

Théorie élémentaire de l'échantillonnage périodique des fonctions à énergie finie

Basic properties of finite energy function uniform sampling

Bernard Lacaze¹

¹TéSA, 2 rue Camichel, BP7122, 31071 Toulouse cédex 7, France, Bernard.Lacaze@tesa.prd.fr

Manuscrit reçu le 18 février 2004

Résumé et mots clés

Cet article étudie l'échantillonnage périodique des « signaux à énergie finie », c'est-à-dire des fonctions de carré sommable. Le parti pris est de n'utiliser que des notions mathématiques élémentaires, apprises dans n'importe quelle filière scientifique (en tout cas, leur enseignement paraît souhaitable), comme l'intégrale de Riemann, les séries de Fourier et la transformation de Fourier. Les formules les plus simples d'interpolation sont linéaires, et ce sont les seules étudiées ici. Leur pouvoir de reconstruction est couramment relié à la notion de repliement. On s'est attaché à montrer en quoi cette notion intervient, et les résultats (que je ne revendique pas) pourront détruire quelques idées reçues. C'est aussi le but recherché...

Échantillonnage périodique, fonctions à énergie finie, repliement, généralisation de Papoulis, enseignement du traitement du signal.

Abstract and key words

This paper studies uniform sampling of finite energy functions (i.e. the set of real or complex functions u such as $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty$). The aim of this study is to only use elementary algebra known by most students, such as Riemann integral, Fourier series and Fourier integral. The simplest interpolation formulas are linear and are the only kind presented in this paper. Their approximation properties are linked to the aliasing principle. Many results may seem surprising. However, this is one of the main purpose of this paper.

Uniform sampling, finite energy signals, aliasing, Papoulis generalization, signal theory teaching.

1. Introduction

La conscience collective est porteuse du message suivant. Si un « signal » est échantillonné périodiquement au pas T , sa reconstruction exacte ne peut se faire que lorsque son « spectre » $s(f)$ (une quantité positive ou nulle liée au signal et définie sur \mathbb{R}) vérifie la condition de non-repliement, ou d'absence d'aliasing (on dit aussi qu'il est alias-free) :

$$s(f) s\left(f + \frac{n}{T}\right) = 0$$

pour tout $f \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

L'affirmation au-dessus, comme on le verra, est fautive en général, si l'on ne précise pas le cadre utilisé, et notamment les définitions à adopter pour le « signal ». Il y en a plusieurs possibles correspondant à des situations physiques différentes (et non seulement dues à des vues mathématiques...), qui amènent des définitions de « spectres » différentes (et éventuellement une boîte d'outils mathématiques adaptée à chaque cas). La sorte de reconstruction évoquée au-dessus, exacte ou approchée, doit être définie de manière appropriée. En particulier, il ne suffit pas de parler de « reconstruction linéaire » pour se croire quitte de plus amples précisions. Encore faut-il caractériser l'ensemble sur lequel porte la reconstruction.

Une fois le cadre précisé, on peut considérer juste l'affirmation ci-dessus dans certaines situations particulières. Reste à démontrer les formules de reconstruction de manière correcte. Il faut admettre que, là aussi, il y a beaucoup à redire. En particulier sur l'usage que l'on fait des distributions (une théorie délicate...), pour un but que l'on peut atteindre avec des moyens à la portée de tous (les séries de Fourier..).

En gros, on peut développer une théorie du signal dans chacun des cas suivants

- les signaux déterministes à énergie finie
- les signaux aléatoires à énergie finie
- les signaux déterministes à puissance finie
- les signaux aléatoires à puissance finie.

On étudiera ici le premier cas, car il lui suffit de connaissances élémentaires sur les séries de Fourier et la transformation de Fourier, dans le cadre des fonctions intégrables au sens de Riemann, et décroissant suffisamment vite. À condition d'admettre quelques propriétés (associées aux fonctions définies positives), le troisième cas s'étudie sans trop de difficultés [10]. Les deuxième et quatrième situations font appel au calcul des probabilités. Pour de plus amples détails, on peut se référer à [1], [2] ou [3].

Un signal à énergie finie $u(t)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur \mathbb{R} (t est le « temps ») telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt < \infty.$$

Pour justifier sans mal les calculs, on suppose que $u(t)$ est bornée, décroît suffisamment vite (par exemple $|u(t)| < a/|t|^b$

pour un $b > 1$), avec en plus la continuité de $u(t)$, sauf éventuellement en des points isolés. Les intégrales utilisées sont celles de Riemann et les ensembles de points non dénombrables seront au plus des réunions finies d'intervalles (ouverts, de longueur finie ou infinie).

L'utilisation de la théorie de la mesure et de l'intégration permet de supprimer certaines des hypothèses au-dessus [1]. Mais tout praticien admettra que ces hypothèses sont réalistes.

Ainsi, la transformée de Fourier $U(f)$ existera (f est la « fréquence »), et on pourra même appliquer (aux points de continuité), la formule inverse

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

$$\iff u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{2i\pi ft} df.$$

Dans le cadre choisi ici, $|U(f)|^2$ est le « spectre énergétique » de $u(t)$. C'est la transformée de Fourier du produit de convolution $[u * u^*](t)$ (l'étoile en position supérieure est pour le conjugué). Le spectre ne contient pas l'information de position de $u(t)$ ni plus généralement d'information de phase. Néanmoins, c'est une caractérisation très forte de $u(t)$, beaucoup plus forte que dans le cas des signaux à puissance finie.

Une dilatation du temps qui fait passer à $v(t) = u(tT)$ induit une dilatation inverse pour $V(f) = \frac{1}{T}U(f/T)$, ce qui fait qu'il n'y a pas d'inconvénient à prendre $T = 1$, ce qui simplifie les notations.

Mais, qu'est-ce-que une formule d'échantillonnage? Dans le cadre choisi, elle relie $u(t)$ à ses échantillons $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. La plupart du temps, on désire une formule linéaire, ce qui fait que l'on recherche un ensemble de fonctions $b_n(t)$ telles que

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(t) u(n).$$

L'existence et l'unicité de ces quantités est un premier problème sur lequel plane un certain nombre d'idées fausses. La première est qu'il serait nécessaire que le spectre soit sans repliement (voir au dessous). C'est faux, même si l'on se limite à la catégorie des formules de la forme

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(t-n) u(n) \quad (1)$$

qui semblent apparaître plus volontiers. En réalité, beaucoup de signaux à énergie finie ont une représentation du type précédent. Généralement, la fonction $b(t)$ dépend explicitement de $u(t)$. Mais on peut définir des classes de fonctions pour lesquelles ce genre de formules existe, ne dépend pas explicitement des fonctions mais de leur support (ensemble des points où $U(f)$ et donc le spectre $s(f) = |U(f)|^2$ ont une valeur non nulle). C'est dans ce cadre que la notion de repliement intervient.

On dit qu'un ensemble Δ se replie sur un ensemble Δ' (qui peut être Δ) lorsque

$$\Delta \cap \left[\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^*} \{\Delta' + n\} \right] \neq \emptyset.$$

Evidemment, la propriété de repliement est symétrique en ce sens que le repliement de Δ sur Δ' implique le repliement de Δ' sur Δ . Un spectre $s(f)$ est sans repliement lorsque qu'il en est ainsi de son support. Cela signifie ici (puisque la période d'échantillonnage est prise égale à 1) :

$$s(f) s(f + n) = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $f \in \mathbb{R}$.

