
Commande prédictive des systèmes dynamiques hybrides

Marwa Taleb , Edouard Leclercq , Dimitri Lefebvre

*Groupe de Recherche en Électrotechnique et Automatique du Havre
75 rue bellot Cs 80540, BP 76600*

Le Havre, France

{marwa.taleb,edouard.leclercq,dimitri.lefebvre}@univ-lehavre.fr

RÉSUMÉ. Cet article concerne le problème de commande prédictive des systèmes dynamiques hybrides (SDH) modélisés par réseaux de Petri hybrides (RdPH) élémentaires avec des transitions immédiates et/ou temporisées. Le but est de piloter ces systèmes afin d'atteindre un marquage désiré. Étant donné que le SDH intègre à la fois des processus continus et discrets en interaction, la commande hybride proposée est composée d'actions de commande continues et discrètes. A chaque pas d'échantillonnage, la commande prédictive discrète explore partiellement le graphe d'atteignabilité et détermine l'ensemble des séquences de commandes réalisables de taille bornée. La commande prédictive continue calcule, pour chacune de ces séquences, la commande constante associée sur un horizon de prédiction continu variable, afin de choisir la commande hybride optimale qui minimise un critère de performance.

ABSTRACT. This paper addresses the predictive control design of Hybrid Dynamic Systems (HDS) modeled by Elementary Hybrid Petri Net (HPN) systems with timed and/or immediate discrete transitions. Our goal is to drive a HPN to reach a desired marking. Since HDS incorporates both discrete and continuous processes, the proposed control strategy, called Hybrid Predictive Control, is composed of discrete and continuous predictive control actions. At each sampling period, the discrete control explores a portion of the reachability graph and selects a set of feasible control sequences whose length is upper bounded. The continuous predictive control computes, for each sequence, the corresponding continuous constant control action, over a variable continuous prediction horizon, in order to find the optimal hybrid control that minimizes a certain cost function.

MOTS-CLÉS : réseau de Petri continu, réseau de Petri discret, réseau de Petri hybride élémentaire, commande prédictive.

KEYWORDS: continuous Petri Net, discrete Petri Net, elementary hybrid Petri Net, predictive control.

DOI:10.3166/JESA.50.49-74 © 2017 Lavoisier

1. Introduction

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes dynamiques qui combinent des dynamiques continues et discrètes. La modélisation, l'analyse de performance et la commande des SDH font l'objet de nombreux travaux de recherche effectués récemment (Ghomri, Alla, 2007 ; Alla, Ghomri, 2012). Plusieurs outils ont été proposés dans la littérature dans le but de modéliser les SDH, parmi lesquels les réseaux de Petri (RdP) et les automates hybrides (Ghomri, Alla, 2007). Dans cette contribution, une extension de RdP est considérée.

Le RdP est un formalisme mathématique qui bénéficie d'une représentation graphique intuitive et modulaire. Il joue un rôle important dans la modélisation, l'analyse de performance, la synthèse et dans l'implémentation des systèmes à événements discrets (Silva, 1993 ; Tolba *et al.*, 2005). Malheureusement, si le système discret modélisé possède un nombre important d'états, le graphe de marquage devient volumineux. Afin de pallier cet inconvénient majeur connu sous le nom d'explosion du nombre des états, une solution consiste à fluidifier le RdP. Ceci revient à passer d'un RdP discret à un RdP continu suite à une relaxation complète du RdP discret (Silva, Recalde, 2002 ; Giua *et al.*, 2006). Néanmoins, un tel modèle n'autorise ni des conditions logiques ni des actions discrètes (par exemple l'ouverture ou la fermeture d'une vanne) (Ghomri, Alla, 2007). Pour cette raison, le réseau de Petri hybride (RdPH) a été défini dans (David, Alla, 2001). Il représente un formalisme puissant qui permet de modéliser les systèmes dynamiques hybrides et de décrire les changements logiques qui peuvent survenir dans un processus continu. Le RdPH temporisé (RdPHT) est quant à lui obtenu grâce à une relaxation partielle du RdP afin de tenir compte des événements discrets (Julvez *et al.*, 2011). De ce fait, le RdPHT résulte d'une interaction entre un RdP continu temporisé et un RdP discret T-temporisé (Balduzzi *et al.*, 2000 ; David, Alla, 2001 ; Julvez *et al.*, 2011).

La littérature a mis en évidence l'utilité de la modélisation à l'aide des RdPH dans l'étude du comportement, la simulation, l'optimisation ainsi que la commande de différents types de SDH à savoir les systèmes de production (Julvez *et al.*, 2011), les systèmes manufacturiers flexibles (Balduzzi *et al.*, 2000), les transports ferroviaires (Kaakai *et al.*, 2006), la chaîne logistique (Dotoli *et al.*, 2009) et les systèmes multi-agents (Gudino-Mendoza, Lopez-Mellado, 2013). Les SDH peuvent être autonomes (David, Alla, 2001) ou commandés (Alla, Ghomri, 2012). Plusieurs travaux de recherche se sont intéressés par la commande des RdPH. En particulier, dans (Balduzzi *et al.*, 2000), l'objectif est de commander de façon optimale les systèmes manufacturiers modélisés par des RdPHT pour lesquels les transitions continues sont définies sous la sémantique serveurs finis et les transitions discrètes peuvent être immédiates, déterministes ou stochastiques. La commande proposée détermine le mode de fonctionnement optimal conformément à un objectif donné (par exemple maximiser l'utilisation des machines, maximiser la production du système et répartir la charge).

Récemment, du fait de sa robustesse par rapport aux perturbations, la commande prédictive est devenue très utilisée pour commander les RdPHT. Cette commande a été initialement utilisée pour commander les réseaux de Petri continus temporisés (Giua *et al.*, 2006 ; Taleb *et al.*, 2014a). Son idée de base est d’anticiper l’évolution du système. Elle optimise une fonction coût permettant au système d’évoluer d’un état actuel à une configuration désirée. En ce qui concerne les RdPHT, dans (Julvez *et al.*, 2013), les auteurs ont proposé une commande prédictive événementielle. Cette stratégie de commande combine la commande prédictive et la commande événementielle (“event-driven”) proposée dans (Julvez *et al.*, 2004). Elle consiste à éviter la discrétisation du temps et propose une évolution qui dépend de l’occurrence d’un événement (une place vidée ou le franchissement d’une transition discrète), ce qui implique que le temps séparant deux événements successifs est variable. L’efficacité de cette commande a été mise en évidence sur des RdPDE modélisant une machine multiclasse et sur un réseau de production. L’inconvénient de cette commande est la complexité de calcul qui augmente exponentiellement en fonction de la taille du RdPH et du nombre d’événements. Dans le cadre de l’utilisation de la commande prédictive, une méthode de commande des systèmes autoroutiers a été proposée dans (Fanti *et al.*, 2014). Les auteurs ont conçu une technique de commande en ligne inspirée de la commande prédictive afin de réguler la circulation sur les autoroutes en maximisant le flux de circulation dans les voies congestionnées.

Ces méthodes de commande ne concernent que les RdPH avec des transitions continues définies sous la sémantique serveurs finis. A cet égard, l’étude menée dans cet article est principalement dans le cadre de la conception d’une commande prédictive pour SDH modélisés à l’aide de RdPH tels que les transitions continues sont définies sous la sémantique serveurs infinis.

La contribution principale de cet article est de proposer une commande prédictive hybride dans le cas des transitions discrètes immédiates et temporisées. Cette commande intègre explicitement deux types de commandes prédictives, en particulier, une commande prédictive discrète proposée dans (Lefebvre, Leclercq, 2015) et une commande prédictive continue constante sur l’horizon de prédiction proposée dans (Taleb *et al.*, 2016). Dans un premier temps, seules les transitions discrètes immédiates sont considérées. La partie discrète est commandée par la commande prédictive discrète afin de déterminer l’ensemble de séquences possibles, puis pour chacune de ces séquences, une commande prédictive constante est appliquée à la partie continue. Finalement, la commande prédictive hybride est représentée par un couple constitué d’une séquence de franchissements possible et d’une commande continue appliquée aux transitions continues. Ces deux commandes sont déterminées de telle sorte à minimiser un critère de performance. Dans un second temps, cette méthodologie est exploitée afin de commander les RdPH élémentaires (ou D-élémentaires) avec des transitions discrètes non immédiates.

Cet article est composé de cinq parties organisées comme suit : la section 2 présente les notions fondamentales du RdPH commandé et introduit les notations qui

seront utilisées tout au long de l'article. La section 3 explique le principe de la commande prédictive hybride du RdPHT avec des transitions discrètes immédiates. L'efficacité de cette méthode est démontrée par une proposition garantissant l'optimalité des commandes discrètes et continues constantes, par rapport à la fonction coût choisie. Dans la section 4, une extension de la commande prédictive hybride a été mise en place afin de tenir compte de temporisations sur les actions discrètes. Finalement, les conclusions et perspectives sont proposées dans la section 5.

2. Réseaux de Petri hybrides

Le lecteur est supposé être familier avec les réseaux de Petri continus et discrets (pour une introduction voir (David, Alla, 1992 ; Silva, 1993 ; Silva, Recalde, 2004)).

