
Analyse de modèles physiques, modèles physiques d'analyse

Synthèse sonore et analyse fréquentielle à l'aide des réseaux masses-interactions CORDIS-ANIMA

Jérôme Villeneuve¹, Claude Cadoz^{1,2}, James Leonard²

1. Association pour la Création et la Recherche d'Outils d'Expression (ACROE)

2. Laboratoire Ingénierie de la Création Artistique (ICA)

46 Avenue Félix Viallet, 38000 Grenoble, France

villeneuve@imag.fr, cadoz@imag.fr, leonard@imag.fr

RÉSUMÉ. Notre propos se concentre sur les méthodes d'analyse et de modélisation pour l'analyse dédiées aux réseaux physiques de type masse-interaction ou aux signaux produits par ces derniers. Dans le contexte de la synthèse sonore pour la création artistique se basant sur ce type de modélisation, de telles méthodes s'avèrent essentielles afin de soutenir la démarche des utilisateurs. Une première partie de cet article est d'abord consacrée aux propriétés de l'oscillateur harmonique tel qu'il peut être construit avec le formalisme CORDIS-ANIMA. Puis, nous basant sur cet élément simple, mais bien connu, nous présentons deux principes de calcul et d'analyse des propriétés du signal que produira un modèle cible, qu'il soit linéaire, non linéaire, simulé ou non, en temps-différé ou en temps-réel. Nous présentons enfin leurs implémentations et utilisations au sein de l'environnement GENESIS.

ABSTRACT. This paper focuses on methods for model analysis and for modelisation dedicated to signal analysis. Especially regarding mass-interaction physical networks and the audio signals they produce. In the context of sound synthesis for artistic creation relying on physical modeling, such kind of methods are of central interest in a way to provide guidance to users. In the first part of this paper, we will focus on the harmonic oscillator built with CORDIS-ANIMA. Then, starting with this very simple and well known element, we will present two approaches for calculation and analysis of the properties of signals produced by a model, the latter being either linear, non-linear, simulated or no yet, in real-time or not. The outcomes of both of these approaches will then be exemplified.

MOTS-CLÉS : modélisation physique, synthèse sonore, analyse modale, analyse et traitement du signal, résonateurs mécaniques, non-linéarités géométriques, oscillateur harmonique, système à retour d'effort, création artistique.

KEYWORDS: physical modelling, sound synthesis, modal analysis, signal analysis and processing, physical resonators, geometric nonlinearities, harmonic oscillator, force feedback devices, artistic creation.

DOI:10.3166/TS.32.365-390 © Lavoisier 2015

Extended abstract

GENESIS is a musician-oriented software environment for sound synthesis and musical composition. It offers a representation where the virtual physical matter and its vibratory properties have to exist before the phenomenological effects and especially audible effects of its manipulation.

From this causal representation comes a necessary gap between common ways of describing the effect, an audio signal, and the properties of the physical object from which it emerges. The signal itself is then a very important object of inquiry since the users must have ways to connect what are the specificities of the sound they hear and the properties of the models producing it.

To help on that matter, it is of first interest to develop new technics and powerful tools, relying on both 1) the fundamental principles set by the CORDIS-ANIMA formalism, the core of GENESIS, 2) the strong panoply of concepts and tools existing in the signal processing fields. The very purpose of this paper is to focus on such hybrid tools.

First, we introduce the harmonic oscillator, such as it is built within the CORDIS-ANIMA formalism, and an overview of its properties and specificities. This very simple object is actually far more than just a way for producing sinusoidal signals and will be the core of the analysis approaches subsequently developed.

A first approach consists in finding a modal representation of linear physical networks. In that case, one can know the acoustical properties of its model, modal shapes, frequencies, damping times, and thus some of the properties of the sound it will produce. This approach has led to the development of the “modal analysis tool” which is fully integrated into the GENESIS environment.

A second approach seeks to be far more extensive than the previous one and will apply to any physical model, linear or not, or even directly to signal inputs, that one might want to analyze. It relies on signal frequency decomposition by the mean of physical modeling. This model is built with a collection of resonators and, in the frame of the GENESIS environment, will be attached to and run along with the model to analyze. The behavior of each resonator will be directly observable into the simulation window and will be directly linked to the properties in time, frequency and amplitude of the signal produced by the analyzed model.

Intending to illustrate an actual use of the latter approach in the case of non-linear stretchable string models running in real-time, we will introduce a new method addressing “geometrical non-linearity” and its modelisation into the GENESIS environment.

1. Introduction

Une des problématiques centrales de la synthèse numérique du son réside dans le contrôle à bon escient des paramètres propres aux processus de synthèse. Le

formalisme CORDIS-ANIMA (Cadoz *et al.*, 1981 ; 1993) auquel nous nous attachons dans cet article, apporte une réponse spécifique à cette problématique.

Ce formalisme de modélisation physique et les outils logiciels dont il est le cœur (comme en particulier l'environnement pour la création musicale GENESIS (Castagné *et al.*, 2009)), visent à proposer de nouvelles approches du processus de création du son lui-même. Si c'est bien un signal sonore numérique qu'il s'agit de produire en finalité, aucun des paramètres directement caractéristiques de ce signal n'est donné à manipuler à l'utilisateur. Ces outils proposent d'autres méthodes de représentation basées sur la causalité, où la matière et ses propriétés vibratoires précèdent les conséquences phénoménologiques et en particulier sonores de sa manipulation.

Le signal sonore est alors conséquence des propriétés d'objets physiques, mais n'en reste pas moins un objet d'étude central. L'utilisateur doit être en mesure de faire le lien entre ce qu'il perçoit par le biais de ce signal et les propriétés qu'il confère au modèle qui le produit. L'aider en ce sens suppose le développement de techniques et d'outils puissants et uniques du fait qu'ils doivent être 1) enracinés dans les concepts de modélisation en jeu dans GENESIS, 2) en complète cohérence avec les principes forts du traitement du signal.

Il existe une grande variété d'approches pour adresser cette problématique (Kontogeorgakopoulos *et al.*, 2007). Les nouvelles méthodes de modélisation et d'analyse que nous proposons dans cet article s'intéressent pour leur part soit aux propriétés des modèles physiques eux-mêmes, afin de cerner certaines des propriétés du signal qu'ils sont susceptibles de produire, soit à l'étude directe du signal qu'ils produisent par une méthode de décomposition en fréquence par modèle physique résonant. Cette dernière méthode, proche du principe des résonateurs d'Helmoltz (Helmholtz, 1863), permettra par ailleurs d'entrevoir les fondements d'une méthode d'analyse en temps, fréquence et amplitude selon les mêmes concepts que les méthodes d'analyse de Fourier ou par ondelettes.

Ces approches sont également présentées dans leurs actuelles implémentations, dans le cas de l'étude de modèles physiques linéaires pour l'une et de modèles physiques non linéaires simulés en temps-réel pour l'autre. Nous présentons d'ailleurs en détail la méthode de modélisation de non-linéarités géométriques à l'étude dans ce deuxième cas.

2. CORDIS-ANIMA

2.1. Cadre conceptuel

L'objectif premier est de définir l'algorithme le plus efficace possible, donc économe en termes de mémoire, d'opérations et de paramètres de contrôle, permettant de générer automatiquement une infinie variété de séquences de nombres (représentant, après définition d'une fréquence d'échantillonnage, un signal numérique). Une simple suite de récurrence d'ordre 2 (1), satisfait pleinement ces exigences.

$$\begin{aligned}
 &X_0 \\
 &X_1 \\
 &\dots \\
 &X_{n-2} \\
 &X_{n-1} \\
 &X_n = A \cdot X_{n-1} + B \cdot X_{n-2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Elle permet le calcul de valeurs numériques étant donnés deux valeurs initiales : X_0, X_1 et deux paramètres : A et B . L'influence de chacun de ces paramètres sur la succession de valeurs produites est facilement identifiable à l'aide d'outils mathématiques élémentaires. Cependant, sans traitement, ils restent en eux-mêmes peu évocateurs. L'idée fondamentale mise en œuvre dans cette approche est de concevoir l'équation (1) comme une approximation discrétisée en temps de l'équation régissant le mouvement d'un oscillateur mécanique (figure 1).

