

Traitement fractal et multifractal des images

Fractal and multifractal processing of images

par Jacques LÉVY VÉHEL

INRIA, Projet Fractales, Domaine de Voluceau, 78153 Le Chesnay Cedex, France

jacques.levy-vehel@inria.fr

<http://www-rocq.inria.fr/fractales>

résumé et mots clés

Récemment, plusieurs développements importants en analyse fractale ont eu un impact majeur sur les applications en traitement des images. Nous abordons brièvement la théorie des systèmes de fonctions itérées, l'analyse multifractale et les processus fractionnaires, en expliquant comment des progrès dans ces divers champs ont conduit à de nouvelles méthodes en traitement des images : compression, segmentation, débruitage, interpolation, modélisation et synthèse. Ces applications, parmi d'autres, montrent que l'analyse fractale est résolument passée depuis quelques années du « stade descriptif » au « stade opérationnel ».

Analyse multifractale, régularité ponctuelle, exposant de Hölder, processus fractionnaire, mouvement Brownien fractionnaire et multifractionnaire, système de fonctions itérées, analyse en ondelettes, compression, débruitage, segmentation, interpolation, modélisation, synthèse.

abstract and key words

Recently, a number of important progresses in fractal analysis have had a major impact in image processing applications. We review briefly IFS theory, multifractal analysis and fractional processes theory; we indicate how these theoretical tools lead to new methods for image processing: Compression, segmentation, denoising, interpolation, modeling and synthesis. Among others, these applications show that fractal analysis is no longer restricted to a descriptive role, but has entered an « operational phase ».

Multifractal analysis, pointwise regularity, Hölder exponent, fractional process, fractional and multifractional Brownian motion, iterated functions system, wavelet analysis, compression, denoising, segmentation, interpolation, modeling, synthesis.

1. géométrie fractale : origines et évolution

La géométrie fractale, apparue dans les années 70 [25] comme fruit d'une synthèse de travaux effectués depuis plus d'un siècle [33, 11, 32, 15], a proposé de nouveaux concepts pour appréhender certains phénomènes complexes. Les notions de dimension fractionnaire et d'invariance d'échelle¹ ont rapidement été reconnues pertinentes pour la description de nombreux objets naturels, des reliefs montagneux [27] aux amas de percolation en passant par les fronts de diffusion [12], les milieux poreux [1] ou la catalyse chimique [2]. Ces outils ont par exemple permis de mieux comprendre les phénomènes de croissance loin de l'équilibre qui apparaissent de manière spontanée dans de nombreux domaines, comme le claquage diélectrique ou la croissance dendritique. Les physiciens, les chimistes ou les astronomes ont ainsi pu disposer de nouvelles mesures quantitatives pour caractériser les objets qu'ils étudient : la dimension d'un amas obtenu par agrégation diffusive de particules, par exemple, est différente de celle d'un amas obtenu par agrégation balistique.

Les applications en traitement du signal et plus généralement en sciences de l'information ne sont apparues que plus tardivement, vers le début des années 80. Une caractéristique des premières tentatives est la vision essentiellement descriptive qui y était à l'œuvre : des signaux étaient analysés et des comportements fractals étaient ou non relevés, le plus souvent sous la forme d'une invariance d'échelle dans une certaine gamme de résolutions. On en déduisait une « dimension fractale », et les développements s'arrêtaient là. Cette phase descriptive était très certainement nécessaire, et elle a en tout cas permis de se familiariser avec des notions nouvelles à l'époque. Cependant, elle a aussi, un temps, donné l'impression que si la géométrie fractale pouvait offrir aux sciences de l'ingénieur une description compacte et « intelligente » de certains phénomènes, elle ne permettait pas de créer des procédés opératoires nouveaux.

Deux importantes évolutions de nature différente ont permis d'entrer dans une phase « opérationnelle » au début des années 90. La première, qui s'inscrit naturellement dans les développements d'une discipline jeune, est l'enrichissement des outils théoriques de base en vue des applications à la variété des phénomènes naturels : à la caractérisation, somme toute assez pauvre, d'un signal par sa seule « dimension fractale », sont ven-

ues s'ajouter des mesures beaucoup plus fines, comme la lacunarité ou l'analyse multifractale ; les modèles de processus fractals, d'abord parfaitement auto-similaires, se sont diversifiés pour tenir compte d'invariances dans des sens généralisés ; enfin, les méthodes statistiques d'analyse des signaux fractals se sont perfectionnées pour fournir des estimateurs plus robustes et applicables dans des situations plus générales. Nous exposerons très brièvement certains de ces développements dans la suite de l'article.