2.1. Réseaux de Petri hybrides non temporisés

Un RdPH est un couple $\langle \mathcal{N}, M_0 \rangle$. \mathcal{N} est la structure du réseau représentée par le quadruplet $\langle P, T, W_{pr}, W_{po} \rangle$ où $P = \{p_i\}_{i=1, \dots, n}$ et $T = \{t_j\}_{j=1, \dots, q}$ sont deux ensembles finis non vides composés respectivement de $n = |P|$ places et de $q = |T|$ transitions. Ces derniers se décomposent explicitement en deux sous-ensembles continus et discrets comme suit: $P = P_c \cup P_d$ et $T = T_c \cup T_d$ tels que $n_c = |P_c|$, $n_d = |P_d|$, $q_c = |T_c|$ et $q_d = |T_d|$. W_{pr} et W_{po} désignent la structure statique du réseau : $\forall (p_i, t_j) \in P \times T$, $W_{pr}(p_i, t_j)$ et $W_{po}(p_i, t_j)$ représentent respectivement le poids de l'arc de p_i vers t_j et de t_j vers p_i . Dans cet article et sous réserve de changer l'ordre de numérotation des places et transitions, la représentation (1) est adoptée :

$$W_{pr} = \begin{bmatrix} W_{pr}^{dd} & W_{pr}^{dc} \\ W_{pr}^{cd} & W_{pr}^{cc} \end{bmatrix}; W_{po} = \begin{bmatrix} W_{po}^{dd} & W_{po}^{dc} \\ W_{po}^{cd} & W_{po}^{cc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matrice d'incidence W est définie par $W = W_{po} - W_{pr}$. Elle est représentée par (2) :

$$W = \begin{bmatrix} W^{dd} & W^{dc} \\ W^{cd} & W^{cc} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Les sous matrices de W_{pr} , de W_{po} et de W sont de dimensions adéquates. W^{dd} et W^{cc} représentent respectivement les liens entre les éléments discrets et continus alors que W^{dc} et W^{cd} regroupent respectivement les liens des éléments discrets vers les éléments continus et ceux des éléments continus vers les éléments discrets.

Le marquage courant du RdPH est noté $M = [m_1 \ \dots \ m_i \ \dots \ m_n]^t = [M_d \ M_c]^t$ où m_i est le marquage de la place p_i . $M_d \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{n_d}$ et $M_c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n_c}$ représentent respectivement le marquage courant des places discrètes et continues. M_0 dénote le marquage initial défini par $M_0 = [M_{0d} \ M_{0c}]^t$. Le vecteur de franchissements des transitions d'un RdPH est défini par $\Gamma = [\Gamma_d \ \Gamma_c]^t$ où $\Gamma_d \in \mathbb{N}^{q_d}$ désigne le vecteur de franchissements des transitions discrètes et $\Gamma_c \in \mathbb{R}^{q_c}$ représente le vecteur de franchissements des transitions continues.

Chaque élément $v \in P \cup T$ possède des éléments d'entrées et de sorties qui sont désignés respectivement par ${}^\circ v$ et v° . D'une manière générale, une transition t_j (discrète ou continue) peut avoir en amont ou en aval des places continues ou discrètes sous réserve de respecter la condition suivante : $\forall (p_i, t_j) \in P_d \times T_c, W_{pr}^{dc}(p_i, t_j) = W_{po}^{dc}(p_i, t_j)$ ce qui implique $W^{dc}(p_i, t_j) = 0$. Cette propriété fondamentale du RdPH assure que le franchissement d'une transition continue ne modifie pas le marquage d'une place discrète et de ce fait, elle maintient un marquage entier pour les places discrètes (David, Alla, 2001).

Un RdPH est dit élémentaire si toutes les transitions discrètes qui possèdent en amont (respectivement en aval) une place continue, possèdent la même place en aval (respectivement en amont) avec le même poids de l'arc. Autrement dit, $W_{pr}^{cd} = W_{po}^{cd}$ (David, Alla, 2001). Un RdPH est dit D-élémentaire s'il n'y pas d'interaction directe entre les places continues et les transitions discrètes. En d'autres termes, $W_{pr}^{cd} = W_{po}^{cd} = O_{n_c \times q_d}$. Dans les deux cas (RdPH élémentaire ou D-élémentaire), $W^{cd} = O_{n_c \times q_d}$. En conséquence, la matrice d'incidence d'un RdPH D-élémentaire ou élémentaire est notée selon (3) (David, Alla, 2001 ; Ghomri, Alla, 2007) :

$$W = \begin{bmatrix} W^{dd} & O_{n_d \times q_c} \\ O_{n_c \times q_d} & W^{cc} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dans le cas de RdPH non-élémentaire, il existe une interaction directe entre les transitions discrètes et les places continues. Cette interaction se traduit par des valeurs non-nulles de la sous-matrice W^{cd} . Le franchissement d'une transition discrète modifie le marquage des places continues associées.

Dans la suite de cet article, seuls les RdPH élémentaires ou D-élémentaires sont considérés.

Soit $\eta_d(t_j, M)$ le degré de validation d'une transition discrète $t_j \in T_d$. Ce dernier est exprimé par l'équation (4) :

$$\eta_d(t_j, M) = \min_{p_i \in {}^\circ t_j} \left\{ \left\lfloor \frac{m_i}{W_{pr}(p_i, t_j)} \right\rfloor \right\} \quad (4)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ symbolise la partie entière par défaut de (\cdot) et m_i représente le marquage de la place p_i .

La transition $t_j \in T_d$ est validée par le marquage M si et seulement si $\eta_d(t_j, M) > 0$. Cette transition validée peut être franchie avec une quantité entière de marque $\alpha_d \in \mathbb{N}$ telle que $0 < \alpha_d \leq \eta_d(t_j, M)$. Le franchissement de cette transition discrète modifie uniquement la partie discrète M_d du marquage M dont la variation ΔM est donnée par l'équation (5) :

$$\Delta M = \alpha_d \cdot \begin{bmatrix} W^{dd}(:, t_j) \\ O_{n_c \times 1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

où $W^{dd}(:, t_j)$ correspond à la colonne de W^{dd} associée à t_j .

Une transition continue $t_j \in T_c$ est validée par le marquage M si et seulement si $\forall p_i \in {}^\circ t_j, m_i > 0$. Son degré de validation est défini selon l'équation (6) :

$$\eta_c(t_j, M) = \min_{p_i \in {}^\circ t_j} \left\{ \frac{m_i}{W_{pr}(p_i, t_j)} \right\} \quad (6)$$

Cette transition validée peut être franchie avec une quantité réelle de marque $\alpha_c \in \mathbb{R}$ telle que $0 < \alpha_c \leq \eta_c(t_j, M)$ et conduit à un nouveau marquage M pour lequel seule la partie continue M_c est modifiée. La variation du marquage ΔM est donnée par l'équation (7) :

$$\Delta M = \alpha_c \cdot \begin{bmatrix} O_{n_d \times 1} \\ W^{cc}(:, t_j) \end{bmatrix} \quad (7)$$

L'espace d'atteignabilité d'un RdPH, noté $R(\mathcal{N}, M_0)$, est constitué de l'ensemble de tous les marquages atteignables à partir du marquage initial.

Si $M \in R(\mathcal{N}, M_0)$, l'évolution du RdPH est traduite par l'équation (8) :

$$M = M_0 + W \cdot \Gamma \quad (8)$$

2.2. Réseaux de Petri Hybrides temporisés

Un RdPHT est un RdPH auquel des contraintes de temps sont ajoutées. Il est représenté par le quadruplet $\langle \mathcal{N}, M_0, D_{min}, \lambda \rangle$ tel que D_{min} est l'ensemble des durées minimales de franchissement des transitions discrètes : $D_{min} = (d_{min j})_{j=1, \dots, q_d} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{q_d}$. Autrement dit, une transition discrète t_j validée par le marquage discret courant à l'instant τ ne peut être franchie qu'à partir de l'instant $\tau + d_{min j}$. Si $d_{min j} = 0$, la transition t_j est immédiate (David, Alla, 1992). $\lambda = (\lambda_j)_{j=q_d+1, \dots, q} \in \mathbb{R}_{> 0}^{q_c}$ représentent les vitesses maximales de franchissement des transitions continues. Cette partie décrit la variation de marquage d'un RdPHT en régime libre.

L'équation fondamentale définie par (8) dépend désormais du temps. De plus, le marquage du RdPH à l'instant τ est noté $M(\tau) = [M_d(\tau) \quad M_c(\tau)]^t$, le marquage discret varie selon l'équation (9) :

$$M_d(\tau^+) = M_d(\tau) + W^{dd} \cdot \Gamma_d(\tau) \quad (9)$$

où $M_d(\tau^+)$ représente le marquage discret obtenu après franchissement des transitions discrètes à l'instant τ .

Le franchissement des transitions s'effectue selon un flux continu et les jetons s'écoulent de manière continue comme un fluide, d'une place d'entrée vers une place de sortie. Le flux de franchissement est noté $F_c(\tau^+) = \dot{\Gamma}_c(\tau^+) = (f_j(\tau^+))_{j=q_d+1, \dots, q} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^q$. Il mesure la quantité maximale de jetons qui peuvent passer à travers chacune des transitions par unité de temps (U.T.) en régime libre.