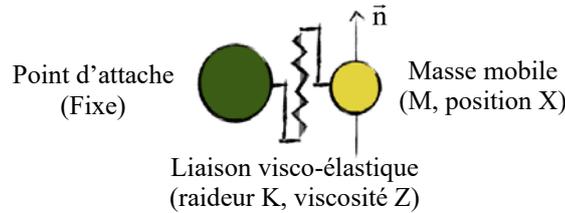


Figure 1. Oscillateur harmonique dans CORDIS-ANIMA

Cette discrétisation doit répondre aux impératifs d'un calcul itératif d'ordre deux, rendant alors le calcul de l'état d'un système dépendant de deux de ses états antérieurs. Ainsi, on définit la vitesse et l'accélération « retardées » d'un élément à l'instant n comme suit

$$V_n = F_e \cdot (X_n - X_{n-1}) \quad \text{et} \quad \Gamma_n = F_e^2 \cdot ((X_n - X_{n-1}) - (X_{n-1} - X_{n-2})) \tag{2}$$

où F_e est la fréquence d'échantillonnage et $1/F_e$ l'unité de temps discret. Projeté sur l'axe \bar{n} et en considérant les forces de rappel et de dissipation auxquelles est soumis le système représenté en figure 1, lui appliquer la relation fondamentale de la dynamique (3) conduit à la relation (4).

$$m \cdot \bar{\Gamma} = \sum \bar{F}_{\text{ext}} \tag{3}$$

$$m \cdot F_e^2 \cdot (X_n - 2X_{n-1} + X_{n-2}) = -k \cdot X_{n-1} - z \cdot F_e \cdot (X_{n-1} - X_{n-2}) \tag{4}$$

L'expression à temps discret donnant le mouvement de cet oscillateur est alors :

$$X_n = X_{n-1} \cdot \left(2 - \frac{k}{m \cdot F_e^2} - \frac{z}{m \cdot F_e} \right) + X_{n-2} \cdot \left(\frac{z}{m \cdot F_e} - 1 \right) \quad (5)$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$K = \frac{k}{F_e^2}, \quad Z = \frac{z}{F_e}, \quad M = m \quad \text{et} \quad A = 2 - \frac{K+Z}{M}, \quad B = \frac{Z}{M} - 1 \quad (6)$$

Puis en considérant X_0 comme étant la position initiale de la masse mobile de l'oscillateur et V_0 sa vitesse initiale, nous retrouvons une expression identifiable à (1). Celle-ci étant définie par cinq grandeurs (K , Z , M , V_0 et X_0), pouvant être situées dans un contexte évocateur, celui de la matière vibrante. Les valeurs qu'ils prennent, replacées dans ce contexte, permettent alors une meilleure appréhension de leurs conséquences sur le comportement de l'algorithme, par analogie au comportement réel de cette matière.

Il est également possible d'étendre la relation fondamentale de la dynamique au cas de forces extérieures, autres que celles de dissipation et de rappel, appliquées à l'oscillateur, l'équation (1) devenant :

$$X_n = A \cdot X_{n-1} + B \cdot X_{n-2} + C \cdot F_{n-1} \quad (7)$$

L'étape suivante dans l'élaboration du formalisme CORDIS-ANIMA fut de considérer les éléments composant l'oscillateur harmonique comme des entités à part entière, définies par des relations algorithmiques propres dont l'ensemble reste compatible avec l'expression (7), interconnectées, et échangeant deux types de variables : des valeurs de positions X et des valeurs de forces F .

Ainsi, on distingue deux grandes catégories d'éléments. Les éléments de type <MAT>, assimilables à des éléments matériels. Les éléments de type <LIA>, permettant d'introduire des interactions entre les éléments matériels. Tous les algorithmes des éléments de type <MAT> prennent comme variables d'entrées des forces dont résultent des positions. Inversement, tous les algorithmes des éléments de type <LIA> retournent des forces étant données des positions. Une liste non exhaustive de ces éléments et de leurs expressions est présentée dans le tableau 1. L'ensemble de ces propriétés et règles constitue un formalisme modulaire qui permet la construction d'objets complexes et ce, élément par élément. On parlera alors de modèles ou encore de réseaux physiques CORDIS-ANIMA (figure 2).

Au-delà de cette catégorisation générale sont définis différents éléments <MAT> ainsi que différents éléments <LIA>. Ils diffèrent par les algorithmes qui leur sont associés et donc par leurs propriétés. En voici quelques exemples dont une liste exhaustive peut être trouvée dans (Cadoz *et al.*, 1993).

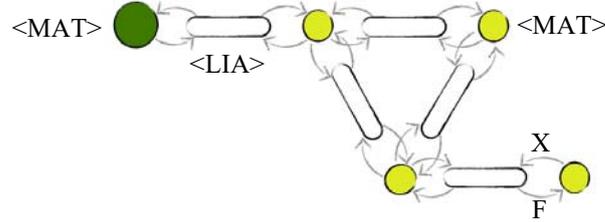


Figure 2. Vue décomposée d'un modèle CORDIS-ANIMA

Tableau 1. Quelques modules élémentaires du formalisme CORDIS-ANIMA

Nom	Type	Param	C.I.	Algorithme	Métaphore Physique
SOL	<MAT>	-	X_0	$X_n = X_{n-1} = X_0$	Terre, inertie infinie
MAS	<MAT>	M	X_0 V_0	$X_n = 2 \cdot X_{n-1} - X_{n-2} + \frac{1}{M} F_{n-1}$	Masse, inertie
REF	<LIA>	K Z	-	$F_{2 \rightarrow 1} = -F_{1 \rightarrow 2}$ $F_{2 \rightarrow 1} = K \cdot (X_2 - X_1) + Z \cdot (V_2 - V_1)$	Viscoélasticité, ressort frottement
BUT	<LIA>	K Z S	-	Si : $X_2 - X_1 \leq S$ $F_{2 \rightarrow 1} = K \cdot (X_2 - X_1 - S) + Z \cdot (V_2 - V_1)$ Si : $X_2 - X_1 > S$: $F_{2 \rightarrow 1} = 0$	Liaison mécanique visco/élastique unilatérale

CORDIS-ANIMA se caractérise ainsi par son ancrage fort sur une métaphore physique et par sa modularité, basée sur le principe de l'interaction, et qui met en œuvre un nombre restreint d'objets eux-mêmes dotés de peu de paramètres. C'est le réseau de ces objets en interaction ainsi que son paramétrage qui définit un modèle physique CORDIS-ANIMA.

2.2. Retour sur l'oscillateur harmonique

Les modèles CORDIS-ANIMA peuvent répondre des outils mathématiques dont on dispose pour la description et l'étude de phénomènes acoustiques et vibratoires s'appliquant à la matière physique. Ce formalisme s'appuyant sur une description discrète du temps et de la matière, il s'agira de bien noter les effets distorsifs du passage des équations continues aux équations discrètes. Afin d'illustrer ce dernier point et pour éclaircir les notions abordées par la suite, nous rappelons brièvement les résultats de l'analyse comparative des propriétés de l'oscillateur mécanique, dont

le mouvement au cours du temps est décrit à temps continu et selon des paramètres dits *naturels* de masses, raideurs et taux d'amortissement, et de *l'oscillateur numérique*, dont le mouvement au cours du temps sera décrit à temps discret et selon les paramètres ajustés (6) propres à CORDIS-ANIMA.