La deuxième évolution est d'essence plus conceptuelle, et, semble-t-il, particulière à nos domaines. Au lieu de continuer à rechercher des phénomènes « fractals » (c'est-à-dire invariants d'échelle) et à décrire cette invariance à l'aide de diverses dimensions, on s'est progressivement rendu compte du bénéfice qu'il pouvait y avoir à appliquer des *outils fractals* à des signaux *a priori quelconques*. Autrement dit, au lieu d'analyser un signal pour savoir s'il est un *objet fractal*, on lui fait subir des *traitements fractals* indépendamment de sa possible invariance d'échelle. Le traitement des images fournit un exemple frappant de ce changement de point de vue : on a ainsi affaire à de la *compression fractale* des images, et non pas à de la *compression d'images fractales* (les images incluses dans l'encyclopédie Encarta de Microsoft ne sont certes pas fractales, mais ont été stockées sur CD-Rom sous une forme compressée par une méthode fractale). Il en est de même pour la segmentation, le débruitage, ou encore le tatouage : on traite des images quelconques, et ce sont les techniques qui sont fractales. Cette évolution importante ne surprendra pas si on la met en parallèle avec la manière dont on use de méthodes plus classiques ; en effet, elle revient simplement à considérer l'analyse fractale comme les autres outils mathématiques utilisés en sciences de l'ingénieur : moyennant certaines hypothèses, on peut toujours calculer le gradient d'un signal discret (par exemple *via* un modèle, ou en le régularisant au préalable), ou sa transformée de Fourier (par exemple en le prolongeant de manière adéquate en dehors du domaine où il est observé). De même, on calculera des dimensions ou un spectre multifractal associés à un signal en faisant des hypothèses sur celui-ci. Ces dernières sont d'ailleurs en général de nature semblable à celles faites dans les analyses « classiques », à savoir principalement : appartenance à une classe de modèles, et « régularisation » ou « prolongement » du signal (dans les échelles plutôt qu'en espace).

Nous présentons succinctement ci-dessous quelques exemples de cette approche, qui a permis aux méthodes fractales de faire désormais partie intégrante de certains procédés industriels. Comme souvent, les situations peuvent être abordées sous deux angles : paramétrique et non paramétrique. Nos deux premières applications (IFS et compression d'images, analyse multifractale et segmentation/débruitage/interpolation d'images) sont non paramétriques. La troisième (processus fractionnaires, synthèse et modélisation d'images) est fondée sur des modèles. Mentionnons pour terminer que la plupart des traitements décrits ci-dessous (ainsi de nombreux autres) sont implémentés

¹ Une propriété est dite invariante d'échelle (dans une certaine gamme de résolutions) si elle ne possède pas d'échelle caractéristique dans la gamme considérée. En d'autres termes, on ne peut pas connaître l'échelle d'observation en mesurant cette propriété. Analytiquement, et dans le cas plus simple où cette invariance prend la forme d'une auto-similarité, cela se traduit par une relation en loi de puissance entre la résolution d'analyse ϵ et la propriété $P(\epsilon)$ mesurée à cette résolution : $P(\epsilon) = F(\epsilon) \times \epsilon^\alpha$, où $F(\epsilon)$ est une fonction à variation lente. Cette invariance d'échelle est le plus souvent mise en évidence à travers un comportement linéaire dans un diagramme $\log(P)$ vs. $\log(\epsilon)$.

dans la boîte à outils FracLab de traitement fractal des signaux et images. FracLab est disponible aux adresses :
<http://www-rocq.inria.fr/fractales>
 et <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/FracLab/>.

2. IFS et compression d'images

Un IFS, ou système de fonctions itérées, est la donnée, sur un espace métrique complet (X, d) , d'un ensemble de n fonctions $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Si chaque w_i est contractante pour d , alors l'opérateur W :

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H \\ A &\longmapsto \cup_i w_i(A). \end{aligned}$$

où H est l'ensemble des sous-ensembles compacts non vide de X , est lui-même contractant dans (H, d_H) [4]. Ici, d_H est la distance de Hausdorff,

$$d_H(A, B) = \max \left(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y) \right)$$

W possède donc un unique point fixe G , appelé *attracteur* de l'IFS. G possède une forme d'invariance d'échelle, puisque, en vertu de l'équation

$$G = \cup_i w_i(G)$$

il est égal à l'union de copies réduite de lui-même (figure 1). De plus, et c'est la propriété qui nous intéresse pour la compression, G est totalement déterminé dès que l'on connaît $\{w_1, \dots, w_n\}$, et il existe un algorithme rapide pour le calculer.

Choisissons maintenant pour H l'ensemble des images sur un domaine fixé, et soit A une image particulière. Si l'on arrive à déterminer un IFS dont l'attracteur est A , alors, au lieu de conserver A en mémoire, il suffira de stocker l'IFS. On obtient ainsi une représentation *fonctionnelle* de l'image, qui est en général beaucoup plus compacte que l'information originale. Notons que cette méthode de compression est conceptuellement très différente des méthodes classiques, qui, elles, cherchent un espace de représentation permettant de supprimer ou de diminuer le plus possible les redondances.

La problématique de la compression fractale est donc, pour une image donnée A , de trouver un IFS dont l'attracteur est le plus proche possible de A . L'algorithme de base consiste à partitionner d'abord A en blocs « destination ». Pour chacun de ces blocs, on cherche ensuite, toujours dans A , un bloc « source », qui, par une transformation contractante simple (translation et rotation spatiale, changement d'échelle, modification du contraste et du niveau de gris moyen) donne une bonne approximation du bloc destination.