Selon la sémantique serveurs infinis (David, Alla, 1992 ; Mahulea *et al.*, 2006), le flux de chaque transition continue est donné par l'équation (10) :

$$\forall t_j \in T_c, f_j(\tau^+) = \lambda_j \cdot \eta_c(t_j, M(\tau^+)) \quad (10)$$

Dans le cas d'un RdPH élémentaire temporisé, le marquage continu est défini par la dérivée du marquage par rapport au temps suivant l'équation (11) :

$$\dot{M}_c(\tau^+) = W^{cc} \cdot F_c(\tau^+) \quad (11)$$

L'espace d'atteignabilité d'un RdPHT est désormais noté par $R(\mathcal{N}, M_0, D_{min}, \lambda)$. Il peut être partitionné en une ou plusieurs régions : $R(\mathcal{N}, M_0, D_{min}, \lambda) = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_Z$ telles que le nombre total de régions est donné par l'équation (12) :

$$Z \leq \prod_{j=q_d+1}^q |\circ t_j| \quad (12)$$

Chaque région R_z , $z = 1, \dots, Z$, correspond à une configuration caractérisée par une matrice de contrainte A_z^c telle que $A_z^c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{q_c \times n}$ (Mahulea, Ramirez-Trevino *et al.*, 2008). Afin de définir explicitement ces régions, on utilise la notion de places critiques : la transition $t_j \in T_c$ possède p_i comme place critique pour le marquage $M(\tau^+)$ si l'égalité (13) est satisfaite :

$$\frac{m_i(\tau^+)}{W_{pr}(p_i, t_j)} = \eta_c(t_j, M(\tau^+)) \quad (13)$$

Par conséquent, chaque ligne ($j = 1, \dots, q_c$) de la matrice de contrainte des transitions continues $A_z^c \in \mathbb{R}^{q_c \times n}$, définie selon l'équation (14), n'a qu'un seul élément non nul à la $i^{\text{ème}}$ position :

$$A_z^c(t_j, p_i) = \begin{cases} \frac{1}{W_{pr}(p_i, t_j)}, & \text{si } p_i \text{ est la place critique de } t_j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (14)$$

Dans ce qui suit, la représentation suivante de la matrice de contrainte A_z^c , est considérée : $A_z^c = [A_z^{cd} \ A_z^{cc}]$ telle que $A_z^{cd} \in \mathbb{R}^{q_c \times n_d}$ et $A_z^{cc} \in \mathbb{R}^{q_c \times n_c}$. L'écriture matricielle du flux $F_c(\tau^+)$ des transitions continues est désormais donnée par le produit $F_c(\tau^+) = \Lambda \cdot A_z^c \cdot M(\tau^+)$ où $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$ est la matrice diagonale des vitesses maximales de franchissement.

Le temps τ est dorénavant échantillonné grâce à une horloge externe de période d'échantillonnage θ : $\tau_k = \theta \cdot k$ où la période θ doit satisfaire la condition (15) pour que tous les marquages atteignables à partir du marquage initial M_0 soient positifs (Mahulea *et al.*, 2006) :

$$\forall p_i \in P_c, \quad \sum_{t_j \in P_i^\circ / t_j \in T_c} \lambda_j \cdot \theta < 1 \quad (15)$$

Les événements discrets sont supposés être synchronisés avec τ_k . Par conséquent, $M_d(\tau_{k+1}) = M_d(\tau_{k+})$ et $M_c(\tau_{k+1}) = M_c(\tau_k)$. En conséquence, à chaque instant discret $\tau_k > 0$, l'équation fondamentale s'écrit selon le système d'équations (16) :

$$\begin{cases} M_d(\tau_{k+1}) = M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot \Gamma_d(\tau_k) \\ M_c(\tau_{k+1}) = M_c(\tau_k) + W^{cd} \cdot \Gamma_d(\tau_k) + \theta \cdot W^{cc} \cdot F_c(\tau_{k+}) \end{cases} \quad (16)$$

et en désignant par A_z^c la matrice de contrainte de la région R_z à l'instant τ_k , le flux en régime libre $F_c(\tau_{k+})$ est désormais exprimé par le système d'équations (17) :

$$\begin{aligned} F_c(\tau_{k+}) &= \Lambda \cdot A_z^c \cdot M(\tau_{k+}) \\ &= \Lambda \cdot (A_z^c \cdot M(\tau_k) + A_z^{cd} \cdot W^{dd} \cdot \Gamma_d(\tau_k)) \end{aligned} \quad (17)$$

En remplaçant $F_c(\tau_{k+})$ par son expression (17), et en réinjectant dans (16), le marquage continu sera exprimé selon (18) :

$$M_c(\tau_{k+1}) = M_c(\tau_k) + \theta \cdot W^{cc} \cdot \Lambda \cdot A_z^c \cdot M(\tau_k) + \theta \cdot W^{cc} \cdot \Lambda \cdot A_z^{cd} \cdot W^{dd} \cdot \Gamma_d(\tau_k) \quad (18)$$

Dans le paragraphe suivant, les actions de commandes appliquées aux transitions seront considérées.

2.3. Réseaux de Petri hybrides élémentaires commandés

Soit $T^{comm} \subseteq T$ tel que $T^{comm} = T_c^{comm} \cup T_d^{comm}$, l'ensemble des transitions continues et discrètes temporisées commandables. Par conséquent, le RdPHT commandé sera défini par le quintuplet $\langle \mathcal{N}, M_0, D_{min}, \lambda, T^{comm} \rangle$. Les transitions discrètes commandables (T_d^{comm}) validées par le marquage courant peuvent être franchies selon la commande appliquée, tandis que les transitions discrètes non commandables sont franchies de façon intempestive selon des conditions (externes ou internes) qui ne sont pas connues par la commande. De ce fait, le franchissement des transitions discrètes non commandables est considéré comme une perturbation. Les transitions modélisent soit les actionneurs des machines réelles, soit les serveurs dans une station, par conséquent, les actions de commande ne peuvent que ralentir ou arrêter leurs activités et le flux des transitions continues commandables (T_c^{comm}) est ralenti par le vecteur de commandes U_c (Silva, Recalde, 2004). A l'inverse, les transitions continues non commandables sont franchies avec leur flux maximal de franchissement. Il existe deux approches de commande soit l'approche additive (Silva, Recalde, 2004), soit l'approche multiplicative (Lefebvre *et al.*, 2015). Ces deux approches sont équivalentes (Silva, Recalde, 2004). Cet article adopte l'approche additive utilisée dans (Silva, Recalde, 2004). En conséquence, le flux et le marquage continus sont désormais exprimés selon (19) et (20) :

$$\begin{aligned} X_c(\tau_{k+}) &= F_c(\tau_{k+}) - U_c(\tau_{k+}) \\ &= \Lambda \cdot (A_z^c \cdot M(\tau_k) + A_z^{cd} \cdot W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) - U_c(\tau_{k+}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_c(\tau_{k+1}) &= M_c(\tau_k) + \theta \cdot W^{cc} \cdot X_c(\tau_{k+}) \\ &= G_z^c \cdot M_c(\tau_k) + G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) - \theta \cdot W^{cc} \cdot U_c(\tau_{k+}) \end{aligned} \quad (20)$$

où $X_d(\tau_k)$ correspond au vecteur de franchissements discrets en régime forcé. Les deux termes G_z^c et G_z^d sont définis selon l'équation (21) :

$$\begin{cases} G_z^c = I_{n_c} + \theta \cdot W^{cc} \cdot \Lambda \cdot A_z^{cc} \\ G_z^d = \theta \cdot W^{cc} \cdot \Lambda \cdot A_z^{cd} \end{cases} \quad (21)$$

où I_{n_c} désigne la matrice identité de dimension $n_c \times n_c$.

Soit $V_c^{n_{comm}} \in \{0, 1\}^{q_c}$ un vecteur défini qui identifie les transitions non commandables. Il est défini par (22) :

$$\forall t_j \in T_c, V_c^{n_{comm}}(t_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } t_j \notin T_c^{comm} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (22)$$

La commande continue $U_c(\tau_{k+})$ doit respecter les trois conditions données par le système d'équations (23) :

$$\begin{aligned} \mathbf{a/} & U_c(\tau_{k+}) \geq 0_{q_c \times 1} \\ \mathbf{b/} & \text{diag}(V_c^{n_{comm}}) \cdot U_c(\tau_{k+}) = O_{q_c \times 1} \\ \mathbf{c/} & U_c(\tau_{k+}) \leq \Lambda \cdot (A_z^c \cdot M(\tau_k) + A_z^{cd} \cdot W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) \end{aligned} \quad (23)$$

Les conditions (a) et (b) exigent respectivement que la commande continue soit positive pour les transitions continues commandables (car l'action de commande étudiée ne peut que réduire le flux de franchissement des transitions commandables) et qu'elle soit nulle pour les transitions continues non commandables. La condition (c) impose un flux continu positif (commande continue inférieure ou égale au flux continu en régime libre (19)).

3. Commande prédictive hybride

3.1. Principe de la commande prédictive

La commande prédictive est une méthode de commande qui anticipe l'évolution d'un système linéaire en temps discret à partir de son modèle et pour un nombre fini de pas (connu sous le nom d'horizon de prédiction). Son but est de déterminer la commande qui optimise une certaine fonction de performance. Cette fonction est généralement définie par l'écart quadratique entre l'état actuel du système et l'état de référence (Richalet *et al.*, 1978 ; Bemporad *et al.*, 2002).

Les auteurs de (Giua *et al.*, 2006 ; Mahulea, Giua *et al.*, 2008) ont proposé une adaptation de cette méthodologie aux systèmes dynamiques modélisés par RdPC. L'idée de base de cette commande prédictive implicite est de minimiser, à chaque période d'échantillonnage et sous un certain nombre de contraintes, un critère de performance noté J , sur un horizon de prédiction continu désigné par N_c . Ce critère de performance permet au RdPC d'évoluer d'un état initial jusqu'à une configuration désirée. Seule la première itération de cette commande résultante sera appliquée au point courant, le marquage est ensuite calculé et le problème d'optimisation répété (Giua *et al.*, 2006 ; Mahulea, Giua *et al.*, 2008).

