

Nouvelle génération d'optique adaptative pour l'astronomie. Problème Inverse à grands nombres de degrés de liberté

New generation adaptive optics for astronomy.
An inverse problem with large number of degrees of freedom

Clémentine Béchet¹, Michel Tallon¹, Éric Thiébaud¹,
Gérard Thomas², Éric Blanco²

¹ Université de Lyon, Lyon, F-69003, France
Université Lyon 1, Observatoire de Lyon, 9 avenue Charles André, Saint-Genis Laval, F-69230, France
CNRS, UMR 5574, Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, F-69007, France
Béchet@obs.univ-lyon1.fr, MTallon@obs.univ-lyon1.fr, Thiebaut@obs.univ-lyon1.fr

² AMPERE (UMR CNRS 5005), École Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully cedex, France
Gerard.Thomas@ec-lyon.fr, Eric.Blanco@ec-lyon.fr

Manuscrit reçu le 14 avril 2008

Résumé et mots clés

Les images astrophysiques issues des télescopes au sol sont dégradées par la turbulence de l'atmosphère terrestre. Un système d'Optique Adaptative (OA) doit corriger en temps réel ces perturbations. L'étude d'une nouvelle génération de télescopes, de plus de 30 mètres de diamètre, avec de nouveaux concepts d'OA ayant de 10^4 à 10^5 degrés de liberté, appelle de nouveaux algorithmes pour la commande du système. L'optimisation d'un critère nous a conduit à une commande en boucle fermée par modèle interne. Cette structure permet d'exploiter les *a priori* sur la turbulence en utilisant l'algorithme FRIM, particulièrement adapté à ces systèmes à grands nombres de degrés de liberté.

Optique adaptative, problème inverse, commande par modèle interne, gradients conjugués, préconditionnement, algorithme rapide.

Abstract and key words

Observations of fainter and fainter astrophysical objects in the universe require an increasing flux-collecting area, which means larger and larger telescopes. However, the optical turbulence in the atmosphere damages the resolution of the images provided by the ground-based telescopes. In order to combine high sensitivity and angular resolution large ground-based telescopes are nowadays associated with adaptive optics systems (OA)[1]. OA must provide real-time correction of the atmospheric perturbation thanks to a servo-loop system including at least one wavefront sensor (AFO), a controller and one deformable mirror (MD) to apply the compensation, as illustrated by figure 1.

The OA design must evolve for the future telescopes with mirror diameters of several tenths of meters planned for 2017. On the one hand, the sensed part of the wavefront (WF) will not always match the part to be corrected for the astrophysical observations, so that the criterion of performance should be expressed in the WF space. On the other hand, the next generation of OA will have to cope with several thousands of actuators, to be controlled in real-time, which requires new and fast algorithms.

The outline of this paper can be decomposed in three parts. A first section introduces the statistics and the particularities of the studied signals in OA. Next, the optimization of a criterion related to astrophysical images quality



leads to a command expression including a maximum *a posteriori* reconstructor [3] and an internal model control [4]. A fast iterative algorithm, FrIM [2], involving a fractal preconditioning is then used to compute in real-time such a control.

We consider here a classical OA system as illustrated by figure 1. From Kolmogorov's model of the turbulence in the atmosphere, the kinetic energy is transferred from large scale vortices towards the smallest structures. This leads to stochastic spatial and temporal variations of the refractive index of the air, distorting the incident WF and producing local phase delays on the pupil. The statistics of the WF in the pupil plane can be described by the structure function in equation (1), where $\langle \cdot \rangle_{\rho'}$ represents the expectation over coordinate vector ρ' , and r_0 is Fried's parameter which characterizes the turbulence strength [6]. The statistics of the WF perturbations w have fractal characteristics since they are invariant by a change of scale.

The WFs are sampled on a regular two-dimensional grid larger than the pupil, and are denoted by vectors w and w^c in \mathbb{R}^N , for the incident WF and its compensation respectively. The AFO provides a measurement vector of local spatial derivatives, in two dimensions, d in \mathbb{R}^m and the command vector a to be send to the actuators. The measurement equation (2) involves a linear model of the AFO, S , and a vector of measurement noise and modeling error, e . Indices k reveal the temporal discretization and enhance the characteristic delays of the OA system; here the exposure time affects the data. Errors e are supposed to have zero-mean Gaussian statistics, hence a diagonal covariance matrix C_e for the noise. The MD is also modeled by a linear device M (cf. equation (3)).

The aim of the OA is to control a multi-inputs multi-outputs system with several thousands of degrees of freedom N at a frequency close to 1 kHz. The perturbation w is not directly available *via* the data, only its local spatial derivatives are provided, therefore the computational time required to compute the command increases with N .

Image quality is assessed for the astrophysical observations thanks to the Strehl ratio, which is optimal for the minimum variance of the residual WF distortions in equation (5). P is a linear operator masking the telescope pupil and subtracting the WF component of uniform delay over the pupil. This component, called the *piston* mode, has no impact on the criterion $\langle \epsilon^2 \rangle$. We consider a control law written as a linear combination of the residual measurements and the previous command (cf. equation (8)). This expression takes into account another delay, which is the time required to read the detector, obtain the measurements and compute the command a_k . This new delay is considered to be equal to the first one. The control law is expressed thanks to a recursive formula (8), so that the criterion in (7) can be developed as a function of all the past measurements and the first command. Optimizing such a developed equation with respect to R and Q would provide an optimal, although complex to determine, solution. Another approach is adopted here, which consists in optimizing the convex criterion (7) with respect to both R and Q , assuming the previous command a_{k-1} is well-known. Choosing $Q = R \cdot G$ and R defined by equation (15) optimizes the criterion, so that the optimal command is written in equation (17). This OA control in discrete-time is represented by the diagram on figure 2. The obtained architecture reveals an internal model control [4]. The computation procedure is composed of 3 steps thanks to operators E , F and F in equations (18)-(21). They respectively stand for a maximum *a posteriori* reconstructor [3], a predictor based on the spatio-temporal covariance T_w and a projector in the mirror actuators space. For $N = 10^4$ degrees of freedom and about two times more measurements, if the global matrix R in equation (17) is precomputed, its application to a vector of pseudo open-loop measurements \tilde{d}_{k-1} at the frequency of 1 kHz would require $\simeq 4 \times N^2 \times 10^3 \approx 4 \times 10^{11}$ operations per second. It can be noticed on figure 3 that, although such multiplication (solid line) is implemented on the existing OA systems, the predictions of processors capabilities for the next decade enhance the requirement of faster algorithms.