Dans un premier temps, on démontrera la formule d'échantillonnage sur un intervalle. Puis on établira le formule sommatoire de Poisson, qui est la clé de la « réciproque ». Ensuite, on étudiera la faisabilité de (1), puis les améliorations amenées par le préfiltrage, opération couramment utilisée dans la pratique. L'étude du cas complexe et de la généralisation de Papoulis terminera l'exposé.

Les seuls outils mathématiques utilisés dans la suite sont les séries de Fourier et l'intégrale de Fourier sous leur formes les plus simples, celles qui utilisent des intégrales de Riemann. On pourrait mieux justifier certains résultats et même les améliorer en utilisant la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue, mais cet investissement peut paraître lourd. En tout cas, on verra que l'utilisation des algorithmes portant sur des « Dirac », ou l'utilisation de la théorie des distributions, n'est pas nécessaire.

2. La formule d'échantillonnage sur un intervalle

2.1. La formule de Shannon

Elle s'applique (sous un nom ou un autre), pour des spectres nuls à l'extérieur de l'intervalle $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (rappelons que $T = 1$) :

$$u(t) = \int_{-1/2}^{1/2} U(f) e^{2i\pi ft} df. \tag{2}$$

Le DSF (développement en série de Fourier) de $e^{2i\pi ft}$ sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (comme fonction de f , pour t fixé non entier) vérifie :

$$e^{2i\pi ft} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} e^{2i\pi fn}, f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

puisque $\frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi f(t-n)} df$. On reporte (3) dans (2), et on intervertit les ordres de sommation \sum et \int (en supposant $U(f)$ continue en $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$) :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} \int_{-1/2}^{1/2} U(f) e^{2i\pi fn} df.$$

D'où la formule dite d'échantillonnage ou de Shannon :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} u(n). \tag{4}$$

2.2. Sur un autre intervalle

Dans le cas plus général où

$$u(t) = \int_a^{a+1} U(f) e^{2i\pi ft} df \tag{5}$$

il faut effectuer un DSF de $e^{2i\pi ft}$ sur $(a, a+1)$ [4], d'où la formule

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(2a+1)(t-n)} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} u(n).$$

Incidentement, insistons sur la remarque suivante : les séries de Fourier ne servent pas à développer des fonctions périodiques... elles développent des fonctions définies sur un intervalle, et le développement est périodique.

Ainsi, $e^{2i\pi ft}$ (t fixé non entier) n'est pas une fonction périodique de période 1 en f , mais les DSF

$$\begin{cases} g(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} e^{2i\pi fn} \\ h(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{3i\pi (t-n)} \frac{\sin \pi (t-n)}{\pi (t-n)} e^{2i\pi fn} \end{cases}$$

sont des fonctions égales à $e^{2i\pi ft}$ respectivement dans $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et dans $(1, 2)$, et ceux sont des fonctions périodiques de période 1 en f .

3. La formule sommatoire de Poisson

3.1. Une version

Dans le cas général (comme d'habitude, il faut pouvoir intervertir des signes de sommation)

$$\begin{cases} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{2i\pi ft} df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} U(f) e^{2i\pi ft} df \\ = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n) e^{2i\pi nt} \right] e^{2i\pi ft} df \end{cases} \tag{6}$$

que l'on présente sous la forme

$$\begin{cases} u(t+m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V_t(f) e^{2i\pi f(t+m)} df \\ V_t(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n) e^{2i\pi nt}, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Les $u(t+m)$, $m \in \mathbb{Z}$, sont les coefficients de Fourier sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de la fonction $V_t(f) e^{2i\pi ft}$ (t est fixé), d'où l'égalité (sous les conditions habituelles de convergence) :

$$e^{2i\pi ft} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n) e^{2i\pi nt} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t+m) e^{-2i\pi mf}, \quad (7)$$

$$f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

On utilisera surtout le cas $t=0$, valable pour tout $f \in \mathbb{R}$, puisque les termes de l'égalité sont alors périodiques :

$$V_0(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) e^{-2i\pi mf}. \quad (8)$$

$V_0(f)$ est la version « repliée » de $U(f)$; on ajoute à $U(f)$ ses « repliements » éventuels $U(f+n)$, et, comme on le sait, leur présence ou leur absence est au centre de la théorie de l'échantillonnage.

3.2. Application

Supposons que, pour chaque $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, un terme au plus dans $\sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n)$ est différent de 0 (absence de repliement ou d'aliasing), alors (8) s'écrit :

$$U(f+n(f)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) e^{-2i\pi mf}, \quad (9)$$

$$f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), n(f) \in \mathbb{Z}.$$

Posons $\Delta_q = \{f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); n(f) = q\}$. Les Δ_q sont disjoints par construction. En utilisant (6) et (9) :

$$\begin{cases} u(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U(f+n(f)) e^{2i\pi t(f+n(f))} df = \dots \\ \dots \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i\pi t(f+n(f))-2i\pi mf} df = \dots \\ \dots \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi qt} \int_{\Delta_q} e^{2i\pi f(t-m)} df \right]. \end{cases}$$

On obtient donc une formule d'échantillonnage, où les coefficients des $u(m)$

- dépendent des Δ_q c'est-à-dire d'ensembles où $U(f+q)$ est non nul, et d'autre part

- sont fonction de $(t-m)$:

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(t-m) u(m) \\ b(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi qt} \int_{\Delta_q} e^{2i\pi ft} df \\ \Delta_q = \{f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); n(f) = q\}. \end{cases} \quad (10)$$

3.3. Exemples

On retrouve (q est chaque fois un entier)

(4) pour $U(f) = 0, f \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \implies \Delta_0 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(5) pour $U(f) = 0, f \notin (a, a+1), q < a < q + \frac{1}{2}$ ou $q - \frac{1}{2} < a < q$

$\implies \Delta_q = (a - q, \frac{1}{2}), \Delta_{q+1} = (-\frac{1}{2}, a - q)$

(11) pour $U(f) = 0, f \notin (-q - \frac{1}{2}, -q) \cup (q, q + \frac{1}{2}), \implies \Delta_q = (0, \frac{1}{2}), \Delta_{-q} = (-\frac{1}{2}, 0),$

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} (t-m) \cos \left[2\pi qt + \frac{\pi}{2} (t-m) \right]}{\pi (t-m)} u(m) \quad (11)$$

(12) pour $U(f) = 0, f \notin (-q, -q + \frac{1}{2}) \cup (q - \frac{1}{2}, q), \implies \Delta_{-q} = (0, \frac{1}{2}), \Delta_q = (-\frac{1}{2}, 0)$

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} (t-m) \cos \left[2\pi qt - \frac{\pi}{2} (t-m) \right]}{\pi (t-m)} u(m). \quad (12)$$

On aura noté que l'hypothèse de non repliement exprimée par (9) n'est pas vérifiée lorsque le support de $U(f)$ est $(-a, -a + \frac{1}{2}) \cup (a - \frac{1}{2}, a), a > 0$, avec a non entier. La figure 1 illustre les formules (4), (5), (11), (12). Au-dessus d'un axe de coordonnées, on voit (en surimpression) le support de $U(f)$, et au-dessous, les ensembles Δ_q correspondants (ceux qui ne sont pas vides). On peut construire sans difficulté des exemples comportant plus de deux ensembles Δ_q non vides, et même une infinité.