Tableau 2. Oscillateur mécanique, oscillateur numérique

Oscillateur Mécanique (temps continu, t)	Oscillateur Numérique (temps discret, $\frac{n}{F_c}$)
Paramètres et conditions initiales : m (kg), k (N/m), z (N.s/m), x_0 , v_0	Paramètres et conditions initiales CORDIS : M, K, Z, X_0 , X_1
dont le mouvement est décrit par les équations suivantes	
$m\ddot{x}(t) = -z\dot{x}(t) - kx(t)$	$X_n = X_{n-1} \cdot \left(2 - \frac{K+Z}{M}\right) + X_{n-2} \cdot \left(\frac{Z}{M} - 1\right)$
dont la solution dans le cas d'un régime oscillatoire pseudopériodique est	
$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)$	$X_n = A \cdot e^{-\frac{\alpha n}{F_c}} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot \frac{n}{F_c} + \varphi)$
Avec	
$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{z}{2m}\right)^2}$	$f = \frac{F_c}{2\pi} \cdot \arccos\left(\frac{2 - \frac{K+Z}{M}}{2\sqrt{1 - \frac{Z}{M}}}\right)$
$\alpha = \frac{z}{2m}$	$\alpha = -\frac{F_c}{2} \cdot \ln\left(1 - \frac{Z}{M}\right)$
$\tan(\varphi) = -\left(z + 2m \frac{v_0}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4km - z^2}}$	$\tan(\varphi) = -\frac{\left(2 - \frac{K+Z}{M}\right) \cdot X_0 - 2 \cdot X_1}{X_0 \sqrt{-4 \cdot \left(\frac{Z}{M} - 1\right) - \left(2 - \frac{K+Z}{M}\right)^2}}$
$A = x_0 \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}$	$A = X_0 \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}$

L'oscillateur harmonique tel qu'implémenté dans CORDIS-ANIMA, appelé cellule (CEL), est un objet dont le comportement est bien connu, et dont le champ d'application dépasse largement la seule production de signaux sonore sinusoïdaux. L'ensemble des méthodes d'analyse développées par la suite repose sur lui.

3. L'environnement GENESIS

3.1. *Éléments d'interface*

GENESIS est un environnement de synthèse sonore et de composition musicale à destination des artistes, et donne une représentation graphique aux modules définis par le formalisme CORDIS-ANIMA. L'utilisateur est à même de manipuler ces éléments afin de construire des modèles complexes. Ces derniers pourront être simulés, écoutés et également observés. Suivent quelques précisions sur les fonctionnalités des principaux constituants de l'interface du logiciel (figure 3).

La palette, regroupe l'ensemble des modules élémentaires CORDIS-ANIMA. Ils sont disposés sur deux colonnes, celle de droite regroupant les éléments de type <LIA>, celle de gauche, les éléments de type <MAT>. On retrouve par exemple les modules MAS, SOL, REF et BUT décrits plus haut. Le module REF porte les propriétés conjointes des modules RES et FRO (ressort simple et frottement simple). Le Module CEL est une combinaison d'un module SOL et d'un module MAS connectés par un module REF, il est donc la métaphore de l'oscillateur harmonique décrite précédemment. Les modules LNL permettent la simulation d'interactions non-linéaires sur lesquelles nous reviendrons par la suite. Les modules SOX et SOF sont quant à eux des modules dits de sortie ou « d'écoute ». Le module SOX permet par exemple l'écriture d'un fichier AIFF suite à la normalisation de la position au cours du temps d'un élément <MAT> auquel il est fixé.

Sur l'**éta**bli, l'utilisateur peut créer son modèle en disposant et interconnectant les éléments tirés de la palette. L'établi représente un espace de modélisation bidimensionnel. Chaque module élémentaire de type <MAT> qui y est disposé possède des coordonnées décrivant sa position sur ce plan : Bh et Bv. L'espace de simulation, dans lequel les modules d'un modèle pourront effectivement se déplacer, est quant à lui unidimensionnel et orthogonal à l'espace de modélisation. Ainsi, la disposition sur l'établi des modules d'un modèle n'a aucune influence sur le résultat de sa simulation. Seule compte la manière dont sont interconnectés les éléments et non leurs positions relatives. Aussi, les structures créées dans GENESIS ne sont pas dites géométriques, mais topologiques.

Tout module porte un certain nombre de **paramètres** qui diffèrent selon sa nature. Une fenêtre permet de les éditer pour un module ou pour un ensemble de modules. Par exemple, le module MAS possède un paramètre M d'inertie, deux grandeurs X0 et V0 relatives à sa position et sa vitesse initiale et les coordonnées de position sur l'établi Bh et Bv sur lesquelles nous reviendrons.

Les étapes de modélisation et de simulation se font chacune en leur temps. Une fois le modèle structuré et paramétré au sein de l'établi, il peut être exécuté dans le **simulateur**. Ce faisant, aucun changement sur l'établi ne peut altérer la simulation du modèle (une nouvelle configuration du modèle nécessitera une nouvelle simulation). Il est alors possible d'écouter le signal sonore synthétisé et d'en observer la forme d'onde. De plus, une partie de l'interface du simulateur est dédiée à la visualisation du mouvement du modèle lui-même. Cette dernière fonctionnalité

permet une meilleure compréhension des principes physiques à l'œuvre lors de la simulation d'un modèle ainsi que des propriétés du phénomène sonore qui en résulte.

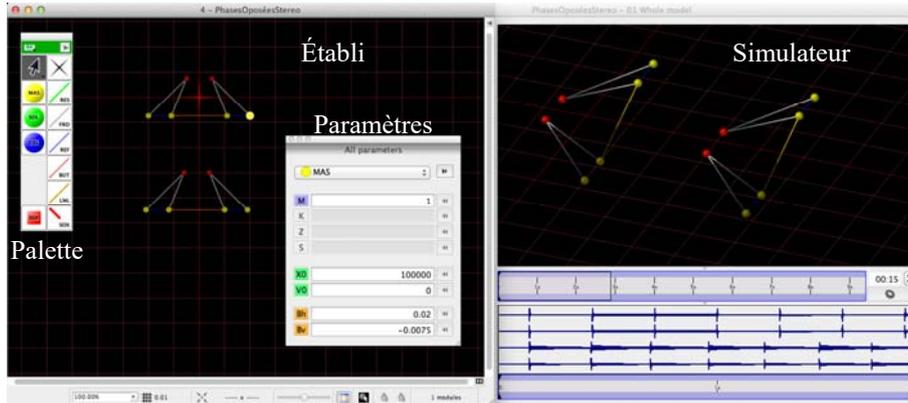


Figure 3. Éléments d'interfaces de GENESIS3

L'outil d'**analyse et accordage**, dont les détails fonctionnels seront largement développés par la suite, permet d'obtenir de nombreuses informations quant aux propriétés modales d'un modèle. Informations dont la teneur permet également de cerner certaines caractéristiques du phénomène sonore synthétisé. Il propose également un contrôle limité des propriétés modales d'un modèle.

L'**éditeur de scripts** permet l'exécution de fonctions personnalisées, écrites dans un langage informatique dédié à la modélisation de réseaux masses-interactions, directement dans l'environnement GENESIS.