Les systèmes hybrides étudiés sont des systèmes continus avec des actionneurs continus et discrets. En conséquence, la configuration désirée ne concerne que la partie continue du système hybride. La forme générale de la fonction coût $J(\tau_{k+N_c})$

de la commande prédictive continue est détaillée dans (Giua *et al.*, 2006 ; Taleb *et al.*, 2014a ; 2014b). Tout au long de cet article, une simplification de cette fonction est considérée. Celle-ci est définie uniquement par l'écart quadratique du marquage continu obtenu après $k + N_c$ pas de calcul ($M_c(\tau_{k+N_c})$) par rapport au marquage désiré noté M_{cref} (Taleb *et al.*, 2016). L'expression du critère est définie par l'équation (24) (Taleb *et al.*, 2016) :

$$J(\tau_{k+N_c}) = (M_c(\tau_{k+N_c}) - M_{cref})^t \cdot Q_c \cdot (M_c(\tau_{k+N_c}) - M_{cref}) \quad (24)$$

où Q_c est une matrice symétrique et positive.

Sachant que $F_c(\tau_{k+e})$ représente le flux maximal de franchissement à l'instant τ_{k+e} , la commande continue obtenue, à chaque instant τ_{k+} , est celle qui minimise la fonction $J(\tau_{k+N_c})$ en respectant un ensemble de contraintes relatives au flux

$$\forall e = 1, \dots, N_c \begin{cases} \text{diag}(V_c^{ncomm}) \cdot U_c(\tau_{k+}) = 0_{q_c \times 1} \\ F_c(\tau_{k+e-1}) \geq X_c(\tau_{k+e-1}) \\ X_c(\tau_{k+e-1}) \geq 0_{q_c \times 1} \end{cases} \quad (25)$$

La largeur de l'horizon de prédiction améliore les performances de la commande prédictive. En revanche, elle peut entraîner une explosion combinatoire du nombre des contraintes sur U_c ainsi qu'une augmentation considérable de l'espace de recherche et du temps nécessaire pour accomplir la prédiction. Afin de limiter les efforts de calcul, la commande U_c sera supposée constante durant la prédiction (Taleb *et al.*, 2016).

La prédiction de la partie continue du RdPHT est réalisée sur un horizon de N_c périodes d'échantillonnage alors que la prédiction de la partie discrète est réalisée sur un horizon de N_d événements discrets intermédiaires. Autrement dit, les séquences de commandes réalisables données par la commande discrète sont constituées d'au plus N_d transitions discrètes commandables.

Le principe de la commande hybride prédictive proposée dans le cas de transitions discrètes immédiates est détaillé dans la sous-section suivante.

3.2. Principe de la commande hybride avec des transitions discrètes immédiates

Les transitions discrètes, dans cette sous-section, sont considérées immédiates. Par conséquent, toutes les actions discrètes ne sont prises en compte qu'aux instants τ_k . La commande prédictive hybride proposée est inspirée du principe de la commande prédictive continue (Giua *et al.*, 2006 ; Taleb *et al.*, 2014a ; 2014b). La proposition 1 montre que l'optimisation de la fonction coût (24) sous les contraintes (25) peut se transformer en un problème d'optimisation quadratique (Geletu, 2007).

PROPOSITION 1. — Soit $(\mathcal{N}, M_0, D_{min}, \lambda, T^{comm})$ un RdPHT élémentaire commandé. Les transitions discrètes sont supposées être immédiates ($D_{min} = 0_{q_d \times 1}$). Soient $N_c > 0$ et $N_d > 0$ respectivement les horizons de prédiction des dynamiques continues et discrètes. En supposant que toutes les actions discrètes soient exécutées aux instants τ_k , qu'aucun événement ne se déclenche durant la période de temps

$]\tau_k \ \tau_{k+N_c}[$ et que le marquage ne change pas de région R_z durant ce même intervalle de temps, alors la séquence de commandes discrètes $\sigma(\tau_k)$ (de taille maximale N_d et de vecteur de franchissements $X_d(\tau_k)$) et la commande constante $U_c(\tau_{k+})$ qui minimisent le critère de performance $J(\tau_{k+N_c})$ (24), sous les contraintes (25), est la solution du problème d'optimisation quadratique (26) sous les contraintes (27) :

$$(X_d(\tau_k), U_c(\tau_{k+})) = \arg \min_{U_c} \left\{ \frac{1}{2} \cdot U_c^t \cdot \Omega \cdot U_c + \rho(X_d(\tau_k))^t \cdot U_c, \forall \sigma(\tau_k) \in E \right\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a/} \quad & \text{diag}(V_c^{ncomm}) \cdot U_c(\tau_{k+}) = 0_{q_c \times 1} \\ \mathbf{b/} \quad & \forall e = 1, \dots, N_c - 1, S_{e-1} \cdot U_c(\tau_{k+}) \geq 0_{q_c \times 1} \\ \mathbf{c/} \quad & S_{e-1} \cdot U_c(\tau_{k+}) \leq \Lambda \cdot A_z^{cc} \cdot ((G_z^c)^{e-1} \cdot M_c(\tau_k) + \Sigma_{e-1} \cdot G_z^d \cdot M_d(\tau_k)) \\ & + \Lambda \cdot A_z^{cc} \cdot \Sigma_{e-1} \cdot G_z^d \cdot W^{dd} \cdot X_d(\tau_k) \\ & + \Lambda \cdot A_z^{cd} \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) \end{aligned} \quad (27)$$

Ω et $\rho(X_d(\tau_k))$ sont donnés respectivement par (28) et (29) :

$$\Omega = \theta^2 \cdot (W^{cc})^t \cdot (\Sigma_{N_c})^t \cdot Q_c \cdot (\Sigma_{N_c}) \cdot (W^{cc}) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho(X_d(\tau_k)) = & \theta \cdot (W^{cc})^t \cdot (\Sigma_{N_c})^t \cdot Q_c \cdot (M_{cref} - (G_z^c)^{N_c} \cdot M_c(\tau_k)) \\ & - \theta \cdot (W^{cc})^t \cdot (\Sigma_{N_c})^t \cdot Q_c \cdot \Sigma_{N_c} \cdot G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) \end{aligned} \quad (29)$$

L'ensemble E , défini par (30), est l'ensemble des séquences discrètes, de taille maximale N_c , franchissables à partir du marquage discret $M_d(\tau_k)$.

$$E = \{ \sigma \in (T_d^{comm})^* \text{ tel que } |\sigma| \leq N_d \text{ et } M_d(\tau_k)[\sigma > \} \quad (30)$$

où $*$ représente l'étoile de Kleene.

G_z^c et G_z^d sont définis par (21), le vecteur V_c^{ncomm} est donné par (22) et les termes Σ_e et $S_e \forall e = 1, \dots, N_c$ sont définis par (31) :

$$\begin{cases} \Sigma_e = \sum_{j=0}^{e-1} (G_z^c)^j, \Sigma_0 = 0_{n_c} \\ S_e = I_{q_c} + \theta \cdot \Lambda \cdot A_z^{cc} \cdot \Sigma_e \cdot W^{cc}, S_0 = I_{q_c} \end{cases} \quad (31)$$

PREUVE. — En supposant que la commande continue soit constante durant la prédiction, que le marquage continu ne change pas de région et qu'aucun franchissement discret ne se produira dans l'intervalle $]\tau_k \ \tau_{k+N_c}[$, le flux en régime forcé $X_c(\tau_{k+e-1})$ ainsi que le marquage continu $M_c(\tau_{k+e}), \forall e = 1, \dots, N_c$, sont obtenus de façon itérative à partir de (19) et de (20) et donnés par (32) et (33) :

$$\begin{aligned} X_c(\tau_{k+e-1}) = & \Lambda \cdot A_z^{cd} \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) - S_{e-1} \cdot U_c(\tau_{k+}) \\ & + \Lambda \cdot A_z^{cc} \cdot ((G_z^c)^{e-1} \cdot M_c(\tau_k) + \Sigma_{e-1} \cdot G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k))) \end{aligned} \quad (32)$$

$$M_c(\tau_{k+e}) = (G_z^c)^e \cdot M_c(\tau_k) + \Sigma_e \cdot G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) - \theta \cdot \Sigma_e \cdot W^{cc} \cdot U_c(\tau_{k+}) \quad (33)$$

L'expression (33) est utilisée pour réécrire le critère $J(\tau_{k+N_c})$ donnée par (24). En supprimant tous les termes constants par rapport à $U_c(\tau_{k+})$, le critère $J(\tau_{k+N_c})$ se simplifie selon $J_U(\tau_{k+N_c})$ défini par (34) :

$$J_U(\tau_{k+N_c}) = \frac{\theta^2}{2} \cdot U_c(\tau_{k+})^t \cdot (W^{cc})^t \cdot (\Sigma_{N_c})^t \cdot Q_c \cdot (\Sigma_{N_c}) \cdot (W^{cc}) \cdot U_c(\tau_{k+}) + \theta \cdot (M_{cref} - (G_z^c)^{N_c} \cdot M_c(\tau_k))^t \cdot Q_c \cdot (\Sigma_{N_c}) \cdot (W^{cc}) \cdot U_c(\tau_{k+}) - \theta \cdot (\Sigma_{N_c} \cdot G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)))^t \cdot Q_c \cdot (\Sigma_{N_c}) \cdot (W^{cc}) \cdot U_c(\tau_{k+}) \quad (34)$$

Ce dernier est reformulé selon l'équation (35) où Ω et $\rho(X_d(\tau_k))$ sont définis respectivement par (28) et (29).

$$J_U(\tau_{k+N_c}) = \frac{1}{2} \cdot U_c(\tau_{k+})^t \cdot \Omega \cdot U_c(\tau_{k+}) + \rho(X_d(\tau_k))^t \cdot U_c(\tau_{k+}) \quad (35)$$

$F_c(\tau_{k+e-1})$, $\forall e = 1, \dots, N_c$, est donné par (36) :

$$F_c(\tau_{k+e-1}) = \Lambda \cdot A_z^{cd} \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k)) + \Lambda \cdot A_z^{cc} \cdot ((G_z^c)^{e-1} \cdot M_c(\tau_k) + \Sigma_{e-1} \cdot G_z^d \cdot (M_d(\tau_k) + W^{dd} \cdot X_d(\tau_k))) \quad (36)$$

Les contraintes sur $U(\tau_{k+})$ (27) sont obtenues en substituant, dans l'équation (25), $X(\tau_{k+e-1})$ par (32). ■

La proposition 1 est utilisée de manière itérative par l'algorithme 1 qui détermine la commandes hybride $(X_d(\tau_k), U_c(\tau_{k+}))$ jusqu'à obtention du marquage désiré. Cette détermination se déroule en deux étapes complémentaires ; la première concerne la construction de l'ensemble E de toutes les séquences de commandes admissibles obtenues grâce à une commande prédictive discrète décrite par l'algorithme 2. Cette commande repose principalement sur une exploration partielle du graphe d'atteignabilité des RdP discrets pour déterminer des séquences de franchissements de taille quasi-minimale (Lefebvre, Leclercq, 2015).