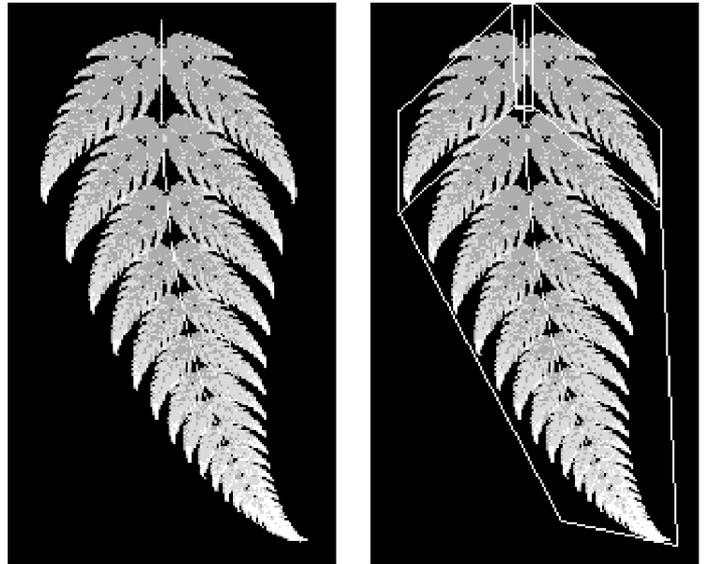


Figure 1. – Une « fougère fractale », attracteur d'un IFS. La forme complète est l'union des quatre sous-parties délimitées par un cadre dans l'image de droite, chacune de ces parties étant elle-même une réduction affine du tout.

Quand tous les blocs destination ont été traités, on a obtenu un ensemble de fonctions contractantes qui constitue un IFS dit « partitionné » dont l'attracteur approxime A . On peut ainsi atteindre des taux de compression importants en conservant une bonne qualité d'image (figure 2).

Cet algorithme, apparu il y a une douzaine d'années, a donné naissance à une très abondante littérature [10], mais aussi à de nombreuses implémentations industrielles. La société américaine Image Tech, en particulier, commercialise plusieurs codeurs/décodeurs fractals fonctionnant sur ce principe pour des images fixes ou animées.

Des généralisations de la théorie des IFS permettent entre autres de réaliser de la synthèse vocale [22], de la génération interactive d'images [24] ou du tatouage numérique [5, 31].

3. analyse multifractale et applications en traitement d'images

L'analyse multifractale d'un signal consiste essentiellement à le décomposer en sous-ensembles ayant même régularité, puis à mesurer la « taille » des sous-ensembles ainsi obtenus. Plus précisément, on commence par se donner une définition adéquate de la régularité du signal X en un point quelconque t : le plus couramment, on a recours à l'exposant de Hölder ponctuel, $\alpha_X(t)$, défini comme suit :



Figure 2. – Image originale (à gauche) et compression d'un facteur 50 (à droite).

$$\alpha_X(t) = \liminf_{v \rightarrow t} \frac{\log|X(v) - X(t)|}{\log|v - t|}. \quad (1)$$

(cette définition est valable si X est non dérivable en t ; sinon il faut lui enlever sa partie régulière, [16] ; d'autre part, elle s'étend sans difficulté en dimension supérieure).

Géométriquement, (1) signifie que le graphe de X autour de t « ressemble » à une courbe du type $v \rightarrow X(t) + C|v - t|^\alpha$, dans le sens suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage de t tel que le graphe de X dans ce voisinage soit tout entier inclus dans l'enveloppe définie par les deux courbes $v \rightarrow X(t) + C|v - t|^{\alpha-\epsilon}$ et $v \rightarrow X(t) - C|v - t|^{\alpha-\epsilon}$, cette propriété n'étant plus vraie si on choisit $\epsilon < 0$ (figure 3).

L'exposant α_X étant défini en tout t , on peut associer au signal original sa *fonction de Hölder*, $t \rightarrow \alpha_X(t)$, qui décrit comment varie la régularité de X : plus $\alpha_X(t)$ est petit, plus X est irrégulier en t , et inversement.

Par exemple, si X est discontinu en t mais borné, alors $\alpha_X(t) = 0$, alors que la condition $\alpha_X(t) > 1$ assure que X est dérivable en t . L'information apportée par α_X et ses variations est souvent plus intéressante que celle fournie par X : si l'on veut détecter des contours dans une image, par exemple, la valeur $X(t)$ des niveaux de gris n'est pas pertinente, puisque les contours ne sont pas modifiés si l'on change le contraste ou la luminosité globale de l'image. Par contre, les contours correspondent généralement à des discontinuités ou des variations brusques dans les niveaux de gris, information qui est justement celle enregistrée par α_X .

La deuxième étape d'une analyse multifractale consiste à étudier les ensembles

$$E_\alpha = \{t : \alpha_X(t) = \alpha\}$$

Les ensembles E_α sont tout simplement les lignes de niveaux de la fonction de Hölder. Intuitivement, décomposer le support de X suivant les ensembles E_α revient à grouper les points de même régularité. Pour obtenir une description globale de la répartition des singularités de X , il est utile de « mesurer » les E_α . Ceci peut se faire de diverses manières, par exemple en privilégiant une approche *géométrique* ou une approche *statistique*. Le résultat est dans tous les cas un *spectre multifractal*, i.e. une fonction $\alpha \rightarrow f(\alpha)$, qui décrit « combien » de points du signal ont une régularité égale à α . Plus précisément, dans l'approche géométrique, pour chaque valeur de α , le *spectre de Hausdorff* $f_h(\alpha)$ représente la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points ayant cet exposant, i.e. :

$$f_h(\alpha) = \dim_H \{t, \alpha(t) = \alpha\}$$

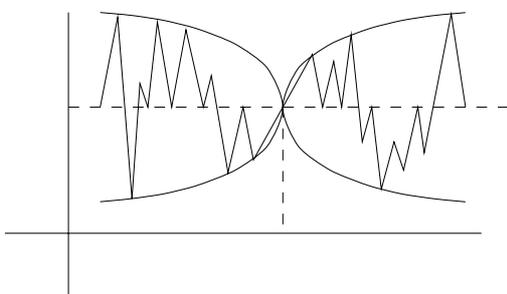


Figure 3. – Signal irrégulier X et son enveloppe Höldérienne en un point.