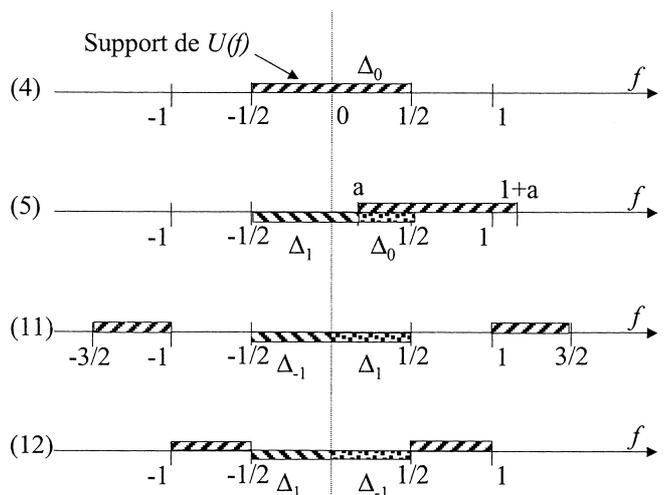


Figure 1. Les ensembles Δ_q non vides correspondent aux formules (4), (5), (11) et (12).

4. L'erreur

Dans la pratique, la condition (2) n'est qu'une approximation. En réalité, on peut seulement assurer que $U(f)$ est « négligeable » en dehors de $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Ceci étant posé, l'application de la formule de Shannon amène une erreur de reconstruction que l'on peut mesurer par la quantité σ^2 définie ci-dessous

$$\begin{cases} \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 dt \\ \tilde{u}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-m)}{\pi(t-m)} u(m). \end{cases} \quad (13)$$

On définit σ de cette manière plutôt que par

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t) - \tilde{u}(t)| \text{ ou } \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)| dt$$

ou une autre distance parce que, physiquement, ce σ^2 représente une énergie, et parce que les formules du type Parseval permettent de mener le calcul à son terme.

Reprenons la formule sommatoire de Poisson sous la forme simplifiée (8)

$$V_0(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) e^{-2i\pi mf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n).$$

$V_0(f)$ est donc la somme de la série de Fourier dont les coefficients sont les $u(m)$. D'autre part, $\frac{\sin \pi(x-m)}{\pi(x-m)}$ est le coefficient de Fourier associé à la fonction périodique $g_x(f)$ de période 1 telle que

$$g_x(f) = e^{2i\pi xf}, f \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Remplaçons dans (13) chacun des produits $\frac{\sin \pi(t-m)}{\pi(t-m)} u(m)$ par

$$u(m) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi f(t-m)} df.$$

On obtient (c'est l'égalité de Parseval des séries de Fourier)

$$\tilde{u}(t) = \int_{-1/2}^{1/2} V_0(f) e^{2i\pi ft} df.$$

En conséquence, la TF $\tilde{U}(f)$ de $\tilde{u}(t)$ est $V_0(f)$ sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et 0 ailleurs; celle de $u(t) - \tilde{u}(t)$ est égale à

$$\begin{cases} U(f) - V_0(f), f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ U(f), |f| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc (Parseval pour les TF)

$$\sigma^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{n \neq 0} U(f+n) \right|^2 df + \int_{|f| > 1/2} |U(f)|^2 df. \quad (14)$$

Finalement, pour $U(f)$ continue, $\sigma^2 = 0$ si et seulement si $U(f) = 0, f \notin (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ce qui est une condition plus forte que le non repliement.

5. Une réciproque

5.1. Une formule d'interpolation générale

Les formules (4), (5), (11), (12), sont de la forme

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(t-n) u(n). \quad (15)$$

Inversement, cherchons à déterminer les conditions d'existence d'une fonction $b(t)$ vérifiant (15) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Définissons $w(t)$ par

$$\begin{cases} w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(t-n) u(n) \\ b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(f) e^{2i\pi ft} df \\ \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - w(t)|^2 dt \end{cases} \quad (16)$$

On a $b(t-n) = \int_{-\infty}^{\infty} [B(f) e^{-2i\pi fn}] e^{2i\pi ft} df$. En utilisant l'égalité de Parseval et (8) dans la dernière ligne de (16), on obtient

$$\begin{cases} \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |U(f) - B(f) V_0(f)|^2 df \\ V_0(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) e^{-2i\pi mf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n). \end{cases} \quad (17)$$

$\sigma = 0$ est équivalent à $U(f) - B(f) V_0(f) = 0$ sur \mathbb{R} (au moins aux points de continuité), ce qui fait qu'il est possible de vérifier l'égalité (15) dès que $B(f) = U(f) / V_0(f)$ pour les f tels que $V_0(f) \neq 0$. Il faut néanmoins supposer que $V_0(f) \neq 0$ lorsque $U(f) \neq 0$.

On voit que la condition de repliement n'intervient pas, tant que l'on s'adresse à une fonction précise et non pas à une classe de fonctions.

5.2. Exemples

1) Considérons le cas

$$\begin{cases} U(f) = 1, |f| \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ u(t) = \frac{2}{\pi t} \cos \pi t \sin \frac{\pi t}{2}, u(0) = 1 \end{cases}$$

où la « largeur » du spectre est 1, mais avec repliement. Par exemple, la partie dans $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ se replie sur $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ qui est déjà occupée. On a $V_0(f) = 2U(f)$ sur le support de $U(f)$. On peut donc prendre $B(f) = \frac{1}{2}$ sur le support de $U(f)$ et 0 ailleurs. D'où $b(t) = \frac{1}{2}u(t)$, qui amène à la formule d'échantillonnage suivante

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t-n) u(n).$$

La formule obtenue s'écrit aussi

$$u(t) = -\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi t \cos \frac{\pi t}{2}}{(2n+1)(t-2n-1)}$$

Quelques simplifications amènent à l'identité bien connue

$$\operatorname{tg} x = 8x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 - 4x^2}.$$

2) De même, en prenant $u(t)$ et $U(f)$ paires telles que

$$\begin{cases} u(t) = \frac{(\sin \pi t/2)^4}{(\pi t/2)^2} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \\ U(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-2f), & 0 \leq f \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(1-2f), & \frac{1}{2} \leq f \leq 1 \\ 0, & f > 1 \end{cases} \end{cases}$$

on arrive aux formules suivantes, la première du type (15), la deuxième après des manipulations élémentaires

$$\begin{cases} u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n) \cos^2 \frac{\pi}{2}(t-n)}{\pi(t-n)} u(n) \\ \frac{\pi^2}{32} (x - \operatorname{tg} x) = x^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{1}{\pi^2(2p+1)^2 - 4x^2}. \end{cases}$$

Ce développement de $\operatorname{tg} x$ converge plus vite que celui donné dans l'exemple précédent.