Soient \mathcal{N}^{d_comm} la structure de la partie discrète du RdPHT en ne considérant que les transitions discrètes immédiates commandables (T_d^{comm}) , $R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ l'ensemble de tous les marquages discrets atteignables à partir du marquage $M_d(\tau_k)$ et $\sigma_{M'_d}$ une séquence de commandes possible qui permet d'atteindre un marquage $M'_d \in R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ en franchissant $|\sigma_{M'_d}| = H_{M'_d}$ transitions discrètes immédiates commandables.

A chaque instant τ_k , l'algorithme 2 détermine l'ensemble $R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ et associe à chaque marquage $M'_d \in R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ l'ensemble $E_{\sigma_{M'_d}}$ constitué de toutes les séquences de commandes $\sigma_{M'_d}$ de taille au plus $N_d : E_{\sigma_{M'_d}} = \{\sigma_{M'_d} \in$

$(T_d^{comm})^*$ tel que $|\sigma_{M'_d}| = H_{M'_d} \leq N_d$ et $M_d(\tau_k) [\sigma_{M'_d} > M'_d]$. L'union des ensembles $E_{\sigma_{M'_d}} \forall M'_d \in R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ forme l'ensemble E (30).

Ensuite, à chaque séquence de franchissements $\sigma(\tau_k) \in E$ de vecteur de franchissements $X_d(\tau_k)$ est associée la commande constante $U_c(\tau_{k+})$ qui minimise le critère $J_U(\tau_{k+N_c})$, décrit par l'équation (35), sous les contraintes (27). L'horizon de prédiction continu N_c est variable. Il est adapté à chaque itération : dans le cas où le marquage $M_c(\tau_{k+e})$ change de région R_z , la valeur de e est affectée à N_c . Finalement, la commande hybride optimale $(X_d(\tau_k), U_c(\tau_{k+}))$ retenue est celle qui minimise le critère de performance $J_U(\tau_{k+N_c})$ (35). Cette commande est appliquée au système, les marquages continu et discret, le flux et le critère de performance sont calculés. Le processus d'optimisation se répète jusqu'à ce que le marquage continu courant atteigne le marquage de référence. La stratégie de commande proposée permet de résoudre les conflits en mutuelle exclusion de la partie discrète du RdPHT. Ce problème de mutuelle exclusion ne concerne pas la partie continue pour laquelle les flux de marques franchissement simultanément (mais avec des vitesses différentes) les transitions en conflit.

Les différents algorithmes sont implémentés avec l'outil MATLAB.

Algorithme 1 Commande prédictive hybride dans le cas de transitions discrètes immédiates (Entrées : M_0, M_{cref} et N_c ; Sorties : M_c, M_d, X_c et X_d)

- 1: Initialisation des paramètres :
 - $\tau_k \leftarrow 0$
 - $M_d(\tau_k) \leftarrow M_{0d}$
 - $M_c(\tau_k) \leftarrow M_{0c}$
 - 2: **Tant que** $M_c(\tau_k) \neq M_{cref}$
 - 3: Déterminer l'ensemble E (grâce à l'algorithme 2)
 - 4: **Pour** chaque séquence commandée $\sigma(\tau_k) \in E$,
 - 5: Calculer le vecteur de franchissements $X_d(\tau_k)$
 - 6: Calculer la commande constante $U_c(\tau_{k+})$ associée qui minimise $J_U(\tau_{k+N_c})$ (35) sous les contraintes (27)
 - 7: **Fin pour**
 - 8: $(X_d(\tau_k), U_c(\tau_{k+})) = \arg \min_{U_c} \{J_U(\tau_{k+N_c}), \forall \sigma(\tau_k) \in E\}$
 - 9: Calculer $M_d(\tau_{k+1})$ (16), $X_c(\tau_{k+1})$ (19) et $M_c(\tau_{k+1})$ (20)
 - 10: $\tau_k \leftarrow \tau_{k+1}$
 - 11: **Fin tant que**
-

Algorithme 2 Construction de l'ensemble E de toutes les séquences franchissables à partir de $M_d(\tau_k)$ (Entrées : $M_d(\tau_k)$ et N_d ; Sortie : E)

- 1: Initialisation des paramètres :
 - $h \leftarrow 0$
 - $R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k)) \leftarrow M_d(\tau_k)$
 - $E_{\sigma_{M_d(\tau_k)}} \leftarrow \emptyset$
 - $H_{M_d(\tau_k)} \leftarrow 0$
 - 2: **Tant que** $h \leq N_d$
 - 3: **Pour** tout marquage $M'_d \in R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$ tel que $H_{M'_d} = h$,
 - 4: **Pour** toute transition $t_j \in T_d^{comm}$ tel que $M'_d[t_j >$,
 - 5: Calculer $M''_d(\tau_k)[t_j > M'_d$
 - 6: **Si** $M''_d \notin R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k))$, alors
 - 7: $R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k)) \leftarrow R_d(\mathcal{N}^{d_comm}, M_d(\tau_k)) \cup \{M''_d\}$
 - 8: $E_{\sigma_{M''_d}} \leftarrow \emptyset$
 - 9: $H_{M''_d} \leftarrow H_{M'_d} + 1$
 - 10: **Fin si**
 - 11: **Pour** toute séquence $\sigma \in E_{\sigma_{M'_d}}$,
 - 12: $E_{\sigma_{M''_d}} \leftarrow E_{\sigma_{M'_d}} \cup \{\sigma t_j\}$
 - 13: **Fin pour**
 - 14: **Fin pour**
 - 15: **Fin tant que**
 - 16: $h \leftarrow h + 1$
 - 17: **Fin tant que**
 - 18: $E \leftarrow \{\sigma \in (T_d^{comm})^* \text{ tel que } |\sigma| \leq N_d \text{ et } M_d(\tau_k)[\sigma >\}$
-

3.3. Complexité de calcul

La complexité de la détermination de la commande hybride selon l'approche proposée pour un horizon de prédiction continu N_c et un horizon de prédiction discret N_d est donnée dans le tableau 1. La complexité est évaluée par rapport au nombre de variables, au nombre de contraintes et par rapport au nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour calculer la fonction de coût pour l'horizon de prédiction considérée.

Tableau 1. Complexité de calcul de la commande prédictive hybride

Nombre de variables	$q_d^{N_d} \cdot q_c$
Complexité par rapport aux contraintes	$O(q_d^{N_d} \cdot N_c \cdot q_c)$
Complexité par rapport à J	$O(q_d^{N_d} \cdot N_c \cdot (n_c + q_c))$

Les performances de la commande prédictive hybride proposée dépend de deux paramètres extrêmement importants, à savoir N_c et N_d . À cet égard, ils doivent être choisis avec prudence pour deux raisons. D'une part, ils doivent être grands afin de prédire suffisamment loin le comportement du système pour assurer la convergence

vers le marquage désiré. D'autre part, ils ne doivent pas être trop grands afin de limiter la complexité de calcul et de faire en sorte que la solution proposée soit réalisable. D'après le tableau 1, si N_d augmente de 1, la complexité de calcul est q_d fois plus grande. Dans le cas où N_c est multiplié par 2, la complexité par rapport aux contraintes ainsi que la complexité par rapport à J sont 2 fois plus grandes. Par conséquent, la complexité augmente considérablement en fonction de N_d et elle moins importante en fonction de N_c .

3.4. Exemple

On considère l'exemple présenté dans (Ghomri, Alla, 2007) correspondant à la modélisation d'un système de trois réservoirs connectés, présenté dans figure 1.

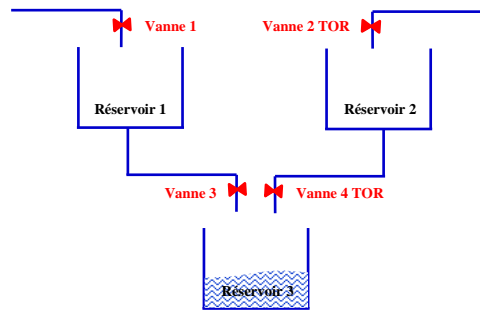


Figure 1. Système de trois réservoirs

Le processus d'alimentation des trois réservoirs est le suivant : les deux premières vannes alimentent les réservoirs 1 et 2. Ces derniers servent à remplir le troisième réservoir à travers les vannes 3 et 4. Ce système sera modélisé à l'aide d'un RdPH. Contrairement à (Ghomri, Alla, 2007), la sémantique serveurs infinis est adoptée plutôt que la sémantique serveurs finis, pour traduire le flux de franchissement des transitions continues. Les deux vannes 2 et 4 sont de type TOR (tout ou rien) alors que l'ouverture des vannes 1 et 3 est progressive. Dans cette section, nous supposons que le changement d'état (l'ouverture et la fermeture) de ces deux vannes est instantané. En conséquence, les transitions discrètes qui modéliseront ce comportement sont immédiates.

