations, n’est pas, pour l’instant, démontré.

Tableau 5. – Estimation du temps d’observation minimal possible et valeurs de calibration optimale pour  $d_{ref}$ .

scénario	$T_{min}$ ((en s))	$d_{ref}$ optimale ((en km))
1	$5.9 \cdot 10^{-1}$	81,3
2	$6.3 \cdot 10^{-2}$	22,6
3	$8.1 \cdot 10^{-1}$	80
4	$7.9 \cdot 10^{-3}$	23

## 5. commentaires

Les cibles ne se trouvent pas nécessairement dans l’axe de dépointage du faisceau radar. Pour tenir compte de ce fait, il faudrait introduire comme paramètre de modélisation l’écart angulaire entre la cible et la position angulaire de dépointage. Il serait également possible d’étudier le gain potentiel apporté par une optimisation dynamique de la forme du diagramme d’antenne (ce qui est rendu possible par la technique du balayage électronique ou plus précisément de la formation de faisceau) au cours des différentes phases de détection et poursuite des cibles.

Les poids de pondération des différentes cibles sont simplement introduits d’un point de vue mathématique. Il nous semblerait intéressant d’étudier plus précisément la façon dont on peut déterminer ces poids à partir des informations *a priori* qu’un système d’écoute pourrait nous fournir. On voit dès lors que ces poids intègrent des composantes de natures différentes. Il y a tout d’abord une composante cinématique liée à la position de la cible et à sa vitesse. Il y a également une composante statistique liée à la précision de l’estimation des paramètres cinématiques de la cible. On peut également introduire une composante opérationnelle dans les poids. En effet, l’identification immédiate de la cible peut également modifier l’importance que l’on donne à la cible. D’un point de vue encore plus prospectif et, si on se place d’un point de vue militaire, on peut imaginer qu’une analyse de la scène permette d’identifier des stratégies d’attaque des cibles et donc permette de modifier les pondérations immédiates.

Une autre hypothèse simplificatrice pourrait également être levée pour donner lieu à une étude plus réaliste. En effet, supposer que la position des cibles est connue est une hypothèse forte. Même en présence d’un système d’écoute radar, cette position n’est pas connue exactement. Il serait donc intéressant de replacer cette étude dans un cadre probabiliste en supposant que l’on a, à l’instant initial, une densité de probabilité qui décrit la position des cibles.

Enfin, la problématique abordée dans ces travaux est très proche de celle étudiée en « Search Theory » ([13], [14], [16]). Il serait intéressant de la replacer dans le cadre de cette théorie en partant du fait que l’expression de la probabilité de détection d’une cible que nous avons déterminée grâce à une stratégie de découpage du temps, a la forme de celles des probabilités de détection manipulées dans ce domaine de recherche.

## 6. conclusion

Nous avons présenté une méthode de gestion temporelle d’un radar basée sur la modélisation des probabilités de détection d’une cible. Nous nous sommes tout d’abord placés en environnement monocapteur et monocible. La modélisation des fonctions élémentaires de détection nous a permis d’optimiser de façon analytique une stratégie de détection d’une cible. Cette stratégie consiste à effectuer pendant le temps imparti à la détection plusieurs détections élémentaires. L’optimalité est obtenue lorsque le nombre de détections élémentaires est tel que la probabilité de détection élémentaire soit égale à 0.5. On note également que le nombre de ces détections élémentaires dépend de la distance à laquelle est situé l’objet.

Nous nous sommes ensuite placés en environnement monocapteur mais multicible. La stratégie de détection d’une cible élaborée à l’étape précédente est néanmoins toujours utilisée. Dans un premier temps, la position des cibles (distance et dépointage)

a été supposée connue. Nous avons alors défini un critère fondé sur les probabilités de détection pondérées des cibles. Ce critère dépend du temps passé sur chacune des cibles. La maximisation de ce critère, sous les contraintes que le temps d'observation total soit fixé et que le temps d'observation de chaque cible soit nécessairement positif, a permis de définir une stratégie de découpage du temps donc, une première façon de le gérer. Il est important de noter qu'en dépit d'hypothèses simplificatrices, la résolution du problème d'optimisation est loin d'être trivial. Nous avons ensuite adapté cette méthode au cas où les distances des cibles ne sont pas connues bien que leur nombre et leurs positions angulaires le soient. Dans ce cas, nous proposons de faire comme si chaque cible à détecter se trouvait à une distance  $d_{ref}$  connue. Il est alors possible d'utiliser la stratégie de détection optimale d'une cible et de déterminer analytiquement la probabilité de détecter la cible supposée à la distance  $d_{ref}$  alors que celle-ci est en réalité à la distance  $d$ . Pour tester cette stratégie de détection nous avons évalué sa capacité à satisfaire une contrainte du type « au moins  $x$  % des cibles doivent avoir été détectées dans un temps  $T$  fixé avec une probabilité égale à  $p_0$  ». Lorsque le nombre de cibles est connu, il est possible de déterminer numériquement le temps minimum  $T_{min}$  permettant de satisfaire cette contrainte. Nous avons également analysé la sensibilité de cette stratégie en fonction de la distance  $d_{ref}$ .