3) Le support de $U(f)$ peut être de longueur finie ou infinie. Prenons par exemple (a réel)

$$\begin{cases} U(f) = a^{|\bar{f}|}, \underline{f} < c, & U(f) = 0, \underline{f} > c \\ u(t) = e^{i\pi ct} \frac{\sin \pi ct}{\pi t} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a \cos 2\pi t} \end{cases}$$

où $f = \bar{f} + \underline{f}$, $\bar{f} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \underline{f} < 1$, et $-1 < a < 1$, $0 < c < 1/2$. \bar{f} et \underline{f} sont les parties entières et fractionnaires de f . Le support de $U(f)$ a une longueur infinie. $V_0(f)$ et $B(f)$ se calculent aisément

$$\begin{cases} V_0(f) = \frac{1+a}{1-a}, \underline{f} < c \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \\ B(f) = \frac{1-a}{1+a} U(f) \implies b(t) = \frac{1-a}{1+a} u(t) \end{cases}$$

On obtient ainsi le développement et la formule particulière

$$\begin{cases} u(t) = \frac{1-a}{1+a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t-n) u(n) \\ \frac{\sin \pi ct}{\pi t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi c(t-n)}{\pi(t-n)} \frac{\sin \pi cn}{\pi n}. \end{cases}$$

4) Si l'on prend

$$\begin{cases} U(f) = \begin{cases} 1, & f \in (0,1) \\ -1, & f \in (-1,0) \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \\ u(t) = 2i \frac{\sin^2 \pi t}{\pi t}, \end{cases}$$

alors $V_0(f) = 0$, pour tout f et donc $\sigma > 0$, ce qui est à rapprocher évidemment du fait que $u(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La figure 2 illustre les 4 exemples de ce paragraphe. On y a représenté les diverses fonctions $U(f)$ et leur version repliée $V_0(f)$ sur $(-1/2, 1/2)$.

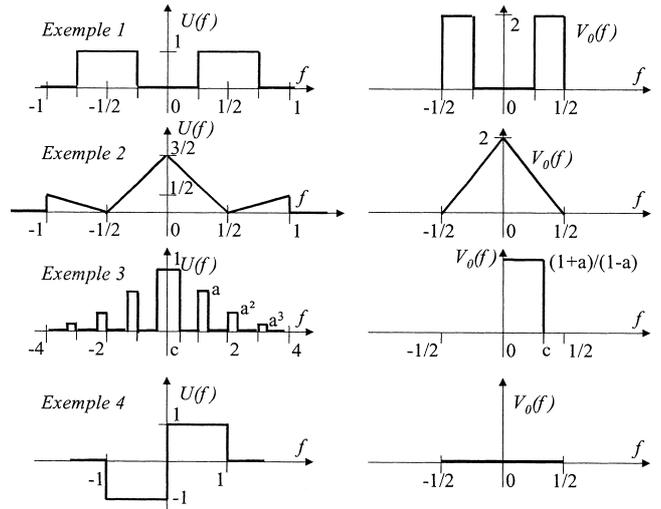


Figure 2. Spectres $U(f)$ et spectres repliés $V_0(f)$ dans les exemples 1 à 4.

5.3. Une CNS de reconstruction

Reprenons (17). Sous des hypothèses de régularité suffisantes, une CNS pour que $\sigma = 0$ est que

$$U(f) = B(f) V_0(f) = B(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(f+n), f \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

$\Delta \subset \mathbb{R}$ étant fixé, notons \mathcal{F}_Δ l'ensemble des $U(f)$ tels que $U(f) = 0, f \notin \Delta$ (c'est l'ensemble des $U(f)$ dont le support est contenu dans Δ). Si l'on désire que $\sigma = 0$ pour tous les $U \in \mathcal{F}_\Delta$, il est nécessaire que (puisque'un élément particulier de \mathcal{F}_Δ est défini par $U(f) = 1, f \in \Delta \cap (n, n+1)$ et 0 ailleurs, $n \in \mathbb{Z}$):

$$B(f) = 1, f \in \Delta \text{ et } 0, f \in \cup_{n \in \mathbb{Z}^*} \{\Delta + n\}.$$

ce qui implique

$$\forall f \in \Delta, \forall n \in \mathbb{Z}^*, \text{ alors } f+n \notin \Delta.$$

La condition précédente est aussi une condition suffisante pour que $\sigma = 0$, puisqu'alors, on aura $V_0(f) = U(f)$ sur Δ .

En conséquence, une CNS pour que $\sigma = 0$ pour tous les éléments de \mathcal{F}_Δ est que Δ soit sans repliement. Dans ce cas, on peut construire une formule d'interpolation de la forme (15) où le « noyau » $b(t)$ est défini par

$$b(t) = \int_{\Delta} e^{2i\pi ft} df. \quad (19)$$

C'est exactement ce qui a été fait dans les § 1, 2 et 3. Par construction, le noyau $b(t)$ ne dépend pas des valeurs de la fonction à interpoler, mais de l'ensemble sur lequel sa transfor-

mée de Fourier est non nulle. La formule d'interpolation s'applique alors pour tous les éléments de \mathcal{F}_Δ . C'est dans ce cadre que la condition de non repliement devient nécessaire et suffisante.

On notera enfin que (18) ne définit pas complètement $B(f)$ lorsque la longueur de Δ est inférieure à 1 (situation de « sur-échantillonnage »). Dans ce cas, (19) n'est pas unique; on peut y remplacer Δ par $\Delta' = \Delta \cup \delta$ pourvu que Δ' soit encore sans repliement.

5.4. Exemples

1) Dans le cas $\Delta = (-q - \frac{1}{2}, -q) \cup (q, q + \frac{1}{2})$, $q \in \mathbb{Z}^+$ on retrouve (11) :

$$b(t) = \int_{\Delta} e^{2i\pi ft} df = \frac{2}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{2} \cos \left[2\pi q t + \frac{\pi t}{2} \right].$$

2) Dans le cas $\Delta = (-q, -q + \frac{1}{2}) \cup (q - \frac{1}{2}, q)$, $q \in \mathbb{Z}^+$ on retrouve (12) :

$$b(t) = \int_{\Delta} e^{2i\pi ft} df = \frac{2}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{2} \cos \left[2\pi q t - \frac{\pi t}{2} \right].$$

3) Si $\Delta = (-q - \theta, -q) \cup (q, q + \theta)$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$, on obtient

$$b(t) = \int_{\Delta} e^{2i\pi ft} df = \frac{2}{\pi t} \sin \pi \theta t \cos [\pi t (2q + \theta)].$$

Dans ce cas, on aura aussi

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi t} \sin \pi \mu t \cos [\pi t (2q + \mu)] u(n)$$

pour tous les μ tels que $\mu \geq \theta$ (situation de sur-échantillonnage tant que $\theta < 1/2$).

5.5. Remarque

1) On peut construire d'autres formules d'échantillonnage, valables pour des ensembles de fonctions différents de \mathcal{F}_Δ . Par exemple, on se donne un ensemble Δ sans repliement, et une application α de Δ dans \mathbb{Z}^* , puis on définit Δ' par $\Delta' = \Delta \cup \alpha(\Delta)$ (on a obligatoirement $\Delta \cap \alpha(\Delta) = \emptyset$). Maintenant, on considère $\mathcal{G}_{\Delta, \alpha}$, l'ensemble des $U(f)$ tels que

$$U(f) = U(f + \alpha(f)), f \in \Delta \text{ et } U(f) = 0, f \in \mathbb{R} - \Delta'.$$

Puisque Δ est sans repliement, on a $V_0(f) = 2U(f)$ sur Δ' . (18) est donc vérifiée pour

$$B(f) = \frac{1}{2}, f \in \Delta' \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Evidemment, Δ' est avec (un seul) repliement par construction et peut être de longueur allant jusqu'à 2. $\mathcal{G}_{\Delta, \alpha}$ est une classe qui semble plus restreinte que \mathcal{F}_Δ , mais cet exemple montre l'importance de bien définir les ensembles de fonctions utilisées. On peut aussi envisager des classes à plusieurs repliements qui amènent à d'autres valeurs de $B(f)$.