3.2. Considérations énergétiques

Un point fondamental de l'utilisation de GENESIS : la notion d'énergie couplée à celle de geste. Tout modèle nécessite qu'on lui apporte une certaine quantité d'énergie afin de le mettre en mouvement. Sa structure et ses propriétés acoustiques caractériseront le phénomène sonore résultant. Cette approche est inhérente à la synthèse sonore par modélisation physique et s'opère comme suit :

- Modèle instable : un ou plusieurs de ses modules (MAS) ont une position initiale non nulle (Analogie à l'énergie potentielle d'un système physique). Un ou plusieurs des modules (MAS) du modèle ont une vitesse initiale (énergie cinétique non-nulle à l'instant t_0).

- Un modèle tiers porteur d'énergie entre en interaction brève, continue, unique ou répétitive, avec la structure vibrante inerte. Pour cela, cette structure génératrice d'événements devra être connectée au modèle par une des liaisons non linéaires que sont les modules (BUT) et (LNL). Le premier permet de reproduire les interactions

de type percussif, le module MAS vient alors percuter le modèle d'origine. Le second, plus malléable, permet à l'utilisateur d'implémenter des interactions plus complexes sur lesquelles nous reviendrons par la suite.

4. Analyse modale

Comment connaître les propriétés du signal produit par un processus de synthèse sonore sans considérer le signal lui-même, mais en s'intéressant au comportement mécanique et aux propriétés acoustiques du modèle qui en est la cause ?

Une étude initiée par Djoharian (1993) et développée depuis (Incerti 1996 ; Castagne et Cadoz, 2002 ; Villeneuve et Cadoz, 2014) a permis d'aboutir à un outil intégré à l'environnement GENESIS : l'outil *d'analyse modale*. Il consiste en une extension de l'analyse de l'oscillateur numérique abordée précédemment, et permet la description anticipée de propriétés du phénomène sonore résultant de la simulation de certains modèles physiques de type masse-interaction. Son principe repose sur la description mathématique du « réseau mécanique » qu'est intrinsèquement tout modèle CORDIS-ANIMA linéaire. L'analyse vise à obtenir un modèle modal équivalent au modèle d'origine. C'est-à-dire un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants (autant que le modèle d'origine comporte de masses ponctuelles), chacun d'entre eux correspondant à un mode de vibration stationnaire de la structure d'origine que l'on saura alors caractériser en détail.

4.1. Du modèle topologique au modèle modal

Cette méthode de résolution nécessite l'expression de l'équation différentielle régissant le mouvement de chaque masse mobile (module MAS) d'un modèle. Cette expression s'obtient par l'application de la seconde loi de Newton à chacune de ces masses. On ne tiendra compte que du cas particulier de la vibration libre d'une structure. On considèrera qu'aucune force extérieure n'est exercée sur celle-ci.

$$m_i \ddot{x}_i = \sum F_{\text{ext}} \quad (8)$$

Les différentes forces appliquées à une masse m_i liée à une masse m_j sont F_Z^{ji} relevant du frottement visqueux z_{ij} de la liaison, F_K^{ji} relevant de la raideur k_{ij} de la liaison

$$F_Z^{ji} = -z_{i,j} (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \quad (9)$$

$$F_K^{ji} = -k_{i,j} (x_i - x_j) \quad (10)$$

En définissant $V^m(i)$, l'ensemble des masses mobiles liées à une masse m_i et $V^s(i)$, l'ensemble des points fixes (SOL) liés à cette même masse, alors le système

d'équations différentielles décrivant le mouvement de chacune des masses mobiles d'un réseau mécanique sera défini par :

$$\left\{ m_i \ddot{x}_i = - \left(\sum_{j \in V^m(i)} z_{i,j} (\dot{x}_i - \dot{x}_j) + \sum_{j \in V^s(i)} z_{i,j} \dot{x}_i \right) - \left(\sum_{j \in V^m(i)} k_{i,j} (x_i - x_j) + \sum_{j \in V^s(i)} k_{i,j} x_i \right) \right\}_{0 < i \leq n} \quad (11)$$

Ce système peut alors être écrit sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{Z}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}\mathbf{X} \quad (12)$$

Où

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_i, 0 < i \leq n)$$

$$\mathbf{K} \text{ symétrique avec } \mathbf{K}(i,j) = -k_{i,j} \text{ si } j \in V^m(i) \text{ et } \mathbf{K}(i,i) = \sum_{j \in V^m(i)} k_{i,j} + \sum_{j \in V^s(i)} k_{i,j}$$

$$\mathbf{Z} \text{ symétrique avec } \mathbf{Z}(i,j) = -z_{i,j} \text{ si } j \in V^m(i) \text{ et } \mathbf{Z}(i,i) = \sum_{j \in V^m(i)} z_{i,j} + \sum_{j \in V^s(i)} z_{i,j}$$

Dans le cas d'un modèle à analyser tel que celui représenté en figure 4, les matrices permettant de le décrire complètement sont les suivantes :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_1 & 0 \\ -z_1 & z_1+z_2 & -z_2 \\ 0 & -z_2 & z_2+z_3 \end{pmatrix}$$

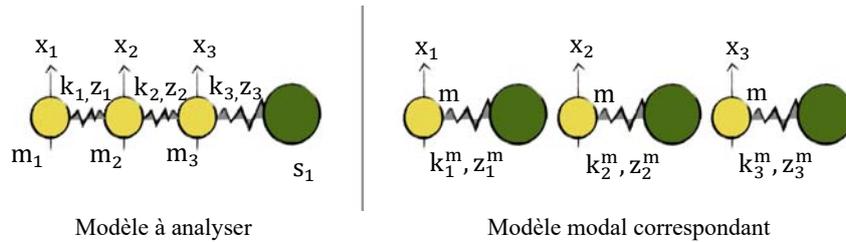


Figure 4. Modèle topologique et modèle modal équivalent

Il est possible de réduire le problème, sachant de la matrice \mathbf{M} qu'elle est diagonale et à valeurs non nulles, donc inversible, l'équation (12) peut être exprimée telle qu'en (13). La masse de chaque oscillateur du modèle modal est alors égale à 1.

$$\ddot{\mathbf{X}} = -\mathbf{Z}'\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{K}'\mathbf{X} \quad (13)$$

$$\text{avec : } \mathbf{Z}' = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{M}^{-1/2} \text{ et } \mathbf{K}' = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (14)$$

Obtenir le modèle modal réel équivalent à un réseau à n masses mobiles (avec $m = 1$) (figure 4) revient alors à recouvrer deux matrices diagonales \mathbf{K}^m et \mathbf{Z}^m contenant respectivement, les n raideurs modales k_i^m et, n viscosités modales z_i^m le décrivant.

Celles-ci s'obtiennent en diagonalisant¹ \mathbf{K}' et \mathbf{Z}' dans une base orthonormée commune que l'on nommera \mathbf{Q} vérifiant alors :

$$\mathbf{Z}^m = {}^t \mathbf{Q} \mathbf{Z}' \mathbf{Q} \text{ et } \mathbf{K}^m = {}^t \mathbf{Q} \mathbf{K}' \mathbf{Q} \quad (15)$$

Si l'on pose $\mathbf{Q}^m = {}^t \mathbf{Q} \mathbf{M}^{-1/2}$ alors :

$$\mathbf{Z}^m = \mathbf{Q}^m \mathbf{Z}' \mathbf{Q}^m \text{ et } \mathbf{K}^m = \mathbf{Q}^m \mathbf{K}' \mathbf{Q}^m \quad (16)$$

La matrice \mathbf{Q}^m est dite *matrice des déformées modales*. Si par nature, \mathbf{K} et \mathbf{Z} , incidemment \mathbf{K}' et \mathbf{Z}' , matrices symétriques réelles, sont diagonalisables, qu'elles le soient dans une base commune tient à la condition qu'elles commutent. On parle alors de « viscosité compatible ». Cet état est par exemple vérifié dans le cas où les matrices \mathbf{Z} , \mathbf{K} et \mathbf{M} sont linéairement dépendantes².