The details of the computation are studied for the most frequent design, which makes matrices S , C_e , M and F sparse and their application to a vector requires $\mathcal{O}(N)$ operations. The covariance matrices of the turbulent WF are not sparse, neither is the inverse C_w^{-1} . However, it is important for the new generation of OA to take into account those priors. This is why several new methods [9, 10, 2] start the computation by iteratively solving the linear system (22)-(23), using a preconditioned conjugate gradients (GCP) algorithm.

In order to apply A at every iteration, the Fourier domain GCP method [10] approximates the regularization C_w^{-1} in the Fourier domain with a diagonal matrix. The global cost of this method, in figure 3, scales as $\mathcal{O}(N \ln N)$. We consider here the faster Fractal Iterative Method, FrIM [2], which uses a fractal linear change of variable K in equation (25), such that approximation (24) is valid. The method builds K by a mid-point algorithm, according to Kolmogorov structure

function in equation (1), and as a one-to-one linear relation $\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}$, where \mathbf{u} in \mathbb{R}^N are independent Gaussian variables of zero-mean and variance equal to unity. The essential asset is that \mathbf{K} , \mathbf{K}^T , and their inverses can be applied to a vector of \mathbb{R}^N in about $6 \times N$ operations. FrIM benefits from this low cost computation to precondition the GCP, so that the linear system is effectively solved in \mathbf{u} variables, using equations (26)-(27), in $\mathcal{O}(N)$ operations. The convergence of the GCP is efficiently accelerated by this change of variable and by an additional diagonal preconditioner. The estimation of $\hat{\mathbf{w}}_k$ from the data involves less than $34 N$ operations per iteration. It must also be noticed that the coherence time of the turbulent WF is assumed to be greater than the loop period, so that the approximation $\mathbf{\Gamma} \simeq \mathbf{I}_d$, the identity matrix, is applied.

FrIM has already demonstrated to be the fastest WF reconstruction method for large N [2]. The turbulence dynamics leads to even less computations when the method is involved in a closed-loop OA. The number of iterations required to converge depends on both the signal to noise ratio [2] and the evolution speed of the turbulence. The iterative method in closed-loop OA starts with the best estimate $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}$ of the previous loop. The simulation of 3 extreme cases of temporal evolution of the turbulence illustrates this in figure 4, bounding the values of n_{iter} required for the convergence of the estimation. The reconstruction mean square error in equation (28) is plotted along the 15 iterations of 6 successive OA loops. It appears that when the temporal correlation of the WF increases, which also means when $\mathbf{\Gamma}$ gets closer to the identity matrix, then the estimation convergence is reached in less iterations. The solid curve is a realistic situation, obtained simulating a translating WF above the pupil. In such case, initializing the iterative algorithm with the previous final estimate leads to a convergence reached in 2 or 3 iterations, and a global cost for the command eventually smaller than the one of an isolated WF reconstruction.

As a conclusion, the optimization of the closed-loop AO correction in the WF space led to a internal model control law involving a turbulent WF reconstruction. The computation of the command for large N is then possible in real-time thanks to the use of FrIM method for the reconstruction step. The closed-loop configuration accelerates the convergence of this iterative algorithm thanks to the temporal coherence of the turbulence. This method decreases the computational cost of the command of a factor of about 100 in comparison with the classical matrix-vector multiplication approach, on a system with $N = 10^4$.

Adaptive optics, inverse problem, internal model control, conjugate gradients, preconditioner, fast algorithm.

1. Introduction

L'observation d'objets de plus en plus faibles dans l'Univers requiert des télescopes au sol toujours plus grands. Cependant, la résolution des images fournies par ces grands télescopes est dégradée par la turbulence atmosphérique. Pour allier sensibilité et haute résolution angulaire, les télescopes au sol sont désormais associés à des systèmes d'optique adaptative (OA)[1]. L'OA doit corriger en temps réel les effets de la turbulence atmosphérique grâce à une boucle comprenant un analyseur de front d'onde (AFO), un système de commande et un miroir déformable (MD) pour appliquer la correction, comme schématisé sur la figure 1.

Les systèmes d'OA actuellement mis en oeuvre en astronomie utilisent des miroirs à quelques centaines d'actionneurs tout au plus, *i.e.* quelques centaines de degrés de liberté. Ils sont asservis de façon à ce que les mesures de perturbations résiduelles du front d'onde, fournies par l'AFO, soient nulles. Pour les futurs

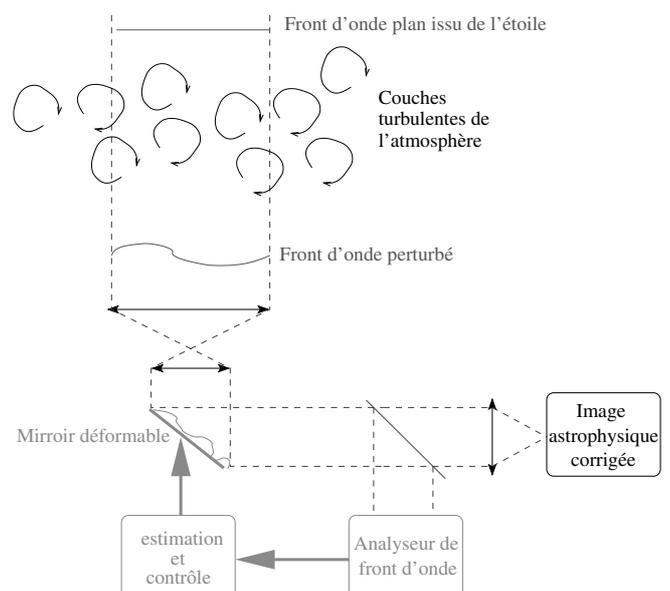


Figure 1. Schéma de principe d'une OA simple.