2) Inversement, on suppose que (18) est vérifiée dans les conditions suivantes. Pour un certain $\Delta' \subset \mathbb{R}$, on a $U(f) \neq 0$, $B(f) = \frac{1}{2}, f \in \Delta'$ (et $B(f) = U(f) = 0, f \notin \Delta'$). Alors, pour chaque $f \in \Delta'$, il existe (au moins un) $n(f) \in \mathbb{Z}^*$ tel que $U(f + n(f)) \neq 0$ et, à la fois

$$\begin{cases} U(f) = U(f + n(f)) + \sum_{k \neq 0, n(f)} U(f + k) \\ U(f + n(f)) = U(f) + \sum_{k \neq 0, n(f)} U(f + k) \end{cases}$$

ce qui impose $U(f + n(f)) = U(f)$, et aussi l'unicité de $n(f)$ (car les $U(f + k), k \in \mathbb{Z}^*$ ne peuvent être égaux qu'à 0 ou $U(f)$).

On peut donc décomposer Δ' sous la forme $\Delta' = \Delta_1 + \Delta_2$, où $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, et

$$\begin{cases} \Delta_1 = \{f \in \Delta', n(f) > 0\} \\ \Delta_2 = \{f \in \Delta', n(f) < 0\} \end{cases}$$

Ainsi, Δ_1 et Δ_2 sont sans repliement (mais, par construction, ils se replient l'un sur l'autre).

5.6. Exemple

Soit n_0 un entier donné différent de 0. Posons $\Delta = (a, a + 1)$, $\alpha(f) = n_0$ pour $f \in \Delta$ (donc $\Delta_1 = \Delta, \Delta_2 = \Delta + n_0$ pour $n_0 > 0$). Pour tous les éléments de $\mathcal{G}_{\Delta, \alpha}$, on a (15) vérifiée avec

$$b(t) = \frac{1}{2} \int_{\Delta'} e^{2i\pi ft} df = \frac{e^{i\pi t(2a+1)t}}{2} [1 + e^{2in_0\pi t}] \frac{\sin \pi t}{\pi t}.$$

Ainsi, pour $a = 0, n_0 = -1$ (donc $\Delta = (0, 1)$, $\Delta' = (-1, 1)$, $U(f) = f^2(1 - f)^2, f \in (0, 1)$:

$$\begin{cases} u(t) = \frac{3 \cos \pi t}{(\pi t)^3} \left[-\frac{\sin \pi t}{3} - \frac{\cos \pi t}{\pi t} + \frac{\sin \pi t}{(\pi t)^2} \right], u(0) = \frac{1}{15} \\ u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi t}{2\pi(t-n)} u(n). \end{cases}$$

d'où l'on peut déduire la formule

$$\cotg x - \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi n)^4} \frac{2x^5}{x^2 - (\pi n)^2},$$

$x \notin \pi \mathbb{Z}$.

6. Préfiltrage

6.1. Le cas élémentaire

Le préfiltrage est une opération couramment effectuée en pratique pour diverses raisons, comme la protection contre le bruit, ou la séparation de bandes [5]. Bien que cette opération élimine en même temps de l'information, elle peut avoir un effet positif en supprimant du repliement, si elle se fait de manière adéquate.

Soit \mathcal{G} le filtre passe-bande sur $(-1/2, 1/2)$, et $w(t) = \mathcal{G}[u](t)$. Cela signifie que (par définition) :

$$w(t) = \mathcal{G}[u](t) = \int_{-1/2}^{1/2} U(f) e^{2i\pi f t} df$$

La formule d'échantillonnage habituelle s'applique évidemment à $w(t)$:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} w(n)$$

La distance entre $u(t)$ et $w(t)$ est définie par

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - w(t)|^2 dt = \int_{|f|>1/2} |U(f)|^2 df \quad (20)$$

On voit donc que, dans le cas de repliement, $w(t)$ est plus proche de $u(t)$ que $\tilde{u}(t)$ définie en (13) (l'erreur σ , dans ce cas, est donnée par (14)). Donc le préfiltrage, avant échantillonnage, améliore la reconstruction, lorsque l'on utilise la formule d'échantillonnage habituelle.

6.2. La généralisation

De manière un peu plus générale, considérons la famille \mathcal{G}_Δ des filtres passe-bande sur Δ . La sortie $w(t)$ de \mathcal{G}_Δ vérifie (par définition) :

$$w(t) = \mathcal{G}_\Delta[u](t) = \int_{\Delta} U(f) e^{2i\pi f t} df$$

Supposons que Δ est sans repliement. Comme expliqué dans § 5, $w(t)$ peut-être reconstruit exactement à partir des échantillons $w(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. L'écart entre u et w peut être mesuré par la quantité

$$\sigma_\Delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - w(t)|^2 dt = \int_{f \notin \Delta} |U(f)|^2 df.$$

Étant donné $U(f)$, il existe des ensembles (sans repliement) Δ_U qui minimisent σ_Δ^2 . Ils vérifient

$$f \in \Delta_U \implies |U(f)| \geq |U(f+n)|, n \in \mathbb{Z}.$$

Cela signifie que, pour chaque $f \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on sélectionne un des entiers relatifs $n_U(f)$ qui maximise $|U(f+n)|$, $n \in \mathbb{Z}$. On obtient ainsi un ensemble sans repliement de largeur égale au plus à 1 (suivant que l'on prend en compte ou non la condition $|U(f+n)| > 0$). Il faut évidemment que l'ensemble Δ_U obtenu soit suffisamment régulier pour que les intégrales sur Δ_U aient un sens [5].

6.3. Exemple

$u(t)$ et $U(f)$ sont définis par

$$\begin{cases} U(f) = |f|, |f| < 1 \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \\ u(t) = \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} - \left[\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right]^2. \end{cases}$$

Le filtre \mathcal{G}_Δ qui minimise σ_Δ a la forme

$$G_\Delta(f) = 1, |f| \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

puisque $U(f+1) > U(f)$ pour $-\frac{1}{2} < f < 0$ et $U(f-1) > U(f)$ pour $0 < f < \frac{1}{2}$. La meilleure formule d'interpolation utilisant $w(t) = \mathcal{G}_\Delta[u](t)$ et l'erreur σ_Δ vérifient

$$\begin{cases} w(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi t - \sin \pi(t-m)}{\pi(t-m)} w(m) \\ \sigma_\Delta^2 = \frac{1}{12}. \end{cases}$$

La valeur de σ_Δ^2 est à comparer avec $\int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df = \frac{2}{3}$. La figure 3 montre $U(f)$ et $[G_\Delta U](f)$, c'est-à-dire la situation avant et après le préfiltrage.