Ainsi, en posant $\mathbf{Y} = {}^t \mathbf{Q}^m \mathbf{X}$ (changement de base pour le vecteur position et ses dérivées)

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\mathbf{Z}^m \dot{\mathbf{Y}} - \mathbf{K}^m \mathbf{Y} \quad (17)$$

La relation (17) consiste alors en un système de n équations différentielles indépendantes. Chacune de ces équations décrit l'évolution temporelle d'un des n oscillateurs mécaniques élémentaires (CEL) composant le modèle modal et, par extension, permet d'obtenir les informations détaillées des n modes de vibration de la structure d'origine. Elles s'expriment sous la forme suivante :

$$\ddot{y}_i = -z_i^m \dot{y}_i - k_i^m y_i \quad (18)$$

1. La méthode utilisée est celle de Jacobi (Lascaux *et al.*, 1998), qui permet l'obtention simultanée des valeurs et modes propres d'une matrice. Cette opération est coûteuse en mémoire et peut s'appliquer à ce jour à des modèles contenant jusqu'à 10 000 modules (MAS).

2. L'analyse modale pourra être exécutée même si cette condition n'est pas remplie. Cependant la précision du résultat ne sera pas garantie et l'utilisateur en sera alerté.

4.2. Lecture du modèle modal

En appliquant les résultats rappelés dans le tableau 2, pour l'équivalent discret de l'expression (18), et dans le cas d'oscillations libres, nous sommes en mesure de décrire chacun des modes propres d'un réseau CORDIS-ANIMA selon sa pulsation et son coefficient d'amortissement (on définit τ , le taux d'amortissement homogène à un temps, comme l'inverse de la valeur α) :

$$\omega = 2\pi f_i = F_e \cdot \arccos\left(\frac{2 - (k_i^m + z_i^m)}{2 \cdot \sqrt{1 - z_i^m}}\right) \quad \alpha_i = \frac{1}{\tau_i} = -\frac{F_e}{2} \cdot \ln(1 - z_i^m) \quad (19)$$

On accède également à la réponse impulsionnelle du modèle étudié. Pour cela il est nécessaire de lui désigner un point « d'entrée », d'excitation, et un point de « sortie », d'écoute. Notons que le point d'écoute peut être confondu avec le point d'excitation. La réponse impulsionnelle ou encore ce que seront les amplitudes relatives instantanées de chaque mode propre de la structure, dans ces conditions, est directement lisible dans la matrice des déformées modales introduite précédemment et notée \mathbf{Q}^m . Chacune de ses colonnes représentent la déformée modale d'un mode propre du modèle analysé. Chacun de ces modes apporte une « contribution » au mouvement de chaque masse du modèle.

Nous rappelons la relation suivante établissant à chaque instant un lien formel entre les positions des éléments du modèle modal \mathbf{Y}_n et celles des éléments du modèle \mathbf{X}_n :

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{Q}^m \mathbf{Y}_n \quad (20)$$

$$\text{avec } \mathbf{X}_n = \{X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,i}\} \text{ et } \mathbf{Y}_n = \{Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,i}\} \quad (21)$$

Ecouter le phénomène sonore produit lors de la simulation d'un modèle revient à capter la position au cours du temps d'un (ou plusieurs) des modules MAT qui le composent. Ainsi, si l'on choisit de fixer le point d'écoute à la masse α , la position de cette masse en fonction des positions des masses du modèle modal est donnée par :

$$X_{n,\alpha} = \sum_{j=1}^i Q_{(\alpha,j)}^m \cdot Y_{n,j} \quad (22)$$

On rappelle la relation définissant le mouvement instantané d'un oscillateur du modèle modal représentant le mode j :

$$Y_{n,j} = \chi_j \cdot e^{-\frac{n}{\tau_j F_e}} \cdot \cos\left(\omega_j \cdot \frac{n}{F_e} + \varphi_j\right) \quad (23)$$

Nous souhaitons définir χ_j en fonction des conditions initiales du modèle ayant fixé le point d'entrée sur la masse β . À phase nulle et à $n = 0$, l'amplitude du mouvement de la masse est maximale, alors les amplitudes de chacune des composantes modales le sont également. Pour chaque mode on a :

$$\chi_j = Y_{0,j} = Q_{(\beta,j)}^m \cdot X_{0,\beta} \quad (24)$$

Enfin, à point d'excitation fixé, la position de la masse « écoutée », tenant compte de la contribution de chaque mode est donnée par :

$$X_{n,\alpha} = \sum_{j=1}^i Q_{(\alpha,j)}^m \cdot Q_{(\beta,j)}^m \cdot X_{0,\beta} \cdot e^{-\frac{n}{\tau_j F_e}} \cdot \cos(\omega_j \cdot \frac{n}{F_e} + \varphi_j) \quad (25)$$

On identifie l'amplitude relative du mode j telle que :

$$A_j = Q_{(\alpha,j)}^m \cdot Q_{(\beta,j)}^m \quad (26)$$

4.3. Interface de l'outil d'analyse modal

L'outil d'analyse modale (figure 5) permet à l'utilisateur d'obtenir l'information relative à un modèle sélectionné sur l'établi directement dans l'environnement GENESIS. L'interface de visualisation de cette information est composée :

- D'un tableau de synthèse, regroupant l'intégralité de l'information relative à chaque mode de vibration de la structure et, par extension, à chaque partiel qui compose le son produit par celle-ci. Une conversion des fréquences en notes avec une précision au cent est également proposée.

- D'une section de visualisation des déformées modales, qui permet une représentation animée, interactive et tridimensionnelle des modes de vibration du modèle analysé. L'utilisateur est alors à même de distinguer les nœuds et ventres de ces modes et d'adapter les points d'excitation et d'écoute sur la structure en fonction des partiels qu'il souhaite ou ne souhaite pas entendre dans le son produit.

- D'un graphique de réponse impulsionnelle normalisée, qui propose une représentation globale du spectre des fréquences et de leurs amplitudes relatives. Cela suppose que l'utilisateur ait sélectionné un point d'excitation et un point d'écoute directement sur le modèle représenté dans la section de visualisation.

L'outil d'analyse modale est totalement intégré à GENESIS et est déjà largement inclus par les utilisateurs dans le processus de modélisation et d'exploration des propriétés de leurs structures vibrantes. Bien qu'il permette en l'état l'étude d'une grande variété de structures, il est cependant restreint à l'analyse de structures linéaires, en oscillation libre et à viscosité compatible. Or, l'intérêt de fonctions d'analyses de cette nature se fait sentir dans bien d'autres cas. Nous pensons par exemple à l'étude de structures linéaires à viscosité non compatible, de structures

non linéaires, de structures linéaires ou non linéaires dans leur comportement dynamique (non simplement oscillation libre) et plus généralement, de l'étude de modèles simulés en temps-réel.