Une modélisation possible de ce système hybride sous forme d'un RdPHT D-élémentaire est présentée figure 2 telle que : $P_c = \{p_6, p_7, p_8\}$, $T_c = \{t_5, t_6, t_7, t_8\}$, $P_d = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ et $T_d = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. Les places et transitions continues et discrètes du réseau sont modélisées respectivement par des traits doubles et simples.

Les significations des places et des transitions sont les suivantes :

Tableau 2. Signification des places

P_1	Vanne 2 fermée
P_2	Vanne 2 ouverte
P_3	Vanne 4 ouverte
P_4	Vanne 4 fermée
P_5	Vanne 1 ouverte
P_6	Contenu du 2 ^{ème} réservoir
P_7	Contenu du 1 ^{er} réservoir
P_8	Contenu du 3 ^{ème} réservoir

Tableau 3. Signification des transitions

t_1	Ouvrir vanne 2
t_2	Fermer vanne 2
t_3	Ouvrir vanne 4
t_4	Fermer vanne 4
t_5	Remplir le 1 ^{er} réservoir
t_6	Remplir le 2 ^{ème} réservoir
t_7	Remplir le 3 ^{ème} réservoir à partir du 1 ^{er}
t_8	Remplir le 3 ^{ème} réservoir à partir du 2 ^{ème}

Toutes les transitions discrètes sont supposées être commandables. Seules les transitions continues t_5 et t_7 sont considérées commandables par la commande prédictive constante. Les transitions t_6 et t_8 sont commandées indirectement par les sous réseaux discrets qui jouent le rôle d'interrupteurs qui autorisent ou bloquent leur franchissement. De ce fait, ces transitions sont toujours franchies avec leur flux maximal de franchissement.

Ce réseau respecte les hypothèses de cet article, l'algorithme 1 peut alors être appliqué. La simulation a été effectuée en utilisant les paramètres suivants : $Q_c = I_{n_c}$ et $\theta = 0.2$ U.T. Les marquages $M_{0d} = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^t$, $M_{0c} = [10 \ 10 \ 10]^t$ et $M_{cref} = [20 \ 20 \ 20]^t$ sont respectivement les marquages initiaux discrets et continus (l'état des vannes à l'instant initial et la quantité d'eau dans chaque réservoir), et le marquage continu désiré (la quantité d'eau souhaitée dans chaque réservoir).

Au vu des marquages initiaux et désirés, la place p_8 est remplie à partir des deux places p_7 et p_6 . Un horizon de prédiction important est recommandé car il permet de réduire ou de bloquer le flux des transitions continues lorsque cela est nécessaire en anticipant l'évolution sur un horizon suffisamment long. Dans le cas d'un horizon de prédiction continu $N_c = 10$ et d'un horizon de prédiction discret $N_d = 2$, les résultats obtenus sont donnés par les figures 3 à 6. À l'instant initial, les séquences discrètes réalisables sont données par $E = \{(\emptyset) (t_1 t_2) (t_3 t_4) (t_1) (t_3) (t_1 t_3)\}$. La commande hybride, composée de la transition t_1 et de la commande continue associée, est

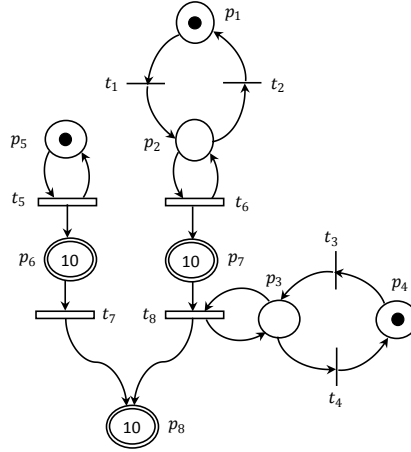


Figure 2. Modèle hybride du système de trois réservoirs (figure 1) tels que $T_c^{comm} = \{t_5, t_7\}$ et $T_d^{comm} = T_d$

celle pour laquelle la valeur du critère $J_M(\tau_k + N_c)$ est minimale. La transition t_1 est donc franchie, ce qui a entraîné l'ouverture de la deuxième vanne et le remplissage du deuxième réservoir. À partir de cet instant et jusqu'à la date $\tau_k = 1.4$ U.T., il faut garder la vanne 2 ouverte et la vanne 4 fermée afin de s'approcher du niveau de liquide désiré. Ainsi, aucune transition discrète n'est franchie et la commande optimale est donc constituée uniquement de la commande continue. A l'instant $\tau_k = 1.6$ U.T., la transition t_3 est franchie dans le but de valider la transition continue t_8 et de remplir le 3^{ème} réservoir à partir du second. Il faut noter la présence des franchissements successifs des transitions t_3 et t_4 dans la séquence de franchissements discrets obtenue, dû au fait que le 3^{ème} réservoir est rempli tantôt par le 1^{er}, tantôt par le 2^{ème} réservoir (comportements oscillants entre les places p_3 - p_4).

Finalement, dès que les niveaux de liquide souhaités dans les trois réservoirs sont atteints, toutes les vannes sont fermées : les transitions continues commandables et non commandables sont bloquées respectivement grâce à la commande prédictive continue et aux franchissements des transitions discrètes t_2 et t_4 aux instants 14.6 U.T. et 15.8 U.T. Par conséquent, la commande hybride proposée a permis d'atteindre le marquage désiré M_{ref} et de le maintenir.

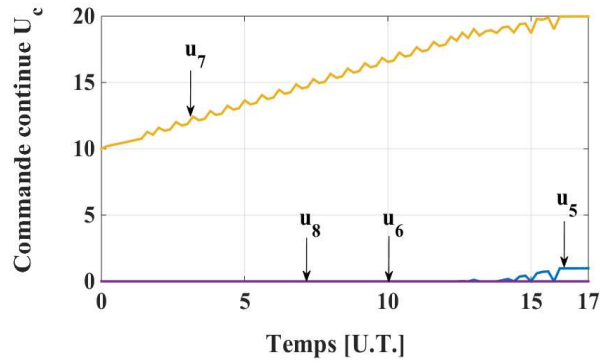


Figure 3. Variation de la commande continue des transitions continues

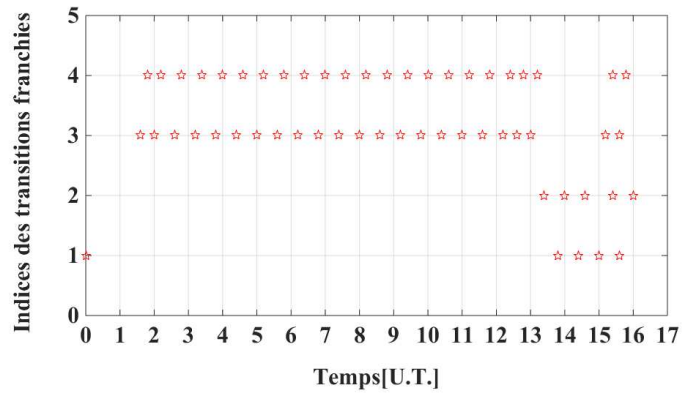


Figure 4. Séquence de franchissements discrets

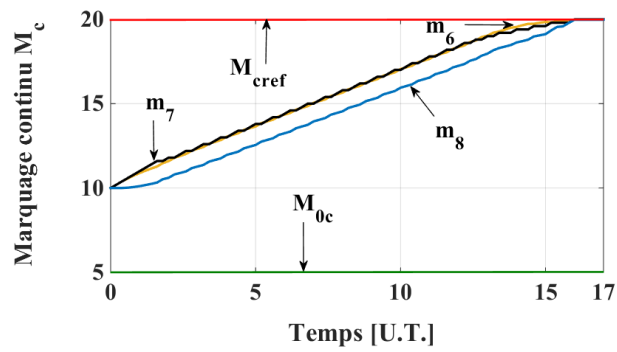


Figure 5. Variation du marquage continu

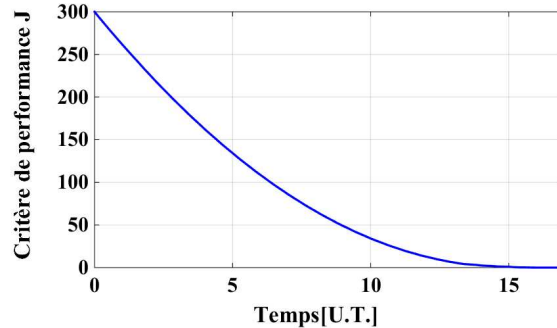


Figure 6. Variation du critère de performance J

La partie suivante étend les résultats obtenus aux transitions discrètes non immédiates (i.e $D_{min} \neq 0_{q_d \times 1}$).

4. Commande prédictive hybride avec des transitions discrètes non immédiates

L'objectif de cette partie est la détermination d'une commande des RdPHT avec des transitions discrètes temporisées. La difficulté de cette commande réside dans la combinaison entre les temporisations discrètes et la prédiction continue. En effet, sachant que la séquence discrète influence la détermination de la commande continue et que les séquences temporisées ne peuvent pas toujours être franchies au début de la période d'échantillonnage, la prise en compte des franchissements discrets au cours de la prédiction continue est nécessaire. Néanmoins, les instants des franchissements discrets au cours de la prédiction sont a priori inconnus et ces franchissements peuvent être déclenchés à chaque pas de prédiction. De multiples solutions doivent être explorées ce qui engendre une explosion de la complexité combinatoire et une augmentation du temps de calcul de la commande hybride. De plus, l'optimalité de la commande hybride donnée par la proposition 1 n'est plus garantie. Afin de tenir compte des franchissements temporisés tout en réduisant la complexité calculatoire, la méthode proposée, dans l'algorithme 3, est une extension de la commande prédictive hybride utilisée dans le cas de transitions discrètes immédiates.