Enfin, outre les stratégies en elles-mêmes, ce travail montre l'intérêt de chercher à modéliser analytiquement les fonctions de détection de capteurs puisqu'il est alors possible de déterminer analytiquement ou par résolution numérique, des stratégies de gestion ainsi que leurs performances.

## 7. remerciements

Ces travaux sont issus d'une collaboration avec Thales Optronique sur un problème de gestion dynamique optimale de capteurs hétérogènes. Les auteurs remercient plus particulièrement Michel Prenat, à l'origine de ces travaux, pour son implication et l'aide précieuse qu'il leur a fournie.

### ANNEXE A : Modélisation du rapport signal sur bruit

La relation entre le rapport signal sur bruit  $\rho$  et les différentes caractéristiques de l'antenne et de l'électronique de réception du radar est égale à :

$$\rho = \frac{P_e G_e G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 k b F \gamma d^4} \quad (48)$$

avec :

- $P_e$  : puissance moyenne émise par le radar
- $G_e$  : gain de l'antenne à l'émission
- $G_r$  : gain de l'antenne à la réception
- $\lambda$  : longueur d'onde émise
- $\sigma$  : surface équivalente radar de la cible
- $k$  : constante de Boltzmann
- $b$  : bande passante du filtre d'intégration cohérente
- $F$  : facteur de bruit incluant les pertes (circuits hyperfréquences et traitements)
- $\gamma$  : température de fonctionnement
- $d$  : distance radar cible

Si on appelle  $G_0$  le gain de l'antenne suivant l'axe mécanique, les gains  $G_e$  et  $G_r$  dans une direction de dépointage  $\theta$  sont respectivement égaux à :

$$G_e = G_0 \cos(\theta), \quad (49)$$

$$G_r = G_0 \cos(\theta), \quad (50)$$

puisque dans la direction  $\theta$ , la surface de l'antenne est multipliée par  $\cos(\theta)$ . La bande passante du filtre d'intégration cohérente est égale à :

$$b = \frac{1}{T} \quad (51)$$

avec  $T$  le temps d'observation de la cible. En définitive, en introduisant (49), (50) et (51) dans (48), on peut écrire  $\rho$  sous la forme :

$$\rho = \frac{\alpha T (\cos(\theta))^2}{d^4} \quad (52)$$

avec :

$$\alpha = \frac{P_e G_0^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 k F \gamma} \quad (53)$$

### ANNEXE B : Détermination de la relation entre la probabilité de détection, la probabilité de fausse alarme et le rapport signal sur bruit

On suppose que la puissance réfléchiée par la cible est captée par un récepteur constitué d'un filtre adapté suivi d'un détecteur de signal carré. Puisqu'on considère qu'il n'y a pas de post-intégration, on se limite au cas où ce récepteur ne produit qu'un échantillon  $v$  de la puissance reçue. Dans le cas où aucune cible n'est présente, le récepteur ne reçoit qu'un signal correspondant au bruit. Nous supposons dans tout ce qui suit que la variable aléatoire  $v$  est normalisée par rapport à la variance du bruit,

c'est-à-dire par rapport à sa puissance. La détection se fait alors en comparant  $v$  à un seuil  $S$ . Si  $v > S$  alors on détecte une cible. On appelle alors  $P_{fa}$  la probabilité de fausse alarme c'est-à-dire la probabilité que  $v > S$  lorsque aucune cible n'est présente. De la même façon, on appelle  $P_d$  la probabilité que  $v > S$  lorsqu'on est effectivement en présence d'une cible. Nous allons tout d'abord déterminer l'expression de  $P_{fa}$ .