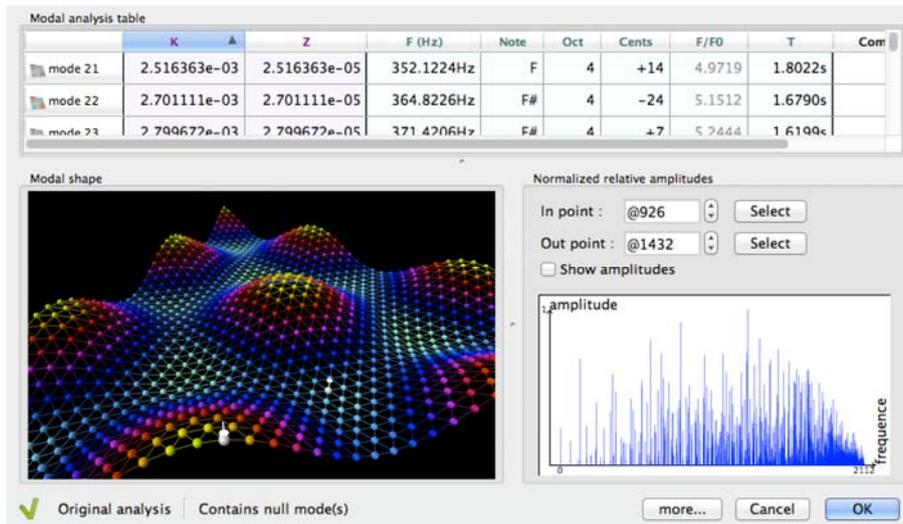


Figure 5. Interface graphique de l'outil d'analyse modale

5. Analyse par modèle physique

Il s'agit ici d'utiliser CORDIS-ANIMA et GENESIS eux-mêmes comme moyens non plus seulement de modéliser des structures vibrantes (plus généralement des instruments de complexité quelconque), mais, avec les mêmes concepts les mêmes outils et dans le même espace virtuel, les outils de mesure eux-mêmes. Le fondement de cette approche est finalement extrêmement naturel car il est exactement le même que celui de la démarche métrologique de la physique « réelle », où les appareils de mesure font partie du même monde que les phénomènes mesurés. Mais cette transposition du réel dans le virtuel, simultanément de l'objet d'étude et des outils de son étude, n'est pas seulement plaisante ou satisfaisante pour l'esprit. Il y a là un certain nombre d'avantages opératoires dont par exemple l'association directe, dans l'espace et dans le temps de la simulation, des phénomènes en jeu et du repérage de leurs propriétés selon certains critères que l'on peut alors définir. Lorsque les simulations peuvent être effectuées en temps-réel (comme dans les exemples que l'on montrera plus loin), on a accès pendant l'expérience même à l'expression de propriétés caractéristiques des objets.

Nous appelons « modèles métrologiques » les modèles qui permettent ainsi, dans une scène simulée complexe d'effectuer de telles mesures.

5.1. Modèles métrologiques

5.1.1 Détecteur de maximum

Il s'agit d'une particule (MAS) reliée par une liaison butée (BUT) à une autre particule susceptible de se mouvoir. Dit de façon simple, cette particule est « posée » sur la particule mobile à la manière de l'index sur la colonne de mercure d'un baromètre à maxima-minima. La particule détectrice est par ailleurs reliée à un point fixe par une liaison de frottement (FRO). Lorsque la particule étudiée se déplace vers le haut, la particule détectrice de maximum est emportée vers le haut avec elle grâce à la liaison butée. Lorsque la particule étudiée redescend, du fait de la liaison visqueuse, la particule détectrice demeure fixe à la hauteur qu'elle a atteinte, dans l'attente d'une éventuelle élévation à une hauteur supérieure. À la fin du mouvement, la particule détectrice est à l'altitude la plus haute atteinte par la particule étudiée au cours de son mouvement.

Il est clair que la particule détectrice avec son dispositif associé, comme tout appareil de mesure, ne doit pas perturber le phénomène mesuré. Ceci est facilement réalisé en donnant à la masse de la particule et aux coefficients d'élasticité de la butée et de viscosité du frottement des valeurs très faibles. Le format *flottant 64 bits* des calculs dans le moteur de simulation CORDIS-ANIMA permet d'avoir des rapports d'échelle d'au moins 10^{20} entre les représentations des grandeurs physiques, ce qui donne toutes les garanties pour une mesure non perturbatrice.

5.1.2 Modèle d'analyse spectrale

Cette approche est sensiblement différente du concept de l'analyseur modal. Pour ouvrir les possibilités d'analyses à une plus grande variété de modèles, il est nécessaire de passer de l'analyse de la cause, d'un modèle, à celle de l'effet qu'il produit, le signal. Cependant, l'analyse modale repose sur une conversion explicite d'un modèle en une série de cellules indépendantes. Dans cette partie nous présentons la possibilité d'utiliser une série de ces mêmes cellules pour décomposer un signal sonore et accéder aux fréquences qui le composent.

5.1.2.1. Le résonateur physique

Le principe repose sur l'objet CORDIS-ANIMA représenté en figure 6, un oscillateur harmonique (une Cellule), légèrement altéré afin d'être utilisé comme résonateur. Celui-ci se compose d'un module (MAS) au centre, lié d'une part à un module SOL par une liaison visqueuse (FRO), d'autre part au modèle à analyser par une liaison élastique (RES).

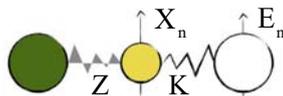


Figure 6. Modèle de résonateur CORDIS-ANIMA

L'étude de cet objet, avec E_n comme signal d'entrée et X_n comme signal de sortie, permet d'en ajuster les paramètres K et Z en fonction des propriétés de sa résonance. L'équation à temps discret régissant le mouvement de son module (MAS) est la suivante :

$$X_n + X_{n-1} \cdot (K + Z - 2) + X_{n-2} \cdot (1 - Z) = KE_{n-1} \quad (26)$$

De laquelle on peut tirer la « fonction de transfert » à temps discret suivante :

$$H(j\omega) = \frac{X_n}{E_{n-1}} = \frac{K}{e^{j\omega} - (K + Z - 2) + (1 - Z) \cdot e^{-j\omega}} \quad (27)$$

Connaissant alors le carré de son module et la pulsation de résonance :

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{K^2 \cdot 4(1 - Z)}{Z^2 \cdot (4(1 - Z) - (K + Z - 2)^2)} \quad (28)$$

$$\cos(\omega_r) = \frac{(2 - K - Z)(2 - Z)}{4(1 - Z)} \quad (29)$$

et en imposant une amplitude de résonance maximale $|H(j\omega)| = \beta$, il est possible d'exprimer les paramètres de raideur K_i et de viscosité Z_i nécessaires à la calibration d'un résonateur d'indice i afin d'en fixer la pulsation de résonances ω_r^i :

$$\begin{aligned} Z_i &= 1 - b_i(\beta, \cos(\omega_r^i)) \\ K_i &= -\frac{4b_i(\beta, \cos(\omega_r^i))\cos(\omega_r^i)}{1 + b_i(\beta, \cos(\omega_r^i))} + b_i(\beta, \cos(\omega_r^i)) + 1 \end{aligned} \quad (30)$$

La résolution de ce système tient à calculer $b_i(\beta, \cos(\omega_r^i))$ solution sur $]0, 1[$ de :

$$A_i x^4 + B_i x^3 + C_i x^2 + B_i x + A_i = 0 \quad (31)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_i &= 1 - \beta^2, \quad B_i = 4 \left((1 - \cos(\omega_r^i))^2 - A_i \cos^2(\omega_r^i) \right) \\ C_i &= -2A_i + 8 \left((1 - \cos(\omega_r^i))^2 + A_i \cos^2(\omega_r^i) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

Cette solution, bien qu'exprimable formellement, est dans notre cas déterminée par dichotomie, ce qui permet l'obtention à bas coût d'un résultat tout à fait précis.

5.1.2.2. Le banc de résonateurs physiques

En multipliant les objets étudiés précédemment, en accordant chacun d'entre eux à une fréquence de résonance unique et en fixant leurs amplitudes maximums de résonance à une valeur β fixée, il est possible de construire un outil d'analyse original. Chaque résonateur n'entrant en résonance qu'à une fréquence précise, la simple observation de leurs amplitudes au cours du temps permet une lecture en fréquence et dans le temps du signal produit par le modèle analysé.