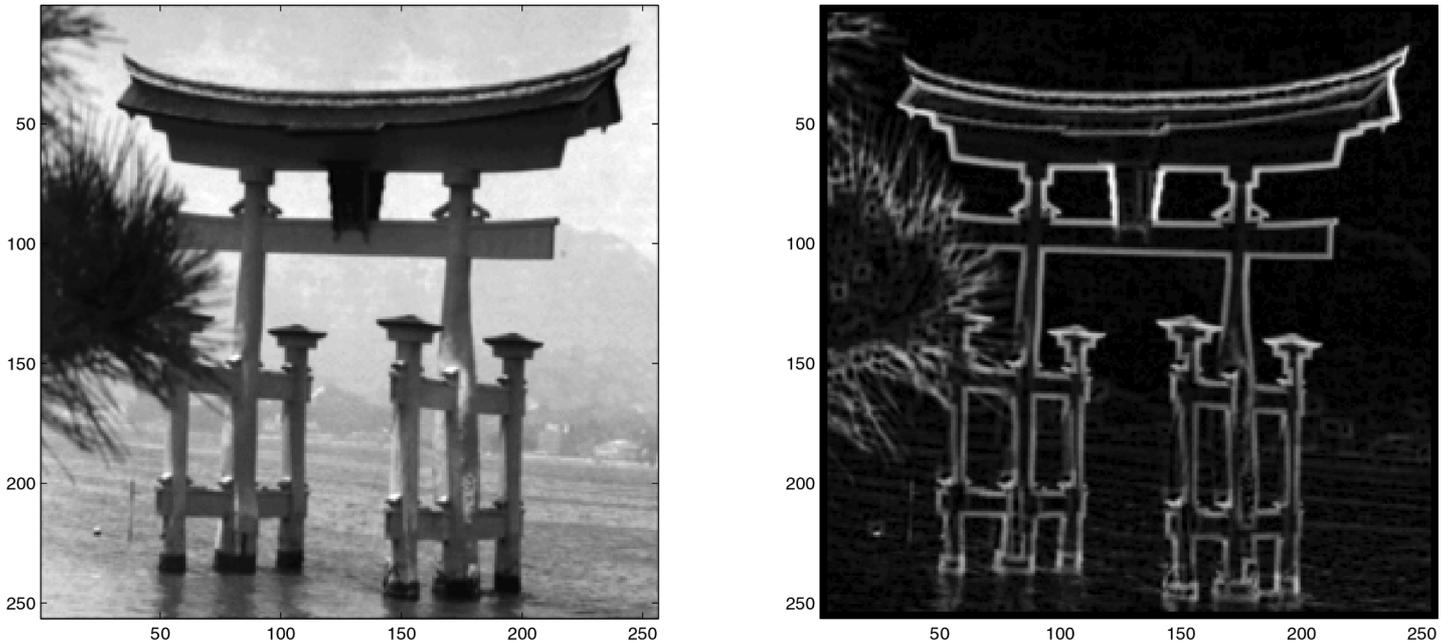


Figure 4. – Image originale et contours détectés par analyse multifractale.

où $\dim_H(E)$ est la dimension de Hausdorff de E (voir [9] pour une définition de cette dimension). Puisque chaque E_α est un sous-ensemble de l'image, f_h prend ses valeurs dans $[0, 2] \cup \{-\infty\}$. La valeur $-\infty$ correspond au cas où E_α est vide. Quand $0 < f_h(\alpha) < 1$, on a affaire à un ensemble de points « rares », du type ensemble de Cantor. Si E_α est un ligne de l'image, alors $f_h(\alpha) = 1$. Enfin, si tous les pixels d'une zone de l'image ont pour exposant α_0 , alors $f(\alpha_0) = 2$. Le spectre multifractal fournit donc des indications à la fois locales et globales sur la géométrie des singularités de l'image : par exemple, si $f_h(\alpha_0) = 2$ pour un certain $\alpha_0 > 1$ alors que $f_h(\alpha) < 2$ pour tous les $\alpha \neq \alpha_0$, on sait que presque tous les points de l'image ont une régularité égale à α_0 , et donc que l'image est presque partout lisse, puisque $\alpha_0 > 1$.

Expliquons maintenant en quelques mots en quoi consiste l'approche statistique : on s'intéresse cette fois, à chaque résolution finie n , à la probabilité de rencontrer un pixel dont la régularité est de l'ordre de α . Le spectre de grandes déviations $f_g(\alpha)$ mesure à quelle vitesse cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On procède en gros de la manière suivante : pour chaque valeur de l'entier n , on partitionne l'image en n^2 pixels de taille $1/n^2$. Choisissons alors un pixel au hasard uniformément. Le spectre $f_g(\alpha)$ est défini en écrivant que la probabilité que le pixel choisi ait pour régularité α se comporte en $n^{-(2-f_g(\alpha))}$, quand n tend vers l'infini. En particulier, si $f_g(\alpha)$ est strictement inférieur à 2, la probabilité d'observer la régularité α tend vers 0 en loi de puissance, avec un exposant égal $2 - f_g(\alpha)$: en conséquence, pour n suffisamment grand, « la plupart » des pixels ont un α tel que $f_g(\alpha) = 2$.