systemes d'OA, la démarche est désormais différente. D'une part, la portion de front d'onde analysée par l'AFO ne coïncide pas toujours avec la portion de front d'onde destinée à la voie d'observation, ce qui n'implique pas nécessairement l'annulation des mesures résiduelles. Il est alors nécessaire d'extrapoler le front d'onde reconstruit. Nous traitons ici cette reconstruction par une approche de type problème inverse, avec une régularisation déduite des propriétés statistiques de la turbulence. D'autre part, les OA de nouvelle génération en astronomie compteront quelques dizaines de milliers d'actionneurs, d'où l'exigence d'algorithmes de reconstruction rapide, adaptés à ces grands nombres de degrés de liberté.

Nous considérons ici un système d'OA simple (cf. figure 1), *i.e.* comprenant un seul AFO et un seul MD, en boucle fermée.

Dans un premier temps, nous expliquons la spécificité des signaux mis en jeu dans un système d'OA, notamment leurs caractéristiques statistiques. Puis, nous montrons que l'optimisation d'un critère de qualité concernant les images astrophysiques conduit à un reconstruteur de type maximum *a posteriori* [3] et une loi de commande de type modèle interne [4]. Enfin, nous proposons d'utiliser un algorithme itératif, FrIM, reposant sur un préconditionneur fractal, afin de calculer cette commande. FrIM permet déjà la reconstruction de surfaces d'onde à grand nombre de paramètres en moins d'opérations qu'aucune autre méthode existante [2]. Nous montrons finalement, comment la dynamique de la turbulence permet de réduire encore le coût de calcul de cette méthode lorsqu'elle est utilisée dans une boucle fermée d'OA.

2. Caractériser la phase perturbée par la turbulence de l'atmosphère

D'après le modèle de turbulence de Kolmogorov [5], l'énergie cinétique turbulente est transmise en cascade, des tourbillons à grande échelle vers les plus petites structures. Ceci engendre des fluctuations spatiales et temporelles aléatoires de la température dans l'atmosphère, et donc de l'indice de réfraction de l'air. Pendant l'observation d'une source lumineuse dans le ciel, les surfaces d'onde au niveau de la pupille, *i.e.* après propagation au travers de la turbulence atmosphérique, présentent des retards de phase aléatoires. La théorie de Kolmogorov prévoit que ces fluctuations de phase w suivent une statistique gaussienne centrée en chaque point du plan pupille, avec une fonction de structure qui s'écrit :

$$D_w(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \langle [w(\rho' + \rho) - w(\rho')]^2 \rangle_{\rho'} = 6.88 \left(\frac{|\rho|}{r_0} \right)^{5/3} \quad (1)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente l'espérance mathématique, ρ et ρ' sont des vecteurs de position dans le plan pupille du télescope et r_0 est le paramètre de Fried qui caractérise la quantité de turbulence [6]. La notation $|\cdot|$ représente la distance dans le plan pupille, mesurée par la norme Euclidienne.

L'OA vise à compenser en temps réel les déformations du front d'onde sur la pupille, à l'aide d'un AFO et d'un nombre N_{act} d'actionneurs sur un MD. Étant donné que la phase est une fonction continue de l'espace et du temps, le nombre de degrés de liberté N_{act} , le diamètre D de la pupille ou encore la fréquence de la boucle, définissent certaines limites de performance du système. Nous considérons ces valeurs comme fixées et nous nous ramenons ici à un système d'OA linéarisé équivalent, discrétisé à la fois spatialement et temporellement. Les vecteurs w et w^c , de \mathbb{R}^N , sont les valeurs échantillonnées des fronts d'onde, respectivement incident et corrigé, sur une grille régulière à 2 dimensions, définie dans le plan pupille du télescope. L'AFO est un Shack-Hartmann [2], qui est l'analyseur le plus couramment utilisé. Il fournit un vecteur de mesures de gradients locaux de la phase résiduelle, d dans \mathbb{R}^M . L'équation de mesure du système s'écrit

$$d_k = S \cdot (w_{k-1} - w_{k-1}^c) + e_k \quad (2)$$

avec S un modèle linéaire de l'AFO et e le vecteur de bruit et d'erreur de modélisation de l'AFO. Les indices k permettent de représenter les retards caractéristiques du système ; ici, le temps de pose de l'AFO. Les erreurs de mesure sont supposées gaussiennes centrées et indépendantes entre elles, ce qui est très proche de la réalité lorsque la source de référence est une étoile naturelle (*i.e.* à l'infini). La matrice de covariance du bruit C_e est alors diagonale.

La surface d'onde corrigée w^c est la déformée du miroir, générée à partir du vecteur de commande a de $\mathbb{R}^{N_{act}}$. Le miroir est modélisé par un opérateur linéaire M , injectif, communément appelé matrice d'influence, tel que

$$w_{k-1}^c = M \cdot a_{k-1} \quad (3)$$

La dynamique du miroir est négligée. On peut alors écrire l'équation (2) sous la forme équivalente

$$d_k = y_{k-1} - G \cdot a_{k-1} + e_k \quad (4)$$

$$y_{k-1} = S \cdot w_{k-1}$$

et $G = S \cdot M$ est la matrice d'interaction du système.