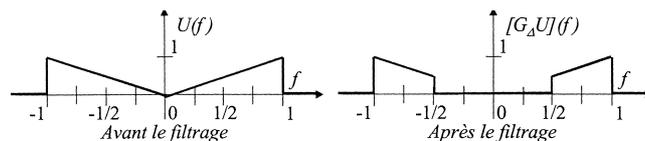


Figure 3. Spectres avant et après filtrage.

7. Le cas complexe

7.1. Le double échantillonnage

1) Tout ce qui précède est valable dans le cas de fonctions à valeurs réelles aussi bien que complexes. Mais, dans ce dernier cas, la connaissance des $u(n)$ implique celle des parties réelle et imaginaire $u_{\mathcal{R}}(n)$ et $u_{\mathcal{I}}(n)$. Donc, on peut chercher une approximation de la forme

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(t-n)u_{\mathcal{R}}(n) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(t-n)u_{\mathcal{I}}(n),$$

le cas déjà étudié revenant à prendre $c(t) = b(t)$ [6]. On peut dire que l'on est dans le cas d'un double échantillonnage.

Plaçons-nous dans le cas un peu plus général où

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

$u_1(t)$ et $u_2(t)$ étant réels ou complexes et connus pour $t \in \mathbb{Z}$. L'approximation cherchée est de la forme

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(t-n)u_1(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(t-n)u_2(n).$$

Avec des notations évidentes, l'erreur de reconstruction sera encore définie par

$$\begin{cases} \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |[U - BV_1 - CV_2](f)|^2 df \\ V_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_1(f+n), \\ V_2(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_2(f+n) \end{cases} \quad (21)$$

où V_1 et V_2 sont les versions repliées de U_1 et U_2 .

Maintenant, on considère les ensembles disjoints Δ_1 , Δ_2 , Δ_{12} et la fonction $R(f)$ (ne s'annulant pas sur Δ_{12}) telles que

$$\begin{cases} U_1(f) = 0, f \notin \Delta_1 \cup \Delta_{12} \\ U_2(f) = 0, f \notin \Delta_2 \cup \Delta_{12} \\ U_2(f) = [RU_1](f), f \in \Delta_{12} \end{cases} \quad (22)$$

En d'autres termes, $u_1(t)$ a deux composantes, l'une sur Δ_1 et l'autre sur Δ_{12} . Il en est de même pour $u_2(t)$, mais sur Δ_2 et Δ_{12} . Le « filtre de réponse fréquentielle $R(f)$ » relie les deux composantes sur Δ_{12} .

Considérons l'ensemble des $u(t)$ qui vérifient (22). L'erreur σ définie dans (21) se décompose sous la forme (avec $B(f) = C(f) = 0, f \notin \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_{12}$)

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_{12}^2 \\ \sigma_1^2 = \int_{\Delta_1} |[U_1 - BV_1 - CV_2](f)|^2 df \\ \sigma_2^2 = \int_{\Delta_2} |[U_2 - BV_1 - CV_2](f)|^2 df \\ \sigma_{12}^2 = \int_{\Delta_{12}} |[U - BV_1 - CV_2](f)|^2 df. \end{cases} \quad (23)$$

Comme on l'a vu précédemment, on pourra généralement trouver des fonctions $b(t)$ et $c(t)$ vérifiant (23) qui annulent σ . Mais qui seront attachées à $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Le problème est plutôt de trouver des conditions sur les ensembles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{12}$ destinées à construire des formules ne dépendant que de ces ensembles (et éventuellement de $R(f)$), et non des valeurs prises par $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur ces ensembles.

2) Tout d'abord, on a $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ dans le cas suivant

$$\begin{cases} B(f) = 1, C(f) = 0, f \in \Delta_1, \text{ et } \Delta_1 \text{ est sans repliement} \\ B(f) = 0, C(f) = 1, f \in \Delta_2, \text{ et } \Delta_2 \text{ est sans repliement} \\ \Delta_{12} \text{ est sans repliement sur } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \end{cases} \quad (24)$$

Prenons $U_1(f) = 1, f \in \delta_{1n} = \Delta_1 \cap (n, n+1), n \in \mathbb{Z}$ et 0 ailleurs, et $U_2(f) = 0$ partout. Alors, $\sigma_1 = 0$ implique $B(f) = 1, f \in \delta_{1n}$, et donc $B(f) = 1, f \in \Delta_1$ (en faisant varier n). Cette condition implique que Δ_1 est sans repliement (prendre $U_1(f) = 1$ sur $\delta_{1n} \cup \delta_{1m}$). On vérifie alors que ces relations ne tiennent pas compte de la valeur de $R(f)$. Mais ce n'est pas le cas lorsqu'il y a un repliement de Δ_{12} sur Δ_1 et/ou Δ_2 .

3) Pour annuler σ_{12} on écrit

$$\begin{cases} \sigma_{12}^2 = \int_{\Delta_{12}} |[U_1(1+R) - BV_1 - CV_2](f)|^2 df \\ V_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_1(f+n) \\ V_2(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_2(f+n). \end{cases}$$

En prenant $U_1(f) = 1$ dans $\delta_{12n} = \Delta_{12} \cap (n, n+1)$, et 0 ailleurs, on obtient la condition.

$$\sigma_{12} = 0 \implies [1 + R - B - CR](f) = 0, f \in \Delta_{12}. \quad (25)$$

Si Δ_{12} est sans repliement, la condition est suffisante, et donc on peut prendre $B(f) = C(f) = 1, f \in \Delta_{12}$ (valeurs indépendantes de $R(f)$).

Si Δ_{12} a des repliements, la condition (25) n'est pas suffisante, comme le montre la situation suivante.

4) Pour fixer les idées, prenons $\Delta_{12} = (-1, 1), \Delta_1 = \Delta_2 = \emptyset$. Dans ce cas :

$$\sigma_{12} = 0 \iff \begin{cases} [1 + R - B - CR](f) = 0, f \in (-1, 1) \\ B(f) + C(f)R(f+1) = 0, f \in (-1, 0) \\ B(f) + C(f)R(f-1) = 0, f \in (0, 1) \end{cases}$$

ce qui détermine parfaitement $B(f)$ et $C(f)$:

$$B(f) = \begin{cases} -R(f+1)C(f), f \in (-1, 0) \\ -R(f-1)C(f), f \in (0, 1) \end{cases}$$

$$C(f) = \begin{cases} \frac{1+R(f)}{R(f)-R(f+1)}, f \in (-1, 0) \\ \frac{1+R(f)}{R(f)-R(f-1)}, f \in (0, 1) \end{cases}$$

à condition que ces quantités soient finies.

7.2. Exemples

1) Prenons $\Delta_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \Delta_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), \Delta_{12} = \emptyset$. Δ_1 et Δ_2 sont sans repliement, et conviennent pour une reconstruction

(évidente) de la forme

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} u_1(n) + e^{2i\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} u_2(n)$$

et indépendante des valeurs de $u(t)$. On a remarqué que $|\Delta| = 2$. Maintenant, posons

$$v_1(t) = u_1(t) \quad v_2(t) = \alpha u_1(t) - u_2(t), \alpha \neq 0.$$

Par rapport aux nouvelles fonctions $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, on a $\Delta_{12} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\Delta_1 = \emptyset$, $\Delta_2 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $R(f) = \alpha$ sur Δ_{12} , et la reconstruction (puisque $v(t) = (1 + \alpha) u_1(t) - u_2(t)$)

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} [(1 + \alpha - \alpha e^{2i\pi t}) v_1(n) + e^{2i\pi t} v_2(n)].$$

On remarque que cette reconstruction dépend (à travers de α) de $R(f)$, qui mesure l'« influence » de $v_1(t)$ sur $v_2(t)$.