Si on suppose qu'aucune cible n'est présente, la densité de probabilité de chaque  $v$  est égale à :

$$p(v) = \exp(-v) \quad (54)$$

La probabilité de fausse alarme est alors égale à :

$$P_{fa} = \int_S^{+\infty} p(v)dv. \quad (55)$$

En introduisant l'égalité (54) dans l'expression (55), on obtient :

$$P_{fa} = \exp(-S). \quad (56)$$

Nous allons maintenant rechercher l'expression de la probabilité de détection  $P_d$ . Pour cela nous allons supposer que la cible est modélisée par un grand nombre de réflecteurs aléatoires, indépendants et dont aucun n'est prédominant par rapport aux autres. De ce fait, l'amplitude de l'énergie reçue fluctue au cours du temps. On parle alors de cible fluctuante. Si on suppose que ces fluctuations sont lentes, alors la densité de probabilité de l'énergie reçue peut être modélisée par une distribution de Rayleigh ([18]). On dit qu'on est en présence d'une cible de type Swerling 1. Ce modèle de cible s'applique tout particulièrement aux avions de chasse et aux véhicules de combat au sol. Dans ces conditions, si on appelle  $x$  la variable aléatoire qui représente le rapport signal sur bruit de la mesure  $v$  et  $\bar{x}$  le rapport signal sur bruit moyen, la densité de probabilité de  $x$  est égale à ([18]):

$$p(x|\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}} \exp\left(\frac{-x}{\bar{x}}\right). \quad (57)$$

On peut alors montrer que ([18]) :

$$p(v) = \frac{1}{1 + \bar{x}} \exp\left(\frac{-v}{1 + \bar{x}}\right). \quad (58)$$

On intègre cette densité de probabilité entre  $S$  et  $+\infty$  pour obtenir l'expression de la probabilité de détection :

$$P_d = \exp\left(\frac{-S}{1 + \bar{x}}\right). \quad (59)$$

En introduisant l'expression (56) de la probabilité de fausse alarme dans celle (59) de la probabilité de détection, on obtient finalement :

$$P_d = P_{fa}^{\frac{1}{1 + \bar{x}}}. \quad (60)$$

## ANNEXE C : Détermination de la répartition temporelle optimale

Le problème d'optimisation à résoudre est le suivant. On veut minimiser la fonction  $f(\mathbf{t})$  sous la contrainte égalité  $h(\mathbf{t}) = 0$  et sous les  $p$  contraintes inégalités  $g_i(\mathbf{t}) \geq 0$ . On introduit alors le changement de variable :

$$x_i = \frac{t_i}{T}. \quad (61)$$

Par ce changement de variable, chaque fonction  $-P_{di}(t_i)$  définie par l'égalité (16) se transforme en une fonction  $f_i(x_i)$  définie par :

$$f_i(x_i) = \varepsilon_i(\exp(-w_i x_i) - 1), \quad (62)$$

avec :

$$w_i = \frac{T}{\tau_{Ri}}. \quad (63)$$

On appelle  $\mathbf{X}$  et  $f(\mathbf{X})$  le vecteur et la fonction respectivement définis par :

$$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_p]^T, \quad (64)$$

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^p f_i(x_i). \quad (65)$$

Alors le problème d'optimisation  $P$  que nous avons à résoudre est le suivant :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \min f(\mathbf{X}) \\ \text{Contraintes : } x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \sum_{i=1}^p x_i = 1. \end{cases} \quad (66)$$

La solution de ce problème est donnée dans la référence [5]. Nous en décrivons dans les lignes qui suivent les grandes étapes. Les contraintes sont qualifiées ([11]) car elles sont linéaires. Si on appelle  $\underline{\mathbf{X}}$  la solution à  $\mathcal{P}$ , alors le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) implique qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_p\} \in (\Re^+)^n$  et  $\underline{\lambda} \in \Re$  tels que :

$$\begin{cases} f'_i(\underline{x}_i) - \underline{\mu}_i + \underline{\lambda} = 0 \\ \underline{\mu}_i \underline{x}_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, p\}. \end{cases} \quad (67)$$

Si l'indice  $i$  correspond à une valeur strictement positive de  $\underline{x}_i$  alors on a  $\underline{\mu}_i = 0$  et si  $\underline{x}_i = 0$  alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f'_i(\underline{x}_i) + \underline{\lambda} = \underline{\mu}_i \geq 0. \quad (68)$$

De plus, si les fonctions  $f_i$  sont convexes, alors les conditions nécessaires de KKT deviennent nécessaires et suffisantes. On notera que c'est le cas pour le problème qui nous intéresse puisqu'il est aisé de vérifier que la dérivée seconde de chaque fonction  $f_i$  est positive.