4.1. Principe de la commande prédictive hybride avec des transitions discrètes non immédiates

Compte tenu des durées minimales de franchissement liées aux transitions, les dates de franchissement des séquences de commandes sont sujettes à des contraintes temporelles. Pour chaque séquence de commandes, la date de franchissement sera donc déterminée à chaque instant τ_k à l'aide d'échéanciers temporels mémorisant les franchissements au plus tôt des différentes transitions concernées. Le principe de cette commande est de ne retenir que les séquences de transitions discrètes immédiatement franchissables à un instant τ_k .

Cette méthode de commande repose principalement sur trois étapes.

- La première étape concerne la détermination des séquences de commandes réalisables données par l'ensemble E . Cette phase est réalisée à l'aide de l'algorithme 2 où toutes les transitions discrètes (immédiates et temporisées) sont prises en considération.

- La deuxième étape permet de ne retenir que les séquences de commandes immédiatement franchissables. Cette phase s'appuie sur la construction de différents échéanciers temporels TCH et ECH .

A chaque instant τ_k , l'échéancier TCH permet de mémoriser les durées de franchissement restantes des transitions t_j validées à partir du marquage discret courant (chaque transition t_j validée peut apparaître une ou plusieurs fois dans l'échéancier selon son degré de validation). TCH est réactualisé de telle sorte que les transitions franchies à l'instant τ_{k-1} et celles qui ne sont pas validées à l'instant τ_k sont supprimées de l'échéancier ; d'un autre côté, dans le cas d'une transition validée par le marquage discret courant et non présente dans TCH , sa durée de franchissement est mémorisée. Si cette transition était déjà enregistrée, sa durée restante de franchissement est mise à jour par décrémentation de θ (mise à zéro si elle devient négative).

A partir de TCH , un deuxième échéancier ECH est construit afin de vérifier l'immédiateté du franchissement des différentes séquences de commandes réalisables (données par l'ensemble E). ECH est initialisé à partir des durées mémorisées dans TCH . Pour chaque séquence de E , on effectue son parcours en déterminant les marquages intermédiaires et l'on effectue la mise à jour de ECH . Les transitions qui ne sont plus validées par le marquage intermédiaire ainsi que celles franchies sont supprimées. Les durées D_{min} sont affectées à celles nouvellement validées, si la durée restante de la transition que l'on va franchir n'est pas nulle, cette séquence ne peut pas être immédiatement franchie, elle est donc supprimée de l'ensemble E , dans le cas contraire on poursuit le parcours de la séquence. Il en résulte un ensemble E ne contenant que les séquences de commandes immédiatement franchissables. Cette étape est détaillée dans l'algorithme 3.

- Lors de la troisième étape, la commande continue constante associée à chacune des séquences de commandes discrètes retenues sera déterminée. La commande hybride optimale sera celle correspondant au couple (commande discrète, commande continue constante) qui minimisera la fonction coût. Elle sera déterminée par le système de programmation quadratique (26) et (27). Le problème d'optimisation est répété jusqu'à obtention de la configuration désirée. Les deux étapes 1 et 3 sont décrites dans l'algorithme 4.

4.2. exemple

Reprenons l'exemple des trois réservoirs (figure 1) et sa modélisation sous forme d'un RdPHT D-élémentaire (figure 2). En supposant que la durée d'ouverture et de fermeture des vannes 2 et 4 ne peut être négligée, les transitions discrètes commandables t_1 , t_2 , t_3 et t_4 qui modélisent ces deux phénomènes sont désormais temporisées. Soit

Algorithme 3 Détermination des séquences immédiatement franchissables (Entrées : $E, M_d(\tau_k), TCH$ et D_{min} ; Sortie : E)

- 1: **Pour** chaque séquence de commandes $\sigma_d \in E$,
 - 2: $ECH \leftarrow TCH$
 - 3: $M'_d \leftarrow M_d(\tau_k)$
 - 4: $s \leftarrow 1$
 - 5: $immediate \leftarrow 1$
 - 6: **Tant que** $s \leq |\sigma_d|$ et $immediate = 1$
 - 7: Supprimer les transitions non validées par M'_d
 - 8: Affecter D_{min} aux transitions nouvellement validées
 - 9: **Si** la durée de franchissement restante de la transition σ_s est non nulle, **alors**
 - 10: Supprimer la séquence σ_d de E
 - 11: $immediate \leftarrow 0$
 - 12: **Sinon**
 - 13: Calculer le nouveau marquage discret intermédiaire M'_d résultant du franchissement de σ_s
 - 14: Supprimer la transition σ_s de ECH
 - 15: $s \leftarrow s + 1$
 - 16: **Fin si**
 - 17: **Fin tant que**
 - 18: **Fin pour**
-

Algorithme 4 Commande prédictive hybride dans le cas des transitions discrètes temporisées (Entrées : M_0, N_c, M_{cref} et D_{min} ; Sorties : M_d, M_c, X_d et X_c)

- 1: Initialisation des paramètres :
 - $\tau_k \leftarrow 0$
 - $M_d(\tau_k) \leftarrow M_{0d}$
 - $M_c(\tau_k) \leftarrow M_{0c}$
 - 2: **Tant que** $M_c(\tau_k) \neq M_{cref}$
 - 3: Mettre à jour l'échéancier TCH
 - 4: Déterminer l'ensemble E à l'aide de l'algorithme 2
 - 5: Ne conserver dans l'ensemble E que les séquences de commandes immédiatement franchissables à l'aide de l'algorithme 3
 - 6: **Pour** chaque séquence de commandes retenue,
 - 7: Déterminer le vecteur de franchissements $X_d(\tau_k)$
 - 8: Calculer la commande continue constante $U_c(\tau_{k+})$ associée à $X_d(\tau_k)$, qui minimise (35) sous les contraintes (27)
 - 9: **Fin pour**
 - 10: $(X_d(\tau_k), U_c(\tau_{k+})) = \arg \min_{U_c} \{J_U(\tau_{k+N_c}), \forall \sigma(\tau_k) \in E\}$
 - 11: Calculer $M_d(\tau_{k+1})(16)$, $X_c(\tau_{k+})(19)$ et $M_c(\tau_{k+1})(20)$
 - 12: $\tau_k \leftarrow \tau_{k+1}$
 - 13: **Fin tant que**
-

$D_{min} = [0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3]^t$. Le marquage continu désiré et les autres paramètres de simulation sont les mêmes que ceux de l'exemple 1. Les résultats sont donnés par les figures 7 à 10.

Contrairement à l'exemple 1 où les transitions sont supposées être immédiates, la première transition de la séquence (t_1) n'est franchie qu'à l'instant $\tau_k = 0.4$ U.T. En effet, à l'instant initial, $E = \{(\emptyset) (t_1 t_2) (t_3 t_4) (t_1) (t_3) (t_1 t_3)\}$. L'échéancier TCH contenant les durées minimales de franchissement restantes est donné par $TCH = \{t_1(0, 3), t_3(0.3)\}$. ECH est ensuite construit pour chaque séquence $\sigma \in E$, par exemple pour la séquence $(t_1 t_2)$, $ECH = \{t_1(0, 3), t_3(0.3)\}$. Puisque la durée minimale restante n'est pas nulle, cette séquence est supprimée de l'ensemble E . D'une manière similaire, les transitions t_1 et t_3 ainsi que les séquences (t_1, t_3) et (t_3, t_1) sont supprimées de E , elles ne peuvent pas être franchies à cet instant. A la date $\tau_k = 0.2$ U.T., $E = \{(\emptyset) (t_1 t_2) (t_3 t_4) (t_1) (t_3) (t_1 t_3)\}$ et $TCH = \{t_1(0, 1), t_3(0.1)\}$. La durée minimale restante de franchissement de toutes les séquences $\sigma \in E$ n'est pas nulle, aucune transition n'est alors franchie à cet instant également. A l'instant $\tau_k = 0.4$ U.T., $E = \{(\emptyset) (t_1 t_2) (t_3 t_4) (t_1) (t_3) (t_1 t_3)\}$ et $TCH = \{t_1(0), t_3(0)\}$. Seules les transitions t_1 et t_3 sont conservées dans l'ensemble E et sont prises en compte par la commande continue constante. Le couple constitué de la séquence discrète (t_1) et de sa commande continue associée, minimise le critère de performance, il est donc appliqué au système à cet instant. Cette procédure est répétée jusqu'à obtention du marquage désiré. Les instants de franchissement des deux séquences de commandes discrètes des deux exemples 1 et 2 ne sont pas les mêmes puisque les deux systèmes n'ont pas le même comportement. On constate notamment que le marquage m_7 présente des paliers correspondant à la temporisation des transitions qui induisent des temps d'attente avant l'exécution des commandes discrètes.