L'objectif est donc de contrôler un système multi-entrées (a) multi-sorties (y) à plusieurs milliers de degrés de liberté et à une fréquence de l'ordre de 1 kHz. Or la mesure de la perturbation à compenser n'est pas directement accessible. Seules ses dérivées spatiales locales le sont, et donc le temps de calcul nécessaire croît avec les dimensions du système.

3. L'optimisation du critère

La qualité des images, quantifiée en astronomie par le rapport de Strehl, croît lorsque la variance de la phase résiduelle intégrée sur la pupille,

$$\langle \epsilon^2 \rangle = \langle \| \mathbf{P} \cdot (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^c) \|^2 \rangle \quad (5)$$

diminue. \mathbf{P} est un opérateur linéaire qui ôte à la phase sa composante constante sur la pupille, *le piston*, et annule la phase hors de la pupille. Le mode piston n'influe pas sur le critère $\langle \epsilon^2 \rangle$, parce qu'un retard de phase uniforme sur la pupille ne dégrade pas l'image. La norme $\| \cdot \|$ représente la norme Euclidienne canonique de \mathbb{R}^N . \mathbf{w} et \mathbf{w}^c étant définis sur un même espace, on peut décomposer la surface d'onde turbulente comme

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \mathbf{w}_k^{\text{M.L}} + \mathbf{w}_k^{\text{M}} \\ &= \mathbf{w}_k^{\text{M.L}} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{b}_k \end{aligned} \quad (6)$$

où \mathbf{w}_k^{M} représente la partie commandable de la turbulence, *i.e.* sa projection orthogonale sur l'espace image du miroir \mathbf{M} . Au contraire, $\mathbf{w}_k^{\text{M.L}}$ constitue la partie non commandable de la phase perturbée, qui est donc responsable dans le critère (5) d'une erreur que l'on ne peut compenser. \mathbf{M} étant injective, la décomposition dans l'équation (6) est définie de façon unique, avec \mathbf{b}_k la représentation vectorielle de la partie commandable de la perturbation dans l'espace des actionneurs. Le critère réduit à optimiser s'écrit alors

$$\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}} = \langle \| \mathbf{P} \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k) \|^2 \rangle. \quad (7)$$

La commande ici est supposée être une combinaison linéaire des mesures résiduelles et de la commande appliquée pendant la pose

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2}. \quad (8)$$

\mathbf{R} et \mathbf{Q} sont les opérateurs linéaires et stationnaires à déterminer par optimisation du critère (7). Un deuxième retard majeur du système est implicitement pris en compte dans l'équation (8) par le décalage d'indice entre \mathbf{a}_k et \mathbf{d}_{k-1} : le temps de lecture du détecteur et de calcul de la nouvelle commande. Pour simplifier les notations, on a considéré que ce deuxième retard était égal au premier (*cf.* équation (2)), le temps de pose. On peut remarquer que la commande s'exprime par une relation de récurrence dans l'équation (8). En utilisant cette propriété, il est possible de développer l'équation (7) pour exprimer le critère en fonction de toutes les valeurs de mesures successives et de la commande initiale. Optimiser le critère par rapport à \mathbf{R} et à \mathbf{Q} fournirait une solution optimale, mais la détermination de \mathbf{R} et à \mathbf{Q} dans ces conditions est complexe. Nous avons opté pour une autre approche, qui consiste à minimiser le critère $\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}$ étant donnée la valeur de la commande précédemment appliquée \mathbf{a}_{k-2} , bien

déterminée. Nous ne faisons aucune hypothèse particulière sur son origine mais considérons simplement la connaître parfaitement. En conséquence, nous recherchons \mathbf{R} et \mathbf{Q} optimaux, quel que soit l'état actuel du système. En remplaçant l'expression (8) dans l'équation (7), le critère à optimiser est bien une fonction quadratique de \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Alors, minimiser $\langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}$, quel que soit l'instant k , étant donnés \mathbf{d}_{k-1} et \mathbf{a}_{k-2} , implique

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad (9)$$

La linéarité de tous les opérateurs implique

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \quad (10)$$

$$= \mathbf{N} \cdot \langle (\mathbf{R} \cdot \mathbf{y}_{k-2} + (\mathbf{Q} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}) \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \quad (11)$$

avec $\mathbf{N} = 2 \mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \mathbf{P}^{\text{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$. L'équation (11) est obtenue à partir de (10) en remplaçant \mathbf{d}_{k-1} par son expression dans l'équation (4) et parce que le bruit \mathbf{e}_{k-1} est décorrélié de la commande \mathbf{a}_{k-2} . Puisque les espérances mathématiques des dérivées spatiales de la phase \mathbf{y}_{k-2} et des déformées à corriger \mathbf{b}_k sont toutes deux nulles,

$$\langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle = \langle \mathbf{y}_{k-2} \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} = 0$$

$$\langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} \rangle = \langle \mathbf{b}_k \rangle \cdot \mathbf{a}_{k-2}^{\text{T}} = 0.$$

Choisir $\mathbf{Q} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{G}$ garantit d'annuler la dérivée partielle (11). La loi de commande devient désormais

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_{k-2}) = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (12)$$

où $\tilde{\mathbf{d}}_{k-1} = \mathbf{y}_{k-2} + \mathbf{e}_{k-1}$ fournit une estimation de mesures en boucle ouverte, *i.e.* de la phase turbulente. De la même façon, en dérivant par rapport à \mathbf{R} ,

$$\frac{\partial \langle \epsilon^2 \rangle^{\text{M}}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{N} \cdot (\langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{y}_{k-2}^{\text{T}} \rangle - \mathbf{R} \cdot (\langle \mathbf{y}_{k-2} \cdot \mathbf{y}_{k-2}^{\text{T}} \rangle + \langle \mathbf{e}_{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1}^{\text{T}} \rangle)) \quad (13)$$

La statistique des signaux est supposée stationnaire, si bien que l'on note $\forall k$,

$$\mathbf{C}_e = \langle \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^{\text{T}} \rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{C}_w = \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^{\text{T}} \rangle. \quad (14)$$

Choisir

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_w \cdot \mathbf{S}^{\text{T}} + \mathbf{C}_e)^{-1} \quad (15)$$

est donc une condition suffisante pour optimiser le critère d'après l'équation (13). D'autre part, l'équation (6) permet de montrer facilement que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^{\text{T}} \rangle &= (\mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \mathbf{M})^{\dagger} \cdot \mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \langle \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_{k-2}^{\text{T}} \rangle \\ &= (\mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \mathbf{M})^{\dagger} \cdot \mathbf{M}^{\text{T}} \cdot \mathbf{T}_w. \end{aligned} \quad (16)$$

où l'exposant \dagger désigne la pseudo-inverse [7] d'une matrice.