2) Dans cet exemple, $\Delta_1 = \Delta_2 = \emptyset$, $\Delta_{12} = (-1, 1)$, et

$$R(f) = a \text{ pour } f \geq 0, R(f) = -a \text{ pour } f < 0, a \neq 0.$$

Pour $a = 1$, $u(t)$ est un « signal analytique ». On a de nouveau $|\Delta| = 2$. Alors :

$$\begin{cases} b(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} (\cos \pi t + i a \sin \pi t) \\ c(t) = \frac{\sin \pi t}{a\pi t} (a \cos \pi t + i \sin \pi t). \end{cases}$$

$b(t)$ et $c(t)$ dépendent dans ce cas de $R(f)$ (de la manière indiquée dans § 7-1). Le cas du signal analytique supprime, pour $u(t)$, la partie négative du spectre, et donc divise par 2 la largeur du spectre des composantes $u_1(t), u_2(t)$.

3) Dans le cas où $\Delta_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $\Delta_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\Delta_{12} = (0, \frac{1}{2})$, Δ_{12} n'a pas de repliement ni sur Δ_1 ni sur Δ_2 . Bien que $|\Delta| = 3/2$, la reconstruction de $u(t)$ se fait indépendamment de $R(f)$, avec

$$\begin{cases} B(f) = 1, C(f) = 0, f \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ B(f) = 1, C(f) = 1, f \in (0, \frac{1}{2}) \\ B(f) = 0, C(f) = 1, f \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

ou, de manière équivalente :

$$\begin{cases} b(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \\ c(t) = e^{i\pi t} \frac{\sin \pi t}{\pi t}. \end{cases}$$

4) On prend $\Delta_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $\Delta_2 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\Delta_{12} = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2})$.

Dans cet exemple, on a $|\Delta| = 2$, et une reconstruction est possible, bien que, dans Δ_{12} , $(1, \frac{3}{2})$ se replie sur $(0, \frac{1}{2})$. Mais Δ_{12} ne se replie ni sur Δ_1 ni sur Δ_2 . On obtient par exemple

$$\begin{cases} B(f) = 1, C(f) = 0, f \in (-\frac{1}{2}, 0) \\ B(f) = 0, C(f) = 1, f \in (\frac{1}{2}, 1) \\ B(f) = -C(f) R(f+1), C(f) = \frac{1+R(f)}{R(f)-R(f+1)}, \\ \quad f \in (0, \frac{1}{2}) \\ B(f) = -C(f) R(f-1), C(f) = \frac{1+R(f)}{R(f)-R(f-1)}, \\ \quad f \in (1, \frac{3}{2}). \end{cases}$$

à condition que les dénominateurs ne s'annulent pas.

5) On prend $\Delta_1 = (-1, -\frac{1}{2})$, $\Delta_2 = \emptyset$, $\Delta_{12} = (0, \frac{1}{2})$. Comme Δ_{12} se replie sur Δ_1 , le problème n'a pas de solution indépendante de la valeur de $u(t)$ sur son support. En effet, $B(f), C(f)$ doivent vérifier le système d'équations

$$\begin{cases} U_1(f) [1 - B(f)] - U_1(f+1) [B(f) + C(f) R(f+1)] = 0, f \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ U_1(f) [1 + R(f) - B(f) - C(f) R(f)] - U_1(f-1) B(f) = 0, f \in (0, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Si l'on désire une solution indépendante de $u(t)$, il est nécessaire que

$$\begin{cases} B(f) = 1, C(f) = -\frac{1}{R(f+1)}, f \in (-1, -\frac{1}{2}) \\ B(f) = 0, C(f) = -1 + \frac{1}{R(f)}, f \in (0, \frac{1}{2}), \end{cases}$$

7.3. La généralisation de Papoulis

La généralisation de Papoulis étudie le cas suivant [9]. Le support de $U(f)$ est $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ (l entier); $u(t)$ est l'entrée de l filtres de réponses fréquentielles (connues) $R_1(f), \dots, R_l(f)$ dont les sorties sont $v_1(t), \dots, v_l(t)$. Cela signifie que (par définition) :

$$v_k(t) = \int_{-l/2}^{l/2} [R_k U](f) e^{2i\pi f t} df, k = 1, 2, \dots, l.$$

On conçoit que l'on puisse retrouver $u(t)$ à partir des échantillons $v_1(n), \dots, v_l(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de la même manière que l'on a reconstruit des fonctions dont le support spectral est de longueur 2, à partir d'un double échantillonnage (§ 7.2). Néanmoins, les filtres doivent vérifier certaines conditions d'« indépendance ».

Considérons $\tilde{u}(t)$ définie par

$$\tilde{u}(t) = \sum_{\substack{k=1, \dots, l \\ n \in \mathbb{Z}}} b_k(t-n) v_k(n).$$

La distance entre $u(t)$ et $\tilde{u}(t)$ s'écrit, en généralisant (21) (avec $B_k(f) = 0, f \notin (-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$:

$$\begin{cases} \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 dt \\ = \int_{-l/2}^{l/2} \left| \left[U - \sum_{k=1}^l B_k V_k' \right] (f) \right|^2 df \\ V_k'(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_k U](f+n), \\ B_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} b_k(t) e^{-2i\pi f t} dt. \end{cases} \quad (26)$$

On désire déterminer (si possible) les $B_k(f)$ de façon que $\sigma = 0$, indépendamment de la valeur de $U(f)$. En prenant successivement (pour $m = 0, 1, \dots, l-1$)

$$U(f) = 1, f \in \left(-\frac{l}{2} + m, -\frac{l}{2} + m + 1\right), \text{ et } 0 \text{ ailleurs,}$$

on voit que l'intégrale précédente (26) impose les l systèmes (un pour chaque $m = 0, 1, \dots, l-1$)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^l [B_k R_k](f) = 1, \\ \sum_{k=1}^l B_k(f) R_k(f-q) = 0, \\ q = -m, -m+1, \dots, -1, 1, \dots, l-m-1, \\ \text{pour } f \in \left(-\frac{l}{2} + m, -\frac{l}{2} + m + 1\right). \end{cases} \quad (27)$$

Pourvu que le déterminant $D(f)$ défini sur $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + 1\right)$ par

$$D(f) = \begin{vmatrix} R_1(f) & R_2(f) & \dots & R_l(f) \\ R_1(f+1) & R_2(f+1) & \dots & R_l(f+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(f+l-1) & R_2(f+l-1) & \dots & R_l(f+l-1) \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas, les systèmes (27) ont une solution unique qui détermine les $B_k(f)$ sur chaque intervalle $\left(-\frac{l}{2} + m, -\frac{l}{2} + m + 1\right)$.