Compte tenu de ces remarques et de l'expression (62) des fonctions  $f_i$ , les égalités (67) s'écrivent encore :

$$\begin{cases} -\varepsilon_i w_i \exp(-w_i \underline{x}_i) + \underline{\lambda} = 0 \quad \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i > 0 \\ \varepsilon_i w_i - \underline{\lambda} \leq 0 \quad \forall i \text{ tel que } \underline{x}_i = 0. \end{cases} \quad (69)$$

Les conditions de KKT étant suffisantes, la condition  $\underline{x}_i > 0$  est équivalente à  $\underline{\lambda} < \varepsilon_i w_i$ . On appelle alors  $\mathcal{I}$  l'ensemble suivant :

$$\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \underline{\lambda} < \varepsilon_i w_i\}. \quad (70)$$

Des égalités (69), on déduit alors que :

$$\begin{cases} \underline{x}_i = \underline{x}_i(\underline{\lambda}) = \frac{1}{w_i} \ln\left(\frac{\varepsilon_i w_i}{\underline{\lambda}}\right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \\ \underline{x}_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (71)$$

Pour déterminer définitivement les  $\underline{x}_i$  optimaux, il reste à déterminer  $\underline{\lambda}$ . Pour cela, on considère le Lagrangien  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda)$  suivant :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda) = \sum_{i=1}^p f_i(x_i) + \lambda \left( \sum_{i=1}^p x_i - 1 \right), \quad (72)$$

défini sur  $(\mathfrak{R}^+)^p$ , ainsi que la fonction duale  $\psi(\lambda)$  définie par :

$$\psi(\lambda) = \min_{\mathbf{X} \in (\mathfrak{R}^+)^p} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda). \quad (73)$$

On remarquera que d'une part, les contraintes inégalités apparaissent implicitement dans l'ensemble de définition du Lagrangien et de la fonction duale et que d'autre part, cette dernière fonction est égale à  $-\infty$  lorsque  $\lambda < 0$ . On restreint donc le domaine de définition de  $\psi(\lambda)$  à  $\lambda$  positif.

Le problème d'optimisation étant un problème de minimisation convexe ( $f(\mathbf{X})$  et les  $g_i$  sont convexes et les  $h_i$  sont affines), le point  $(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\lambda})$  est un point selle de  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \lambda)$  et  $\underline{\lambda}$  est obtenu par maximisation de la fonction duale  $\psi(\lambda)$  qui, étant concave, possède un unique maximum ([11], [5]). Compte tenu des résultats généraux que nous venons d'énoncer et de la relation (71) entre  $\underline{\mathbf{X}}$  et  $\lambda$ , la fonction  $\psi(\lambda)$  s'écrit :

$$\psi(\lambda) = - \sum_{i \in \mathcal{I}} \left( \varepsilon_i - \frac{\lambda}{w_i} \right) + \lambda \left( \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{w_i} \ln\left(\frac{\varepsilon_i w_i}{\lambda}\right) - 1 \right). \quad (74)$$

On introduit alors la fonction  $[x]^+$  définie sur  $\mathfrak{R}$  par :

$$\begin{cases} [x]^+ = x \text{ si } x > 0 \\ [x]^+ = 0 \text{ si } x \leq 0. \end{cases} \quad (75)$$

En utilisant cette dernière fonction, la fonction  $\psi(\lambda)$  s'écrit encore :

$$\psi(\lambda) = - \sum_{i=1}^p \left[ \left( \varepsilon_i - \frac{\lambda}{w_i} \right) \right]^+ + \lambda \left( \sum_{i=1}^p \frac{1}{w_i} \left[ \ln\left(\frac{\varepsilon_i w_i}{\lambda}\right) \right]^+ - 1 \right). \quad (76)$$

On peut alors montrer que la dérivée première de  $\psi(\lambda)$  est égale à ([5]) :

$$\psi'(\lambda) = -1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{w_i} \left[ \ln\left(\frac{\varepsilon_i w_i}{\lambda}\right) \right]^+. \quad (77)$$

Son unique maximum  $\underline{\lambda}$  est obtenu en résolvant  $\psi'(\lambda) = 0$ . Finalement, en introduisant dans l'expression (71) des  $\underline{x}_i$  ce  $\underline{\lambda}$ , le changement de variable (61) et la définition (63) des  $w_i$ , on obtient la répartition optimale du temps de recherche entre les  $p$  cibles :

$$\begin{cases} t_i = \tau_{Ri} \ln\left(\frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri} \underline{\lambda}}\right) \text{ si } i \in \mathcal{I} \\ t_i = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (78)$$