Alors, la commande (12) une fois optimisée devient

$$a_k = (M^T \cdot M)^\dagger \cdot M^T \cdot T_w \cdot S^T (S \cdot C_w \cdot S^T + C_e)^{-1} \tilde{d}_{k-1} \quad (17)$$

4. Algorithme rapide FrIM, et simulations

À partir de la formule (17) pour la commande, on peut représenter le système d'OA discrétisé par le diagramme figure 2. On observe une commande par modèle interne [4].

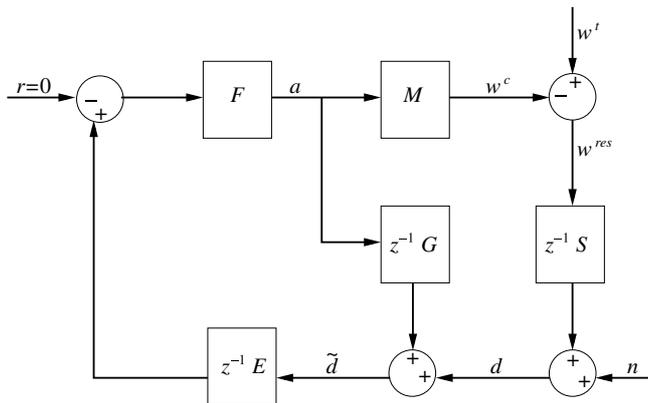


Figure 2. Diagramme du système d'OA en boucle fermée.

L'OA doit être commandée en temps réel. Pour un système à $N = 10^4$ degrés de liberté et environ 2 fois plus de mesures M , si on précalcule la matrice de commande de l'équation (17), son application à un vecteur de pseudo mesures boucle ouverte \tilde{d}_{k-1} à la fréquence de 1 kHz nécessiterait $\approx 4 \times N^2 \times 10^3 \approx 4 \times 10^{11}$ opérations par seconde. On voit sur la figure 3 que, même si cette multiplication matricielle est la méthode implémentée sur les systèmes d'OA existants, elle n'est plus applicable pour de grands systèmes. Étant données les capacités des processeurs actuellement disponibles dans le commerce, et leur supposée évolution, il est nécessaire de développer des méthodes plus rapides.

On peut découper le calcul de la commande d'après l'équation (17) en 3 étapes caractérisées par les opérateurs suivants

$$E = C_w \cdot S^T \cdot (S \cdot C_w \cdot S^T + C_e)^{-1} \quad (18)$$

$$= (S^T \cdot C_e^{-1} \cdot S + C_w^{-1})^{-1} \cdot S^T \cdot C_e^{-1} \quad (19)$$

$$\Gamma = T_w \cdot C_w^{-1} \quad (20)$$

$$F = (M^T \cdot M)^\dagger \cdot M^T \quad (21)$$

L'opérateur E correspond à l'estimateur maximum *a posteriori* de la surface d'onde turbulente, puisque les signaux sont gaussiens centrés et que le modèle d'AFO est linéaire. Les 2 formes (18) et (19) sont équivalentes [3]. Γ effectue une prédiction basée simplement sur la covariance spatio-temporelle de la tur-

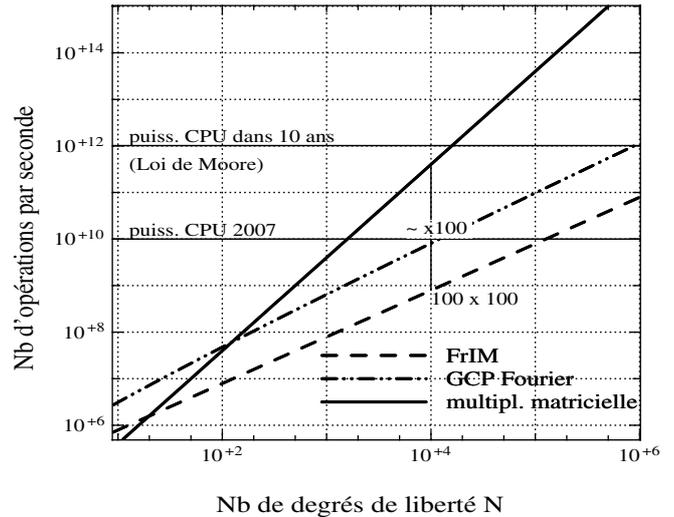


Figure 3. Nombres d'opérations par seconde nécessaires pour différents algorithmes de reconstruction, en fonction du nombre de degrés de liberté du système d'OA. Sur les OA actuelles : Multiplication matrice-vecteur. Récemment suggéré : GCP dans le domaine de Fourier [10]. Mis en oeuvre ici : FrIM, i.e. GCP avec changement de variables fractal.

bulence T_w . Enfin, F correspond à la projection de moindre norme dans l'espace commandable par le miroir.