Nous ne pouvons développer ici ces aspects plus avant, et nous renvoyons à [23] pour les détails. Notons simplement que ces spectres sont définis sous des conditions très générales, et qu'on ne demande certainement aucune espèce de « fractalité » sur le signal X pour pouvoir les calculer. Ainsi, pour une image quelconque I , on pourra toujours estimer un spectre $f(\alpha)$. Voici quelques utilisations possibles de la régularité Höldérienne et de l'analyse multifractale en traitement des images.

Intéressons-nous tout d'abord au problème de la détection de contours. Dans de nombreux cas, ceux-ci peuvent être caractérisés par les deux conditions suivantes : tout d'abord, et comme on l'a noté plus haut, les contours correspondent à des points peu réguliers dans les images, c'est-à-dire à des valeurs relativement faibles de α . Même s'il n'existe pas de valeur universelle de l'exposant de Hölder qui caractériserait les points de contours, on peut s'attendre en général à ce que, sur une image donnée, ceux-ci aient une régularité à peu près homogène : en d'autres termes, l'ensemble des points de contour d'une image est caractérisé par un petit nombre de valeurs de α . Or, par définition, la réunion des contours forme un ensemble de courbes, qui est de dimension 1. Ainsi, on pourra extraire les contours d'une image en sélectionnant les points t dont l'exposant α est tel que $f(\alpha) = 1$. La figure 4 montre un exemple de détection de contours fondé sur ce principe. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter la référence [20].

Notre deuxième exemple est le débruitage des images. Intuitivement, il est clair que, dans une scène qui apparaît très bruitée, comme par exemple une image SAR (pour Radar à Ouverture Synthétique), la plupart des points auront une régu-

larité faible, alors qu'une image « lisse » contiendra surtout des valeurs élevées de α . En terme de spectre, $f(\alpha)$ sera « grand » pour α « petit » dans le premier cas, et sera « grand » pour α « grand » dans le deuxième cas. Pour débruiter une image, une possibilité est donc de la modifier de telle sorte que son spectre soit translaté vers les grandes valeurs de α : on augmente ainsi la régularité de chaque point en conservant la forme du spectre. Ceci permet de rendre l'image plus lisible tout en respectant les forces respectives des singularités (c'est-à-dire qu'un point bruité sur un contour restera, après traitement, plus irrégulier qu'un point bruité sur une zone uniforme). Cette méthode permet en particulier de traiter efficacement certaines images SAR qui résistent à la plupart des autres techniques de restauration. Un exemple de débruitage est présenté figure 5. Dans l'image débruitée (à droite), on aperçoit distinctement le fleuve qui affecte approximativement la forme d'un « Λ » au milieu de la scène. Deux implémentations différentes de cette approche, fondées sur des manipulations non linéaires des coefficients en ondelettes de l'image, sont décrites dans [18] et [21].

Nous finissons ce paragraphe avec une application à l'interpolation des images. Dans de nombreuses situations, la résolution

maximale d'acquisition est limitée par des facteurs physiques ou des questions de coût. Il est donc utile de pouvoir interpoler les données, de manière à disposer d'une meilleure résolution. Quand plusieurs images de la même scène sont disponibles (comme par exemple en imagerie radar ou en RMN), la « super-résolution » peut-être obtenue par des approches apparentées à la fusion d'information. Dans le cas général, on utilise typiquement des techniques Bayésiennes ou de régularisation, en supposant que l'image originale appartient à une classe donnée de signaux. Ces classes sont le plus souvent définies en terme de régularité *globale*, mesurée par une norme dans un espace fonctionnel comme C^n ou un espace de Besov. Dans notre cadre, il est naturel de définir l'image interpolée comme celle qui préserve la régularité Höldérienne *locale*, *i.e.* $\alpha(t)$, tout en étant compatible avec les observations (c'est-à-dire que sa version dégradée doit redonner l'image originale). Comme pour le débruitage, la mise en oeuvre de cette approche fait intervenir une analyse en ondelettes [19]. La figure 6 montre une comparaison entre les interpolations bicubique et Höldérienne pour un zoom d'un facteur 8 sur l'image de la porte japonaise présentée figure 2.

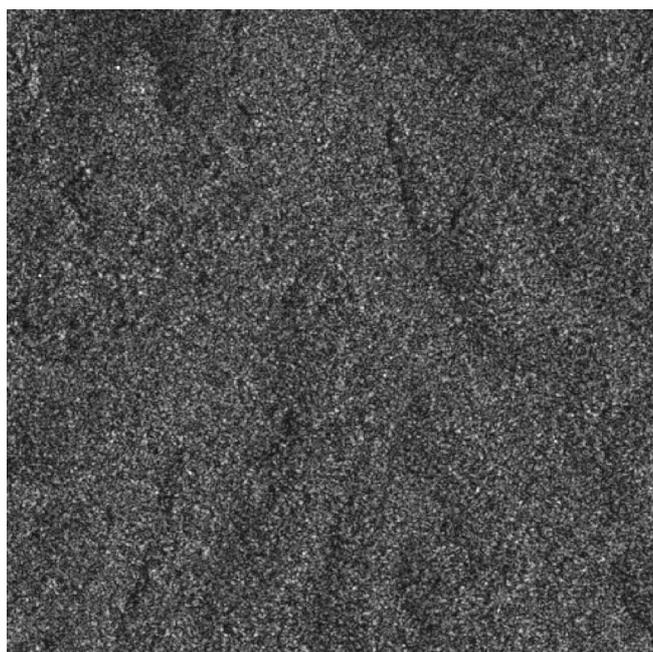


Figure 5. – Image SAR originale (à gauche) et débruitage multifractal (à droite).