L'ensemble  $\mathcal{I}$  est lui finalement défini par :

$$\mathcal{I} = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \underline{\lambda} < \frac{T \varepsilon_i}{\tau_{Ri}}\}. \quad (79)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. R. Billam. Design and performance considerations in modern phased array radar. *Proceedings of IEE 1982 International Radar Conference*, pages 15-19, 1982.
- [2] E. R. Billam. The optimization of beam position separation in phased array radar. *Proceedings of First International Radar Conference*, pages 878-882, 1986.
- [3] S. Blackmann and R. Popoli. *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Artech House, 1999.
- [4] P. L. Bogler. *Radar Principles with Application to Tracking Systems*. John Wiley and Sons, 1990.
- [5] J. P. Le Cadre and G. Souris. Searching tracks. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, AES-34(4) :1149-1166, October 2000.
- [6] R. A. Dana and D. Moriatis. Probability of detecting a swerling i target on two correlated observations. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, AES-17 : 727-730, September 1981.
- [7] J. Darricau. *Physique et Théorie du Radar - Tome 1*. Sodipe, 1973.
- [8] J. Darricau. *Physique et Théorie du Radar - Tome 2*. Sodipe, 1973.
- [9] M. de Vilmorin, E. Duflos, M. Prenat, and P. Vanheeghe. Optimal sensor management strategies based on the modeling of detection functions. *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 2327-2332, October 2000.
- [10] G. V. Trunk et al. Phased array parameter optimization for low altitude targets. *Proceedings of IEEE 1995 International Radar Conference*, pages 196-200, 1995.

- [11] J. B. Hiriart-Urruty. L'optimisation. *Que sais-je ?*, (3184) : 318-329, 1996.
- [12] L. A. Klein. *Millimeter-Wave and Infrared Multisensor Design and Signal Processing*. Artech House, 1997.
- [13] B. Koopman. *The theory of search : Part II, target detection*, volume 4. Operations research, 1956.
- [14] B. Koopman. *The theory of search : Part III, the optimum distribution of searching effort*, volume 5. Operations research, 1957.
- [15] J. I. Marcum. Studies of target detection by a pulsed radar : Mathematical appendix. *IRE Transaction on Information Theory*, IT-6:145-268, 1960.
- [16] G. Souris and J. P. Le Cadre. Un panorama des méthodes d'optimisation de l'effort de recherche en détection. *Traitement du Signal*, 16(6) : 403-424, 1999.
- [17] G.W. Stimson. *Introduction of Airbone Radar*. Scitech Publisher Inc, 1998.
- [18] P. Swerling. Probability of detecting fluctuating targets. *IRE Transaction on Information Theory*, IT-6, 1960.
- [19] P. Swerling. More on detection of fluctuating targets. *IEEE Transaction on Information Theory*, IT-11, 1965.

*Manuscrit reçu le 23 janvier 2001*

## LES AUTEURS

Emmanuel DUFLOS



Emmanuel DUFLOS est né à Amiens le 20 juin 1968. Diplômé de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord (ISEN) en 1991, il est titulaire d'un DEA d'automatique et de traitement de signal de l'Université de Paris Sud Orsay depuis 1992. De 1992 à 1995, il prépare une thèse conjointement à l'Université de Toulon et du Var et à l'ISEN sur des problèmes de modélisation de lois de guidage et d'estimation de cibles de missiles autoguidés. En 1995, il intègre un poste d'enseignant-chercheur en traitement du signal et en automatique à l'ISEN et devient responsable du Département Signaux et Systèmes du même institut en 1999. Il est également membre du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (UPRESA CNRS 8021) depuis 1995. Ses recherches actuelles concernent la modélisation et l'analyse de systèmes complexes tels que les systèmes de gestion optimale de capteurs et les systèmes multicapteurs de détection de mines.

Marie de VILMORIN



Marie de VILMORIN est née en 1976. Diplômée de l'Institut Supérieur de l'Électronique du Nord en 1999, elle est titulaire du DEA d'Automatique et d'Informatique Industrielle de l'Université des Sciences et Technologies de Lille depuis 1999. Elle est actuellement en dernière année de thèse au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique de Lille, et de l'Institut Supérieur d'Électronique du Nord, en collaboration avec la société Thales Optronique. Ses travaux de recherche portent sur la gestion dynamique optimale de capteurs hétérogènes, en particulier l'optimisation des phases de détection de cibles aériennes et d'estimation de leurs trajectoires par des capteurs de type radar et/ou infrarouge.

Philippe VANHEEGHE



Philippe VANHEEGHE est né à Saint-Omer le 20 juillet 1956. Il a obtenu le doctorat de troisième cycle en informatique à l'Université des Sciences et Technologies de Lille en 1984. Il est actuellement professeur à l'École Centrale de Lille et membre du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL UPRESA 8021). Les activités de recherche de Philippe Vanheeghe concernent la modélisation et l'analyse des systèmes complexes tels que les systèmes de gestion optimale de capteurs et les systèmes multicapteurs de détection de mines. Il est également « Senior Member » de IEEE.