Dans notre étude, nous considérons le cas simple où la base de fonctions décrivant la déformée 2D du miroir à partir du vecteur de commande appliqué aux actionneurs, i.e. les fonctions d'influence, sont des B-splines bilinéaires. De plus, les sommets de ces fonctions d'influence coïncident avec les coins des sous-pupilles du Shack-Hartmann, ce qui correspond à la géométrie de Fried [8]. En utilisant alors le modèle de Fried pour l'AFO [2], les matrices S , C_e , M et F sont creuses dans la représentation zonale que nous avons choisie. Ceci permet d'appliquer chacune de ces matrices à un vecteur en un nombre d'opérations de l'ordre de N . De fait, l'étape (21) dans son intégralité ne requiert que $\mathcal{O}(N)$ opérations. En revanche, les matrices de covariance de la turbulence et leurs inverses ne le sont pas. Nous souhaitons pourtant prendre en compte ces *a priori* sur le signal. Une première approximation consiste à simplifier l'expression (20) en remarquant que le temps de cohérence de la turbulence au-dessus de la pupille est supérieur à la période du système. En d'autres termes, la surface d'onde perturbée change suffisamment peu d'une boucle à l'autre pour écrire $T_w \approx C_w$. Alors, $\Gamma \approx I_d$, la matrice identité, et l'étape (20) disparaît des calculs à effectuer. Par ailleurs, les simulations, dont un exemple est fourni ci-après, mettent en évidence des corrections satisfaisantes malgré cette approximation dans le calcul de la commande.

Il reste à étudier le coût calculatoire d'application de (18) ou de (19). Les dénominateurs, dans l'une comme dans l'autre expression, sont des matrices pleines, dont le précalcul ne permettra qu'une application à un vecteur en $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. Afin d'éviter cela, il a été suggéré [9, 10, 2] de résoudre itérativement, dans un premier temps, le système

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{b} \quad (22)$$

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{C}_w^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1} \quad (23)$$

par un algorithme de gradients conjugués préconditionnés (GCP). On obtient ainsi l'estimée recherchée

$$\widehat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{E} \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}$$

Pour appliquer \mathbf{A} à chaque itération, Yang *et al.* [10] ont proposé d'approximer la régularisation \mathbf{C}_w^{-1} dans le domaine de Fourier par une matrice diagonale. Dans ce cas, le coût d'application des GCP dans le domaine de Fourier est de l'ordre de $\mathcal{O}(N \log N)$, représenté sur la figure 3 (trait tireté - pointillé). Nous retenons ici une autre méthode, FrIM pour *Fractal Iterative Method*, développée par Thiébaud & Tallon [2] qui repose sur l'approximation suivante

$$\mathbf{C}_w \approx \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^T \quad (24)$$

où \mathbf{K} représente une application linéaire inversible de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , désignée par le terme d'*opérateur fractal*. En pratique, \mathbf{K} n'est pas utilisé sous forme matricielle mais il est défini par un algorithme récursif qui associe à un vecteur \mathbf{u} de \mathbb{R}^N de variables aléatoires indépendantes et de statistique Normale, un autre vecteur aléatoire \mathbf{w} de \mathbb{R}^N tel que

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}. \quad (25)$$

L'atout majeur de l'opérateur \mathbf{K} est d'être une application creuse (*i.e.* représentée par une matrice creuse) parce qu'il est bâti sur le modèle d'une méthode de points milieux. La surface d'onde échantillonnée \mathbf{w} sur une grille régulière est ainsi construite par raffinement progressif, d'une surface d'onde 2×2 (les coins du support) jusqu'à une surface d'onde $(2^p + 1) \times (2^p + 1) = N$. À chaque niveau de raffinement, l'échelle considérée est deux fois plus petite. Les valeurs de la surface d'onde aux points milieux des valeurs déjà calculées sont obtenues en effectuant une combinaison linéaire des valeurs des plus proches voisins dans \mathbf{w} (interpolation) et des éléments de \mathbf{u} correspondant aux points calculés. Les coefficients de la combinaison linéaire sont précalculés pour chaque échelle, de façon à ce que la fonction de structure (*cf.* équation (1)) soit respectée entre chaque nouveau point de phase et ses plus proches voisins. Cette stratégie s'inspire du caractère fractal de la turbulence optique et permet d'impliquer un faible nombre d'opérations par valeur de phase calculée. L'opérateur \mathbf{K} est ainsi construit comme une bijection entre \mathbf{w} et \mathbf{u} et l'application de \mathbf{K} , de \mathbf{K}^T ou de leurs inverses à un vecteur de dimension N ne nécessite que $6 \times N$ opérations environ [2]. La méthode fractale FrIM exploite ce changement de variable comme préconditionnement des gradients conjugués, et permet de résoudre itérativement le système équivalent à (22)

$$\mathbf{A}' \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{b}' \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{I}_d \\ \text{et } \mathbf{b}' &= \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1} \end{aligned} \quad (27)$$

L'emploi de cet opérateur fractal \mathbf{K} et l'ajout d'un préconditionneur diagonal à gauche [2] accélère la convergence des gradients conjugués. Initialement utilisée pour la reconstruction de surfaces d'onde en boucle ouverte, FrIM est utilisée ici pour l'estimation en boucle fermée. Les *a priori* turbulents restent valables parce que l'estimation se fait à partir des pseudo données boucle ouverte $\widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}$, définies par l'équation (12). L'estimation de $\widehat{\mathbf{w}}_k = \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k$ par FrIM implique seulement quelques $34N$ opérations par itération. Seule la première itération suit une procédure différente. En boucle fermée, l'initialisation de l'algorithme nécessite le calcul du premier résidu :

$$r_{\text{init}} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{C}_e^{-1} \cdot (\mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_{k-2} - \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{k-1})) - \widehat{\mathbf{u}}_{k-1}. \quad (28)$$

On remarque alors que l'algorithme itératif est initialisé à partir de la meilleure estimée $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$ de la boucle d'OA précédente. En prenant en compte cette initialisation, le nombre total d'opérations requises par FrIM pour estimer $\widehat{\mathbf{u}}_k$ à chaque boucle est de l'ordre de $(27 + 34n_{\text{iter}})N$. Le nombre d'itérations n_{iter} nécessaires à la convergence de l'algorithme dépend du rapport signal à bruit [2] et de la vitesse d'évolution temporelle de la turbulence. Nous illustrons un encadrement des valeurs de n_{iter} à attendre grâce à 3 cas extrêmes d'évolution temporelle de la turbulence simulés et représentés sur la figure 4. La figure 5 n'est qu'un agrandissement de la figure 4.