La valeur de β joue un rôle essentiel. En effet, ce coefficient agit principalement sur la viscosité du résonateur et relie selon un principe d'incertitude les propriétés temporelles et fréquentielles des résonateurs. Plus sa valeur est grande, plus les résonateurs auront un amortissement fort et une bande passante faible. Plus sa valeur est faible, plus les résonateurs auront un amortissement faible et seront réactifs. Par exemple, avec $\beta = 5$, atteindre l'amplitude de résonance maximum pour un oscillateur réglé à 100 Hz nécessite 4 périodes (~ 40 msec.), à 10 000 Hz, 3 périodes (0,3 msec.).

Cette approche a été formalisée par Incerti et Cadoz (1995) il y a 20 ans. Aujourd'hui la technologie et la complémentarité des outils présents dans GENESIS permettent une implémentation poussée de ce concept. Elle a notamment été implantée directement au sein de GENESIS grâce à la fonctionnalité de scripts dits PNSL, pour *Physical Networks Script Language*. Ce script permet la génération d'un modèle d'analyse spectrale sur l'établi, qui se compose de n résonateurs coiffés de leur détecteur de maximum. L'échelle sur laquelle se répartissent leurs fréquences de résonance est à la discrétion de l'utilisateur (linéaire ou logarithmique).

Il n'y a pas de limite en termes de nombre de résonateurs, si ce n'est celle que la puissance du calculateur imposera dans le cas d'une analyse temps-réel. De fait, la résolution fréquentielle de l'analyseur n'est pas intrinsèquement corrélée à l'échelle temporelle de l'analyse, comme c'est le cas dans l'analyse de Fourier par exemple. De plus, la multiplication des composants du banc de résonateurs peut être un moyen de discriminer au mieux les propriétés du signal malgré une bande passante large, en particulier dans les hautes fréquences, comme l'illustre l'implication (33).

$$|H(j\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega_r)| \Rightarrow (\cos(\omega_r) - \cos(\omega))^2 \leq \frac{(K+Z-2)^2 + Z^2}{4(1-Z)} - \cos^2(\omega_r) \quad (33)$$

Une fois le modèle d'analyse construit, il peut être raccordé sur l'établi au modèle à étudier. Ce raccord tient à la condition de ne pas perturber le mouvement de ce dernier. Pour cela, il est nécessaire que sa masse soit très largement supérieure à celle de la somme des masses du modèle d'analyse, ce que le script de génération s'assure de calibrer.

La simulation de ces modèles est alors lancée durant laquelle, alors qu'une structure vibrante produit un son, une autre en analyse les propriétés et permet à l'utilisateur une lecture de l'information obtenue par observation directe au sein du

simulateur. L'implémentation dont il est question ci-après sera l'occasion d'illustrer cette fonctionnalité dans un cas concret.

5.2. Application à l'étude d'une corde à tension variable simulée en temps-réel

De nombreuses propriétés des structures vibrantes et des sons qu'elles produisent tiennent à la nature intrinsèquement non linéaire des phénomènes qui se développent au sein des objets, de la matière qui les compose et des lois qui gouvernent leurs interactions.

Les mathématiques qui permettent de modéliser et d'étudier les phénomènes non linéaires sont plus complexes que celles s'attachant aux systèmes linéaires. Une des voies méthodologiques possibles réside dans ce que l'on peut appeler d'une manière générale « la linéarisation » du problème, consistant à en proposer un modèle linéaire, sous certaines hypothèses dont il convient de valider ou d'évaluer la portée, en amont et en aval de l'expérimentation. Dans l'approche que nous adoptons dans nos travaux pour la création sonore par simulation à l'aide de la modélisation physique CORDIS-ANIMA, à travers l'environnement GENESIS, nous pouvons nous permettre une démarche expérimentale symétrique, c'est-à-dire la construction de structures physiques virtuelles présentant des propriétés non linéaires en partant de structures linéaires (lesquelles peuvent être bien étudiées à l'aide des outils présentés précédemment) pour ensuite « non-linéariser » certains de leurs composants qui portent les interactions élastiques (RES) ou visqueuses (FRO) ou les deux (REF).

Dans CORDIS-ANIMA, c'est le concept de « liaison non-linéaire » qui est en jeu. Celui-ci prend une forme spécifique dans GENESIS, appelée LNL ; il s'agit d'un module de la catégorie <LIA> et qui s'installe, comme tous les éléments de cette catégorie, entre deux éléments de type <MAT>.

5.2.1. Le module LNL

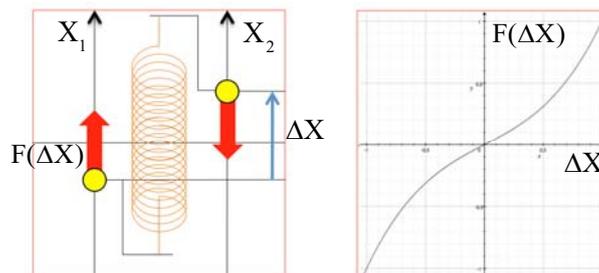


Figure 7. Liaison élastique non linéaire, LNL-K, avec sa caractéristique $F(\Delta X)$

Il est spécifié par la donnée de deux lois caractéristiques, l'une pour « l'élasticité non linéaire », qu'on appellera LNL-K, l'autre pour la « viscosité non linéaire »,

qu'on appellera LNL-Z. La caractéristique LNL-K est une loi donnant la valeur de la force appliquée par l'élément d'interaction (<LIA>) aux deux éléments (<MAT>) qu'il relie en fonction de la distance relative de ces derniers (figure 7), ce que l'on peut écrire sous la forme $\Delta X \rightarrow F(\Delta X)$ où $\Delta X = X_2 - X_1$.

De même, la caractéristique LNL-Z est une loi donnant la valeur de la force appliquée par l'élément d'interaction (<LIA>) aux deux éléments (<MAT>) qu'il relie en fonction de la vitesse relative de ces derniers : $\Delta V \rightarrow F(\Delta V)$ où $\Delta V = V_2 - V_1$.

Nous présentons dans ce qui suit une méthode permettant dans le contexte de GENESIS et en utilisant le module LNL, de réaliser une simulation pertinente et optimale en coût de calcul, de certaines formes de non-linéarités correspondant à celles que l'on appelle les « non-linéarités géométriques » (Touzé *et al.*, 2003 ; 2010). Nous utiliserons alors les outils d'analyse introduits plus haut pour illustrer leur intérêt et, dans le même temps évaluer la pertinence du modèle et explorer les propriétés d'un tel phénomène dans une perspective de création sonore.

5.2.2. Non-linéarité dans les cordes et les plaques

Lorsque l'on pince une corde ou que l'on percute avec une certaine intensité une membrane tendue, un phénomène particulier se fait entendre : une sorte de « twang » à l'attaque, dans le cas de la corde, et un glissement de hauteur dans le cas de la membrane tendue. Ce phénomène est la manifestation d'une non-linéarité particulière qui provient de l'augmentation de la tension de la structure vibrante lorsque l'amplitude de sa déformation augmente. Tout se passe comme si la raideur de la matière augmentait avec l'amplitude, produisant alors une augmentation de la fréquence du système de vibrations. Ces phénomènes bien connus ont été étudiés de longue date (Fletcher et Rossing, 1991).