4. processus fractionnaires et applications en synthèse et classification

Les processus fractionnaires que nous allons considérer sont des généralisations du classique mouvement Brownien dans lesquelles on introduit des corrélations fortes dans les accroissements. Dans le cas le plus simple, on conserve la gaussianité et la stationnarité des accroissements, mais on abandonne le caractère Markovien du mouvement Brownien, pour définir le *mouvement Brownien fractionnaire* [26]. Ce dernier est caractérisé par un exposant $H \in]0, 1[$ qui gouverne la plupart de ses propriétés statistiques et fractales : quand $H < 0,5$, chaque accroissement est négativement corrélé avec tous les autres, alors que pour $H > 0,5$, la densité spectrale des accroissements tend vers l'infini à l'origine (le cas $H = 0,5$ est celui du mouvement Brownien standard) : cette seconde situation correspond à ce que l'on nomme communément la « mémoire longue », terme signifiant que les corrélations du processus décroissent « lentement », *i.e.* en loi de puissance, au lieu des décroissances exponentielles plus classiquement observées. Ce type de corrélation a été relevé dans de nombreux phénomènes, naturels ou artéfacts (finance, géophysique, signaux biomédicaux, trafic Internet, etc) et a donné lieu à une abondante littérature [7, 8].

En dimension un, la covariance $R_{B_H}(t, s)$ du mouvement Brownien fractionnaire $B_H(t)$ prend la forme suivante :

$$R_{B_H}(t, s) = \frac{\sigma^2}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}],$$

où σ est un réel. En dimension deux, on peut envisager plusieurs extensions. Les plus usuelles sont le *champ Brownien fractionnaire de Lévy* et le *drap Brownien fractionnaire*. Le champ Brownien fractionnaire de Lévy L_H est une extension isotrope, dont la fonction de covariance est

$$R_{L_H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto (\|\mathbf{x}\|^{2H} + \|\mathbf{y}\|^{2H} - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{2H}),$$

Quand au drap Brownien fractionnaire $F_{\mathbf{H}}$, il dépend d'un vecteur $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$, et sa covariance s'écrit :

$$R_{F_{\mathbf{H}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto \prod_{i=1}^2 (|x_i|^{2H_i} + |y_i|^{2H_i} - |x_i - y_i|^{2H_i}).$$

Comme on le voit dans les formules ci-dessus, le paramètre H gouverne toutes les propriétés fractales du mouvement Brownien fractionnaire : on peut par exemple montrer que, presque sûrement, l'exposant de Hölder en tout point d'une trajectoire est égal à H . Ceci est parfois une limitation forte dans les applications. Ainsi, on ne peut avoir en même temps des trajectoires très irrégulières (qui impliquent H proche de 0), et de



Figure 6. – Zoom ($\times 8$) par interpolation bicubique (en haut) et Höldérienne (en bas) de l'image de la figure 2 (détail).

la dépendance longue (qui n'apparaît que pour H plus grand que $1/2$). Un autre exemple est la synthèse de paysage naturels à base de mouvement Brownien fractionnaire : une montagne artificielle obtenue comme la réalisation d'un mouvement Brownien fractionnaire bi-dimensionnel a la même irrégularité partout. Ceci entraîne un manque de réalisme dû au fait que la modélisation ne prend pas en compte l'érosion, qui lisse certains parties de la montagne plus que d'autres, ou la présence de failles. Il est donc important de généraliser le mouvement Brownien fractionnaire pour obtenir des outils plus souples, qui permettent de découpler longue dépendance et régularité, et de contrôler cette

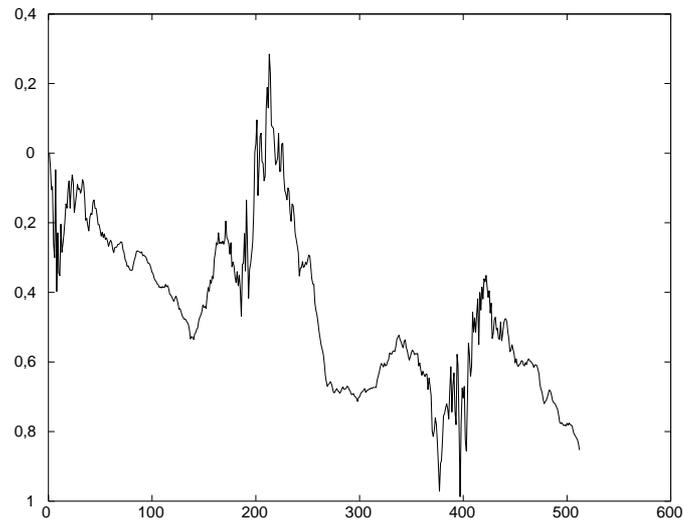


Figure 7. – Trajectoire d'un mouvement Brownien multifractionnaire avec $H(t) = 0.3 + |\sin(5t)|/2$.