Les trois cas simulés d'OA boucle fermée ont en commun que 15 itérations de FrIM sont effectuées pour chaque boucle et que 6 boucles d'OA sont tracées à la suite sur les figures 4 et 5. En abscisse, l'indexation des itérations va de 1 à $6 \times 15 = 90$. L'ordonnée représente l'erreur quadratique moyenne de correction due à la méthode de reconstruction uniquement

$$\langle \epsilon^2 \rangle_{\text{reconstruction}} = \langle \|\mathbf{P} \cdot (\mathbf{w}_{k-2} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_k)\|^2 \rangle \quad (29)$$

i.e. sans inclure le retard de deux trames du système global. En effet, le retard produit une erreur incompressible dans l'équation (5) puisque l'on n'utilise pas de prédiction. En revanche, nous souhaitons observer la vitesse de convergence de l'estimation, qui est bien visible sur les figures 4 et 5.

Pour des rapports signal à bruit moyens, la reconstruction de surface d'onde turbulente avec FrIM en partant d'une estimée nulle converge en moins de 10 itérations [2]. Ce taux de convergence vaut en OA boucle fermée dans le cas où l'estimée précédente $\widehat{\mathbf{u}}_{k-1}$, dans l'étape d'initialisation (28) est décorrélée de la nouvelle turbulence à estimer \mathbf{u}_k . C'est le cas de la simulation en trait pointillé sur les figures 4 et 5, pour laquelle nous avons simulé des surfaces d'onde totalement décorrélées d'une boucle à l'autre. Le saut significatif toutes les 15 itérations caractérise l'erreur de correction due à l'approximation de Γ par l'identité dans l'équation (20). La covariance temporelle du signal simu-

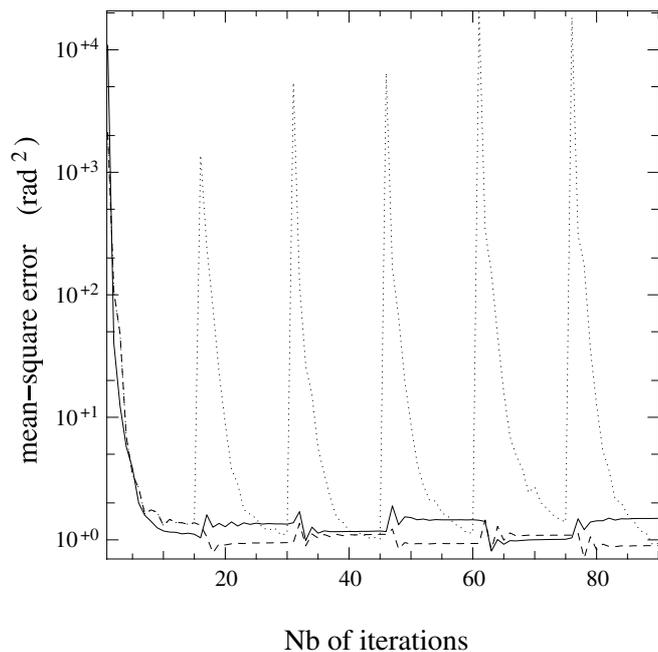


Figure 4. Courbes de convergence de l'erreur de reconstruction pendant 6 boucles fermées d'OA successives avec 15 itérations de FrIM par boucle. Trois cas sont simulés. Courbe trait plein: observation d'un front d'onde turbulent en translation au-dessus de la pupille. Déplacement de $1/10^\circ$ de sous-pupille par boucle. Courbe en trait tireté: observation d'un front d'onde turbulent fixe au-dessus de la pupille. Courbe en trait pointillé: observation d'une succession de fronts d'onde totalement décorrélés à chaque boucle. Les paramètres des simulations sont $N = 129 \times 129$, une turbulence caractérisée par r_0 de la taille d'une sous-pupille $d = 30$ cm, un bruit de mesure de variance 1 radian^2 par sous-pupille, une fréquence de boucle de 1 kHz.

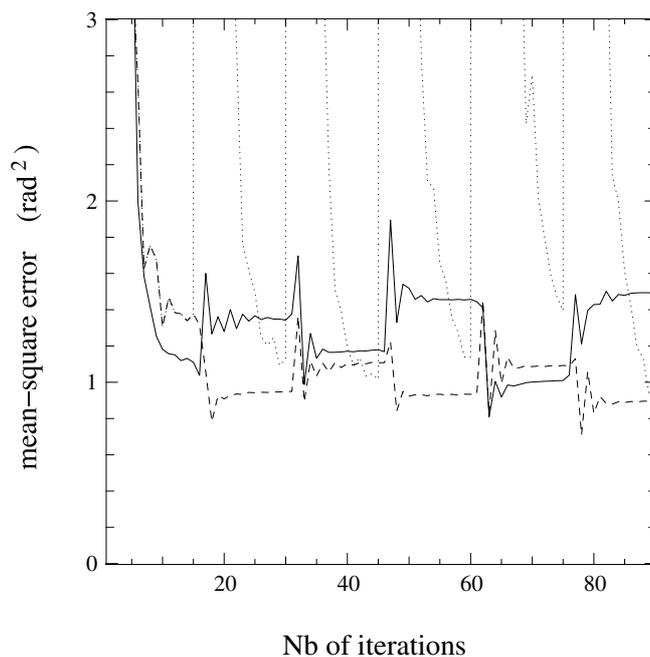


Figure 5. Agrandissement de la figure 4.



lée étant nulle, mieux vaut n'appliquer aucune commande puisque l'estimateur est en retard.