Étudions plus précisément le cas $l = 2$ qui recoupe le schéma étudié § 7.1. D'après (27), on doit résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} U(f) - B_1(f) ([R_1 U](f) + [R_1 U](f+1)) - \dots \\ \dots B_2(f) ([R_2 U](f) + [R_2 U](f+1)) = 0, f \in (-1, 0) \\ U(f) - B_1(f) ([R_1 U](f) + [R_1 U](f-1)) - \dots \\ \dots B_2(f) ([R_2 U](f) + [R_2 U](f-1)) = 0, f \in (0, 1), \end{cases}$$

système qui se scinde en 4 équations, puisqu'il doit être vérifié pour n'importe quel $U(f)$ (qui est nul à l'extérieur de $(-1, 1)$):

$$\begin{cases} [1 - B_1 R_1 - B_2 R_2](f) = 0, f \in (-1, 0) \\ B_1(f) R_1(f+1) + B_2(f) R_2(f+1) = 0, f \in (-1, 0) \\ [1 - B_1 R_1 - B_2 R_2](f) = 0, f \in (0, 1) \\ B_1(f) R_1(f-1) + B_2(f) R_2(f-1) = 0, f \in (0, 1). \end{cases}$$

Les deux premières équations forment un système qui a la solution

$$\begin{cases} B_1(f) = \frac{R_2(f+1)}{R_1(f)R_2(f+1) - R_1(f+1)R_2(f)} \\ B_2(f) = \frac{-R_1(f+1)}{R_1(f)R_2(f+1) - R_1(f+1)R_2(f)}, f \in (-1, 0). \end{cases}$$

à condition que $D = R_1(f)R_2(f+1) - R_1(f+1)R_2(f)$ ne s'annule pas sur $(-1, 0)$. De même (on voit que la condition reste la même):

$$\begin{cases} B_1(f) = \frac{R_2(f-1)}{R_1(f)R_2(f-1) - R_1(f-1)R_2(f)} \\ B_2(f) = \frac{-R_1(f-1)}{R_1(f)R_2(f-1) - R_1(f-1)R_2(f)}, f \in (0, 1). \end{cases}$$

8. Conclusion

Les fonctions de (module) carré intégrable forment en même temps l'ensemble des « signaux à énergie finie ». Ces derniers représentent des phénomènes localisés dans le temps, par opposition à ceux qui ont des propriétés de permanence (pour ne pas évoquer la notion de stationnarité). Dans la première catégorie, les réponses à des stimuli (celles d'un muscle sollicité à l'instant $t = 0$, par exemple), qui s'évanouissent au bout d'un temps fini. Dans la deuxième, un schéma de communication, et/ou une onde sinusoïdale (même si c'est une vue de l'esprit que d'envisager un phénomène qui parcourt le temps de $-\infty$ à $+\infty$). Le caractère déterministe ou aléatoire représente un choix qui dépend à la fois du phénomène à modéliser et de l'aisance qu'il peut apporter dans les calculs.

Dans les deux cas, on associe un « spectre », qu'il soit d'énergie ou de puissance, et qui, dans la pratique, est bien localisé; il définit une région de l'axe des fréquences, où l'« information » est présente. La connaissance de cette région est déterminante pour véhiculer le signal, à travers un « canal ». Inversement, la définition de ce dernier impose la manière de concevoir, coder, émettre, recevoir le signal. Ces diverses exigences étant respectées, il arrive le moment (en aval et/ou en amont du canal) où le signal sera traité, et donc, la plupart du temps, échantillonné.

Bien que l'on puisse envisager de multiples schémas d'échantillonnage, le plus utilisé est périodique (ou uniforme). Il doit régler un compromis entre charge de calcul (qui augmente quand la période T diminue) et erreur de reconstruction (qui va dans le même sens que T). D'autre part, un système de transmission et/ou de traitement est conçu pour une classe de spectres déterminée (et plus précisément pour une bande spectrale donnée). Enfin, l'interpolation linéaire permet une étude (à peu près) achevée. La faire dans le cadre des signaux déterministes à énergie finie est un peu réducteur, mais c'est ce cadre qui règle un autre compromis, celui qui mesure le poids des mathématiques à utiliser par rapport aux résultats pratiques.

Il existe des différences de traitement et aussi de résultats entre les diverses sortes de signaux, en ce qui concerne l'échantillonnage. Dans le cas des signaux aléatoires (stationnaires) à puissance finie, on cherche, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, une suite de nombres complexes $a_n(t)$, telle que

$$\tilde{u}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(t) u(n)$$

approche au mieux $u(t)$ en moyenne quadratique (cette distance étant la plus simple à manipuler), c'est-à-dire minimisant l'erreur ($E[\dots]$ est la notation pour l'espérance mathématique)

$$\sigma^2 = E[|u(t) - \tilde{u}(t)|^2].$$

Alors, on démontre que $\sigma = 0$ équivaut à la condition de non-repliement (du spectre de puissance), et, dans ce cas, la formule d'échantillonnage prend la forme (1) [8]. Lorsque la condition de non-repliement n'est pas remplie, la formule d'interpolation linéaire qui minimise l'erreur (en moyenne quadratique) a encore la forme (1). Des CNS de reconstruction peuvent aussi être trouvées dans le cas de double échantillonnage [6].

Dans le cas des signaux (déterministes) à énergie finie, on cherche à priori un développement de la forme (1). On s'aperçoit d'abord qu'il existe le plus souvent une solution qui dépend de la fonction à développer. La condition de non-repliement n'apparaît que si le but à atteindre est de trouver une formule qui soit utilisable pour toute une classe de fonctions (définie par une condition sur la transformée de Fourier).

Dans ce cas, la solution revient à développer $e^{i\omega t}$ (pour chaque valeur de t), comme combinaison linéaire des $e^{i\omega t_n}$ (les t_n sont les instants d'échantillonnage, qui peuvent être non périodiques) [11], [4], et cela ramène à des problèmes de complétion de suites d'exponentielles complexes (étudiés notamment par Paley et Wiener [7]).

Dans le cas de repliement, d'autres solutions peuvent être trouvées; en particulier, le filtrage adapté, ou la généralisation de Papoulis pour les échantillonnages multiples.

Références

- [1] J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Oxford Sc. Pub. (1996).
- [2] J. R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Am. Math. Soc. Vol. 12 (1985) 45-89.
- [3] A. J. Jerri, *The Shannon sampling theorem. Its various extensions and applications. A tutorial review*, Proc. IEEE 65 (11) (1977) 1565-1596.
- [4] B. Lacaze, *La formule d'échantillonnage et A. L. Cauchy*, Traitement du Signal, Vol. 14, n°4 (1998) 289-295.
- [5] B. Lacaze, *Echantillonnage adapté à l'extraction des signaux*, Traitement du Signal, Vol. 20, n°4 (2003) 313-322.
- [6] B. Lacaze, *Processus aléatoires pour communications numériques*, Hermes (2000).
- [7] B. Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Am. Math. Soc. (1964).
- [8] S. P. Lloyd, *A sampling theorem for stationary (wide sense) stochastic processes*, Trans. Am. Math. Soc. (1959) 1-12.
- [9] A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics*, Mac-Graw Hill (1968).
- [10] N. Wiener, *Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems*, MIT Press (1964).
- [11] J. L. Yen, *On Nonuniform Sampling of Bandwidth-Limited Signals*, IRE Trans. on Circ. Th. CT-3, n°12 (1956) 251-257.



Bernard **Lacaze**

Professeur des Universités spécialisé dans les applications du calcul des probabilités au traitement du signal et aux télécommunications. Nombreuses publications concernant aussi bien l'échantillonnage périodique que l'échantillonnage irrégulier.