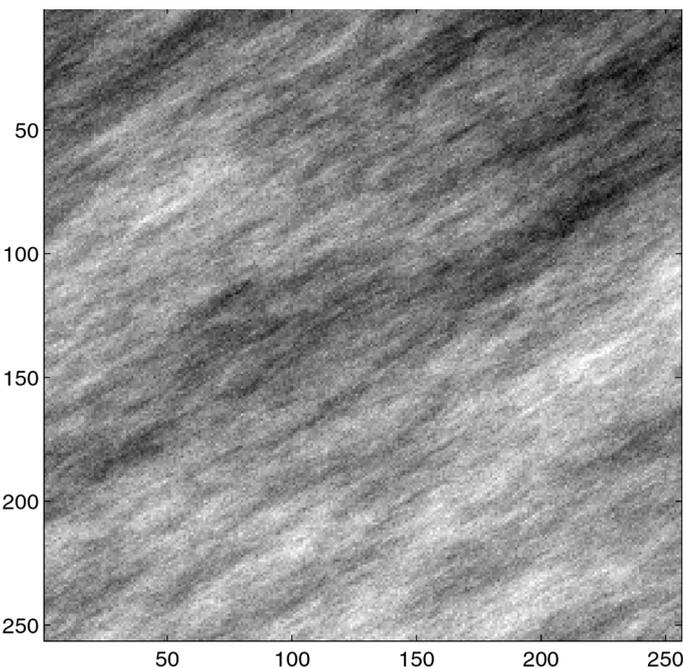


Figure 8. – Champs anisotropes d'exposants $H = 0.2$, à gauche, et $H = 0.8$, à droite [29].

dernière en chaque point plutôt que d'une manière globale. Un modèle simple qui étend le mouvement Brownien fractionnaire dans ces directions est le mouvement Brownien multifractionnaire [3, 6, 28]. Pour définir celui-ci, on remplace simplement le réel H par une fonction $H(t)$ suffisamment régulière (par exemple C^1) à valeurs dans $]0, 1[$. En dimension un, la covariance du mouvement Brownien multifractionnaire W_H s'écrit :

$$R_{W_H}(t, s) \propto |t|^{H(t)+H(s)} + |s|^{H(t)+H(s)} - |t - s|^{H(t)+H(s)}$$

On montre alors que, presque sûrement, en chaque point t , l'exposant de Hölder de W_H est égal à $H(t)$ [14]. On dispose ainsi d'un moyen simple pour construire des processus Gaussiens dont la régularité est prescrite à chaque instant. La figure 7 montre un exemple de trajectoire d'un tel processus.

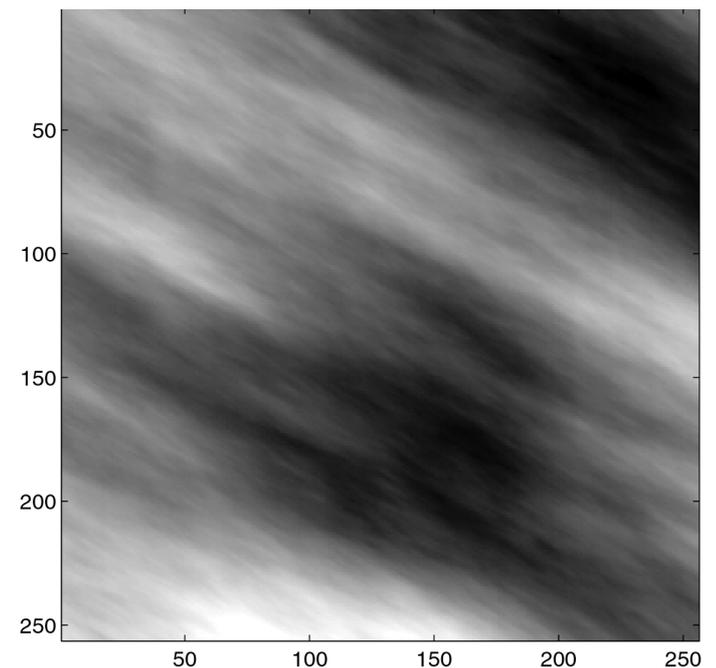
De même que pour le mouvement Brownien fractionnaire, on peut définir plusieurs extensions en deux dimensions. Le *champ Brownien multifractionnaire isotrope* Z_H a pour covariance :

$$R_{Z_H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto \|\mathbf{x}\|^{H(\mathbf{x})+H(\mathbf{y})} + \|\mathbf{y}\|^{H(\mathbf{x})+H(\mathbf{y})} - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{H(\mathbf{x})+H(\mathbf{y})}$$

Quand au *drap Brownien multifractionnaire* W_H , sa covariance s'écrit :

$$R_{W_H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \propto \prod_{i=1}^2 \left\{ |x_i|^{H_i(\mathbf{x})+H_i(\mathbf{y})} + |y_i|^{H_i(\mathbf{x})+H_i(\mathbf{y})} - |x_i - y_i|^{H_i(\mathbf{x})+H_i(\mathbf{y})} \right\}$$

où $\mathbf{H} = (H_1, H_2)$ est une fonction à valeurs dans $]0, 1[$.



Le mouvement Brownien multifractionnaire a été utilisé dans plusieurs domaines (modélisation du trafic Internet, ingénierie financière, ...). Ses versions bi-dimensionnelles proposent des modèles pertinents quand il est nécessaire de contrôler et/ou d'analyser finement les propriétés locales de régularité des images : mentionnons des applications en synthèse de terrain [13] et en classification, par exemple dans le cadre d'images bio-médicales [17].