Au contraire, si l'OA boucle en observant une turbulence figée (courbe en trait tireté), alors la convergence est atteinte en 2 à 3 itérations. La valeur finale n'est pas exactement la même à chaque boucle en raison du bruit de mesure qui varie. De plus, les sauts significatifs de l'erreur toutes les 15 itérations disparaissent.

En effet, la turbulence simulée vérifie exactement $\Gamma = \mathbf{I}_d$.

La réalité se situe entre ces deux cas d'étude. Elle est simulée en décalant la surface d'onde d'un dixième de la pupille du télescope entre deux boucles successives (courbe trait plein), ce qui dans les conditions simulées correspond à une vitesse de vent forte de $30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans les couches turbulentes de l'atmosphère. La corrélation spatio-temporelle du signal dans ce cas proche de la réalité, et le fait d'initialiser l'algorithme avec l'estimée précédente permettent alors de converger en 3 à 4 itérations. Le coût de calcul de la commande en temps réel pour une OA est donc réduit par rapport à la simple reconstruction de surface d'onde.

Conclusion

L'optimisation de la variance de l'erreur de correction en OA boucle fermée nous a conduit à une reconstruction de front d'onde turbulent, de type *maximum a posteriori* sur des pseudo données boucle ouverte. La loi de commande globale correspond à une architecture de commande par modèle interne. Les coûts calculatoires de la commande sont minimisés par l'utilisation de la méthode FrIM pour l'étape d'estimation. Le fonctionnement en boucle fermée de l'OA tire profit du caractère itératif de la méthode, permettant d'accélérer la convergence en initialisant l'algorithme avec la surface d'onde estimée à la boucle précédente. D'après la figure 3, le gain en nombre d'opérations par seconde sur la multiplication matricielle pour $N = 10^4$ est d'un facteur 100, si on considère deux itérations par boucle.

Références

- [1] F. RODDIER, Adaptive Optics in Astronomy. Cambridge University Press., 1999.
- [2] É. THIÉBAUT and M. TALLON, Ultra fast maximum a posteriori wave front reconstruction for extremely large telescopes. *submitted to J. Opt. Soc. Am. A*, 2008.
- [3] A. TARANTOLA, Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation *SIAM*, 2005.
- [4] M. MORARI and E. ZAFIRIOU, Robust Process Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [5] V.I. TATARSKI, Wave propagation in a turbulent medium. Dover Publications, Inc. New York, 1961.

- [6] D.L. FRIED, Statistics of a geometric representation of wavefront distortion. *J. Opt. Soc. Am. A*, 55 :1427-1435, 1965.
- [7] K. B. PETERSEN and M. S. PEDERSEN, The Matrix Cookbook, Version February 10, 2007. *Technical University of Denmark*, 2007.
- [8] E. P. WALLNER, Optimal wave-front correction using slope measurements *J. Opt. Soc. Am.*, 73:1771-1776, 1983.
- [9] L. GILLES, C.R. VOGEL and B.L. ELLERBROEK, Multigrid preconditioned conjugate-gradient method for large-scale wave-front reconstruction. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19 :1817-1822, 2002.
- [10] Q. YANG, C.R. VOGEL and B.L. ELLERBROEK, Fourier domain preconditioned conjugate gradient algorithm for atmospheric tomography. *Applied Optics*, 45 :5281-5293, 2006.



Clémentine **Béchet**

Clémentine Béchet est née en France en 1979. Diplômée de l'École Centrale de Lyon en 2003, elle est d'abord ingénieur de recherche puis doctorante au Centre de Recherche Astrophysique de Lyon, en co-tutelle avec le laboratoire Ampère jusqu'en 2008. Elle travaille maintenant au sein de l'Organisme Européen pour la Recherche Astronomique dans l'Hémisphère Austral (ESO) en Allemagne. Ses travaux portent sur des problèmes inverses en interférométrie stellaire optique et sur la commande optimale en optique adaptative à grand nombre de degrés de liberté.



Michel **Tallon**

Chercheur CNRS depuis 1991, après une thèse en 1989 et un séjour à l'Imperial College de Londres en 1990, Michel Tallon travaille dans le domaine de la haute résolution angulaire en astronomie, notamment sur la turbulence atmosphérique, l'optique adaptative, l'analyse de surface d'onde, les étoiles de référence laser et l'interférométrie stellaire optique.



Éric **Thiébaud**

Éric Thiébaud est né à Béziers, en France, en 1966. Après son entrée à l'École Normale Supérieure en 1987, il a obtenu son doctorat d'astrophysique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VII) en 1994. Depuis 1995, il est astronome au Centre de Recherche Astrophysique de Lyon. Ses principaux domaines de recherche se situent en traitement du signal et reconstruction d'image. Il a fait diverses contributions en déconvolution aveugle, interférométrie optique et détection optimale.



Gérard **Thomas**

Gérard Thomas est né en France en 1947. Il a reçu son diplôme d'ingénieur de l'École Centrale de Lyon en 1971. Docteur ingénieur en 1974, puis docteur d'État en Mathématiques Appliquées de l'Université Claude Bernard de Lyon depuis 1981, il est actuellement professeur émérite à l'École Centrale de Lyon au laboratoire Ampère UMR 5005. Ses centres d'intérêt sont la commande des procédés et les problèmes inverses en traitement du signal.



Éric **Blanco**

Éric Blanco est né à Lyon, France, en 1975. Après un cursus universitaire, il a passé un doctorat en Automatique et Traitement du Signal à l'Université Claude Bernard (Lyon I à Villeurbanne) en 2002. Son travail de thèse a porté sur des problèmes d'estimation robuste non causaux pour le laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP). En 2003, il a obtenu un poste de Maître de Conférences en Automatique et Traitement du Signal à l'École Centrale de Lyon. Sa recherche actuelle pour le laboratoire Ampère est axée sur le contrôle, le diagnostic et le pronostic pour des systèmes complexes.