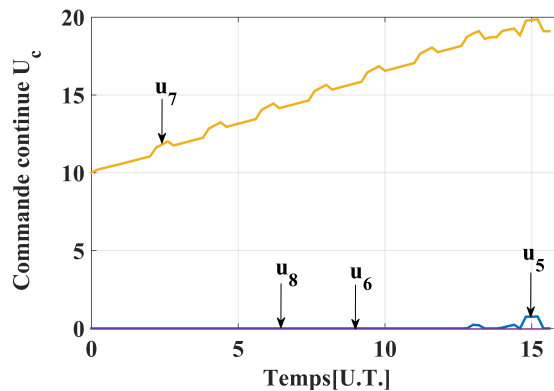


Figure 7. Variation de la commande continue des transitions continues

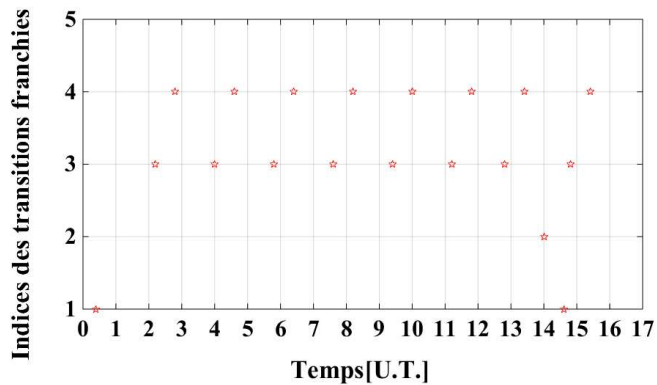


Figure 8. Séquence de franchissements discrets

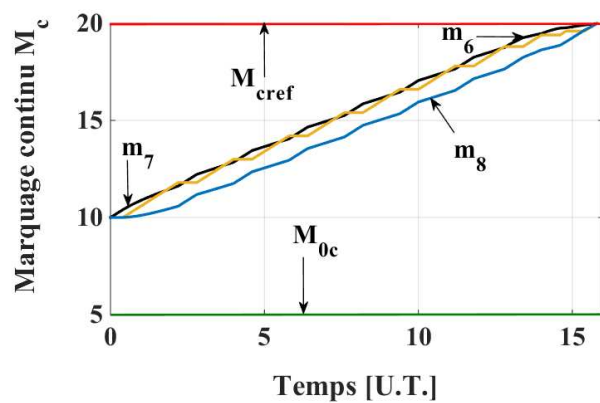


Figure 9. Variation du marquage continu

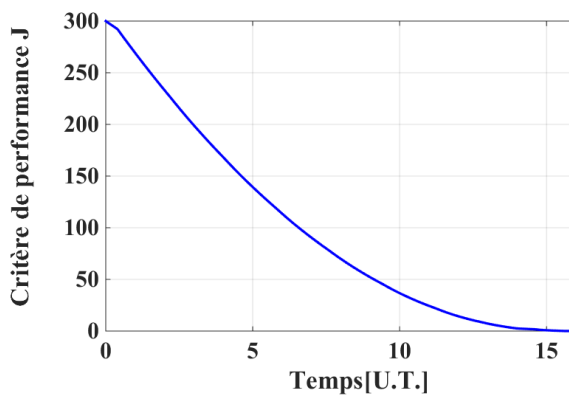


Figure 10. Variation du critère de performance J

5. Conclusion

Cet article concerne la conception d'une commande hybride prédictive qui permet aux RdPH élémentaires temporisés d'atteindre un marquage désiré à partir d'un marquage initial. Dans un premier temps, les actions de commande discrètes immédiates ont été considérées. Notre approche utilise deux types de commandes prédictives : continue et discrète. On détermine dans un premier lieu, les séquences admissibles dont la taille est limitée par un horizon de prédiction discret N_d en ne considérant que les transitions discrètes immédiates commandables. Pour chacune de ces séquences, on détermine une commande continue dont les actions sont supposées être constantes durant la prédiction avec un horizon de prédiction variable. La commande hybride (séquence de franchissements, commande continue), retenue à l'instant τ_k , correspond à celle qui minimise le critère de performance J sous des contraintes relatives au flux continu. Dans un second temps des transitions discrètes non immédiates sont prises en compte. Seules les séquences données par la commande prédictive continue dont les durées minimales de franchissement sont écoulées, sont prises en compte. Pour chacune des séquences, la commande continue constante est appliquée et la commande hybride est déterminée. La commande prédictive hybride permet d'atteindre la configuration désirée. En revanche, elle n'est pas adaptée aux RdPH non élémentaires.

En termes de perspectives, les deux horizons de prédiction continu et discret devront être déterminés systématiquement. Le niveau de sous-optimalité de la commande proposée sera aussi examiné et quantifié. Les résultats obtenus seront étendus aux RdP généralisés. Une commande hybride qui tient compte des franchissements discrets sera présentée et sa complexité sera quantifiée. Une étude des concepts d'observabilité et de co-observabilité continu-discret ainsi que l'architecture de commande (distribuée-hiérarchique continue-discrète) sera présentée. La synthèse de commande par supervision initié par Ramadge-Wonham sera également étudiée.

Bibliographie

- Alla H., Ghomri L. (2012). Modeling and simulation by hybrid Petri nets. In *Proceedings of the 2012 winter simulation conference*, p. 1-8. Berlin.
- Balduzzi F., Giua A., Menga G. (2000). First-order hybrid Petri nets: a model for optimization and control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, n° 4, p. 382-399.
- Bemporad A., Morari M., Dua V., Pistikopoulos E. N. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, vol. 38, n° 1, p. 3-20.
- David R., Alla H. (1992). *Petri nets and grafcet: tools for modeling discrete event systems* (P. Hall, Ed.). London.
- David R., Alla H. (2001). On hybrid Petri nets. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, vol. 11, p. 9-40.
- Dotoli M., Fanti M. P., Iacobellis G., Mangini A. M. (2009). A first-order hybrid Petri net model for supply chain management. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 6, n° 4, p. 744-758.

- Fanti M. P., Iacobellis G., Maangini A. M., Ukovich W. (2014). Freeway traffic modeling and control in a first-order hybrid Petri net framework. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 11, n° 1, p. 90-102.
- Geletu A. (2007, December 13). *Solving optimization problems using the matlab optimization toolbox - a tutorial*.
- Ghomri L., Alla H. (2007). Modeling and analysis using hybrid Petri nets. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 1, n° 2, p. 141-153.
- Giua A., Mahulea C., Recalde L., Seatzu C., Silva M. (2006). Optimal control of continuous Petri nets via model predictive control. In *8th international workshop on discrete event systems*, p. 235-241. Ann Arbor, Michigan, USA.
- Gudino-Mendoza B., Lopez-Mellado E. (2013). Modelling networked agents' behaviour using timed hybrid Petri nets. In *3rd iberoamerican conference on electronics engineering and computer science*, vol. 7, p. 289-296. San Luis Potosi, Mexico.
- Julvez J., Bemporad A., Recalde L., Silva M. (2004). Event-driven optimal control of continuous Petri nets. In *43rd IEEE conference on decision and control*, p. 69-74. Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- Julvez J., Cairano S. D., Bemporad A., Mahulea C. (2013). Event-driven model predictive control of timed Petri nets. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 24, n° 12, p. 1724-1742.
- Julvez J., Mahulea C., Vasquez C. (2011). Analysis and simulation of manufacturing systems using simhpn toolbox. In *2011 IEEE conference on automation science and engineering*, p. 432-437. Trieste, Italy.
- Kaakai F., Hayat S., Moudni A. E. (2006). Simulation of railway stations based on hybrid Petri nets. In *2nd ifac conference on analysis and design of hybrid systems*, vol. 39, p. 50-55. Alghero, Italy.
- Lefebvre D., Leclercq E. (2015). Control design for trajectory tracking with untimed Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, n° 7, p. 1921-1926.
- Lefebvre D., Leclercq E., Druaux F., Thomas P. (2015). Gradient-based controllers for timed continuous Petri nets. *International Journal of Systems Science, Taylor & Francis*, vol. 46, n° 9, p. 1661-1678.
- Mahulea C., Giua A., Recalde L., Seatzu C., Silva M. (2008). Optimal model predictive control of timed continuous Petri nets. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, vol. 53, n° 7, p. 1731-1735.
- Mahulea C., Ramirez-Trevino A., Recalde L., Silva M. (2008). Steady state control reference and token conservation laws in continuous Petri net systems. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 5, n° 2, p. 307-320.
- Mahulea C., Recalde L., Seatzu C., Silva M. (2006). On sampling continuous timed pns: Reachability "equivalence" under infinite servers semantics. In *2nd ifac conference on analysis and design of hybrid systems*, vol. 39, p. 37-43. Alghero, Italy.
- Richalet J., Rault A., Testud J., Papon J. (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, vol. 14, n° 5, p. 413-428.
- Silva M. (1993). Introducing Petri nets. *Practice of Petri Nets in manufacturing*.

- Silva M., Recalde L. (2002). Petri nets and integrity relaxations: A view of continuous Petri net models. *IEEE-Transactions Systems Man and Cybernetics, part C*, vol. 32, n° 4, p. 314-327.
- Silva M., Recalde L. (2004). On fluidification of Petri net models: from discrete to hybrid and continuous models. *Annual Reviews in Control*, vol. 28, n° 2, p. 253-206.
- Taleb M., Leclercq E., Lefebvre D. (2014a). Limitation of flow variation of continuous Petri nets via model predictive control. In *American control conference*, p. 4919-4924. Portland, Oregon.
- Taleb M., Leclercq E., Lefebvre D. (2014b). Limitation of flow variation of continuous Petri nets via model predictive control and lyapunov criterion. In *European control conference*, p. 1825-1830. Strasbourg, France.
- Taleb M., Leclercq E., Lefebvre D. (2016). Model predictive control for discrete and continuous timed Petri nets. *International Journal of Automation and Computing*. (accepté pour publication)
- Tolba C., Lefebvre D., Thomas P., Moudni A. E. (2005). Continuous and timed Petri nets for the macroscopic and microscopic traffic flow modeling. *Simulation Modeling Practice and Theory*, vol. 13, n° 5, p. 407-436.

Article soumis le 7/12/2015
Accepté le 18/04/2017