Un autre type intéressant de processus est obtenu en introduisant de l'anisotropie dans les versions bi-dimensionnelles du mouvement Brownien fractionnaire. L'anisotropie peut être contrôlée par exemple par des transformations linéaires spatiales, ou bien en travaillant directement sur des modèles discrets [29, 30]. De tels processus ont été utilisés pour la description de fonds sous-marins. Deux réalisations de processus fractals anisotropes sont présentées sur la figure 8.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Adler, *Porous Media: Geometry and Transport* Butterworth/Heinemann, Stoneham, MA, 1992.
- [2] D. Avnir, Ed., *The Fractal approach to Heterogeneous Chemistry*, Wiley, New York, 1989.
- [3] A. Ayache, S. Cohen, J. Lévy Véhel, *The covariance structure of multifractional Brownian motion*, ICASSP 2000.
- [4] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, AK Peters, 1993.
- [5] P. Bas, J.M. Chassery, F. Davoine, *Using the Fractal Code to Watermark Images*, Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing, vol. I, p. 469-473, Oct. 1998.
- [6] A. Benassi, S. Jaffard, D. Roux, *Gaussian Processes and Pseudodifferential Elliptic Operators*, Rev. Math. Iberoamericana 13(1), 1997.
- [7] J. Beran, *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman and Hall, New York 1994.
- [8] P. Doukhan, G. Oppenheim, M.S. Taqqu, *Theory and Applications of Long Range Dependence*, Birkhauser, Boston 2003.
- [9] K. Falconer, *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester 1990.
- [10] Y. Fisher, Ed., *Fractal Image Encoding and Analysis*, Springer Verlag, 1998.
- [11] F. Hausdorff, *Dimension und ausseres Mass*, Math. Annalen 79, 1919.
- [12] A. Bunde, S. Havlin, Ed., *Fractals and disordered systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [13] E. Herbin, *Terrain Modeling using Multifractional Brownian motion*, pré-tirage, 2002.
- [14] E. Herbin, J. Lévy Véhel, *2-microlocal analysis of Gaussian processes*, International Conference on fractal geometry and stochastics III, 2003.
- [15] H. Hurst, *Long term storage capacity of reservoirs*, Tr. Am. Soc. Civil Eng. 116, 1951.
- [16] S. Jaffard, *Multifractal Formalism for Functions, I and II*, Siam J. Math. Anal. 28 (4), 1997.
- [17] S. Leger, *Analyse stochastique de signaux multi-fractaux et estimations de paramètres*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2000.
- [18] P. Legrand, J. Lévy Véhel, *Bayesian Multifractal Signal Denoising*, ICASSP 2003, Hong Kong.
- [19] J. Lévy Véhel, P. Legrand, *Local regularity-based image interpolation*, pré-tirage, 2003.
- [20] J. Lévy Véhel, *Introduction to the Multifractal Analysis of Images*, in Fractal Image Encoding and Analysis, Yuval Fisher Editor, Springer Verlag, 1998.
- [21] J. Lévy Véhel, *Signal enhancement based on Hölder regularity analysis*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 132, p. 197-209, 2002.
- [22] J. Lévy Véhel, K. Daoudi, *Generalized IFS for Signal Processing*, IEEE DSP Workshop, Loen, Norway, September 1-4 1996.
- [23] J. Lévy Véhel, R. Vojak, *Multifractal Analysis of Choquet Capacities: Preliminary Results*, Adv. in Appl. Math., vol. 20, No. 1, p. 1-43, January 1998.
- [24] J. Chapuis, E. Lutun, *ArtiE-Fract: INteractive Evolution of Fractals*, 4th International Conference on Generative Art, Milano, Italy, 2001.
- [25] B.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1977.
- [26] B. B. Mandelbrot and J. Van Ness, *Fractional brownian motion, fractional noises and applications*, Siam Review, vol. 10, 422-437, 1968.
- [27] H.O. Peitgen, P.H. Richter, *The beauty of fractals*, Springer, New York, 1986.
- [28] R. Peltier, J. Lévy Véhel, *Multifractal Brownian Motion: definition and preliminary results*, rapport de recherche INRIA 2645, 1995.
- [29] B. Pesquet-Popescu, *Modélisation bidimensionnelle de processus non stationnaires et application à l'étude du fond sous-marin*, Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [30] B. Pesquet-Popescu, *Modèles fractionnaires bidimensionnels à espace discret*, Technique et science informatiques, 20, 9, p 1173-1200, 2001.
- [31] J. Puate, F. Jordan, *Using fractal compression scheme to embed a digital signature into an image*, Proceedings of SPIE Photonics East'96 Symposium, November 1996
- [32] L. F. Richardson, *Weather Prediction by numerical process*, Cambridge Univ. Press, 1922.
- [33] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Mayer et Muller, Berlin, 1895.

Manuscrit reçu le 11 février 2003

LES AUTEURS

Jacques LÉVY VÉHEL



Jacques Lévy Véhel est diplômé de l'École Polytechnique et de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, et docteur en Mathématiques Appliquées. Il est directeur de recherches à l'Institut National de Recherches en Informatique et en Automatique, où il anime l'équipe Fractales, qui travaille sur l'analyse et la modélisation des signaux complexes.