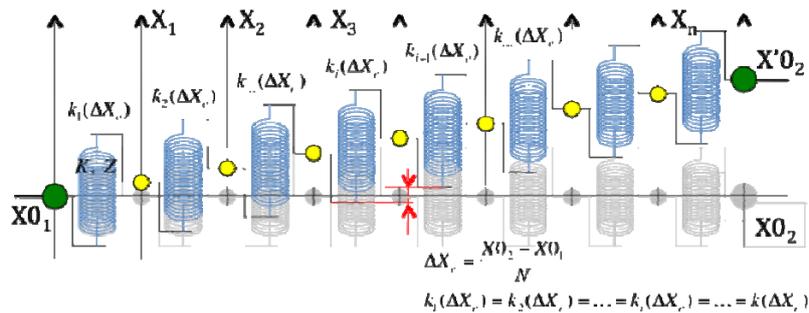


Figure 8. Modélisation d'une corde en GENESIS par un chapelet de masses en interactions viscoélastiques linéaires

Un tel phénomène ne peut pas être reproduit directement dans le contexte de GENESIS dont l'une des stratégies d'optimisation est fondée sur le formalisme CORDIS_U (unidimensionnel) où l'espace des mouvements des particules est réduit à une seule dimension.

Considérons en effet la modélisation classique d'une corde, en GENESIS, par un chapelet de masses (MAS) reliées par des liaisons viscoélastiques linéaires (REF) (figure 8). Lors d'une « mise en tension » par exemple en déplaçant l'une des attaches (X_{02}) du chapelet, les propriétés d'élasticité des ressorts (REF) sont inchangées, en conséquence de quoi les propriétés fréquentielles restent celles d'une structure parfaitement linéaire.

5.2.3. Non-linéarité géométrique en GENESIS – Corde « tendue » en CORDIS_U

Une étude interne antérieure a permis d'approcher le phénomène de non-linéarité propre à la corde tendue (qui peut se généraliser à toutes les structures tendues) à l'aide précisément d'une interaction de type LNL-K. Nous reprenons ici quelques résultats de cette étude en y ajoutant des éléments nouveaux rendus possibles par les nombreux développements récents de l'environnement GENESIS.

On considère en première approximation que les masses (MAS) du chapelet représentant la corde se déplacent effectivement sur des axes perpendiculaires à la ligne de la corde au repos (figure 9). Soient deux masses consécutives M_i et M_j se déplaçant uniquement selon l'axe \vec{v} . De manière à établir une relation entre les mouvements 1D de ces masses et un espace 2D (\vec{u}, \vec{v}) , on les suppose plongées dans un espace 2D et séparées d'une distance constante L_a selon l'axe \vec{u} . On considère alors, tendu entre ces deux masses, un ressort linéaire bidimensionnel, de constante de raideur K_{2D} et de longueur au repos L_0 (on suppose $L_0 < L_a$).

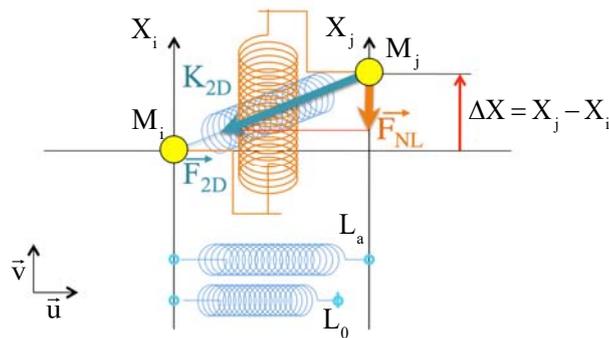


Figure 9. Correspondance ressort linéaire 2D – ressort non linéaire 1D

X_i et X_j sont les positions des masses M_i et M_j contraintes sur l'axe vertical et L la distance entre ces 2 Masses dans l'espace bidimensionnel. Le ressort 2D applique une force \vec{F}_{2D} de M_j vers M_i de norme $\|\vec{F}_{2D}\| = K_{2D} \cdot |L - L_0|$.

M_i et M_j ne se déplaçant que selon \vec{v} , seule la composante verticale de la force \vec{F}_{2D} entre en ligne de compte dans le mouvement des masses. C'est cette composante que l'on nommera \vec{F}_{NL} , qui correspond à la valeur de la force que l'on appliquera aux masses par la liaison d'interaction non-linéaire de type LNL-K.

$$F_{NL} = F_{2D} \frac{\Delta X}{L} = K_{2D} \cdot \Delta X \left(1 - \frac{L_0}{L_a \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta X}{L_a}\right)^2}} \right) \quad (34)$$

Une approximation en considérant des élongations faibles permet de simplifier l'écriture de cette équation, qui exhibe alors une loi polynomiale impaire de degré 3:

$$F_{NL} \approx \left(1 - \frac{L_0}{L_a} \right) \cdot K_{2D} \cdot \Delta X + \frac{L_0}{2L_a^3} \cdot K_{2D} \cdot \Delta X^3 \quad (35)$$

La forme peut encore en être simplifiée si l'on accepte de s'éloigner de la signification physique initiale, en posant :

$$K_0 = \left(1 - \frac{L_0}{L_a} \right) \cdot K_{2D} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L_0}{2L_a^3} \cdot K_{2D} \quad (36)$$

Ce qui donne pour la loi :

$$F_{NL} = K_0 \Delta X + Q \Delta X^3 \quad (37)$$

On peut alors considérer l'interaction non linéaire comme la mise en parallèle (ce qui est réalisable simplement dans GENESIS) d'un ressort linéaire simple de constante de raideur K_0 et d'une « non-linéarité pure » cubique, contrôlée par le paramètre Q .

Il reste à soumettre à l'expérience perceptive les simulations mettant en jeu ce type de non-linéarité et à en observer les comportements, en particulier à l'aide de l'analyseur spectral introduit plus haut.

5.2.4. Implémentation en temps-réel

Il nous est possible d'implémenter un tel modèle de corde tendue sur une plateforme temps-réel à retour d'effort. Celle-ci est composée d'un dispositif haptique (Florens *et al.*, 2004) couplé à une architecture de calcul temps-réel synchrone permettant de simuler des modèles GENESIS en temps-réel et à l'utilisateur d'interagir avec eux par le geste (Leonard *et al.* 2013). Notre modèle est une corde composée de masses reliées entre elles par les ressorts non-linéaires décrits ci-dessus. Elle ne peut donc pas être analysée par l'analyseur modal.

Une extrémité de la corde est connectée à un module fixe tandis que l'autre est couplée à une touche du système haptique, permettant la modulation de la tension en temps-réel par un effet d'élongation. Au repos, l'extrémité mobile de la corde est à la position $X = 0$. Lorsque cette extrémité est déplacée vers le haut ou vers le bas, la corde se « tend » : il apparait une composante continue dans la distance entre les masses voisines (du fait de l'élongation), qui change le point de fonctionnement des interactions élastiques non linéaires entre-elles, résultant en une raideur dynamique plus élevée lorsque l'élongation de la corde augmente. Le paramètre Q des interactions élastiques non linéaires permet de paramétrer la plage de modulation (à quel point l'élongation influe sur la raideur dynamique). L'utilisateur excite cette corde avec une autre touche du système haptique, via une interaction de pincement.

Au point d'écoute, cette structure vibrante est connectée à l'analyseur spectral, composé de 1 000 résonateurs espacés linéairement entre 100 Hz et 10000 Hz. L'analyseur informe alors en temps-réel des composantes fréquentielles du son résultant de la simulation. La raideur des détecteurs de maximum permet de configurer la rémanence temporelle du spectre, allant d'un spectre statique affichant les maximums pour toutes les bandes de fréquence à un spectre dynamique qui suit véritablement le jeu sur l'instrument. Nous observons ainsi directement et de manière dynamique l'effet des non-linéarités sur le spectre sonore (figure 10). La figure 11 montre une superposition des spectres de la corde « au repos » sans tension et de la corde « tendue » par effet d'élongation.

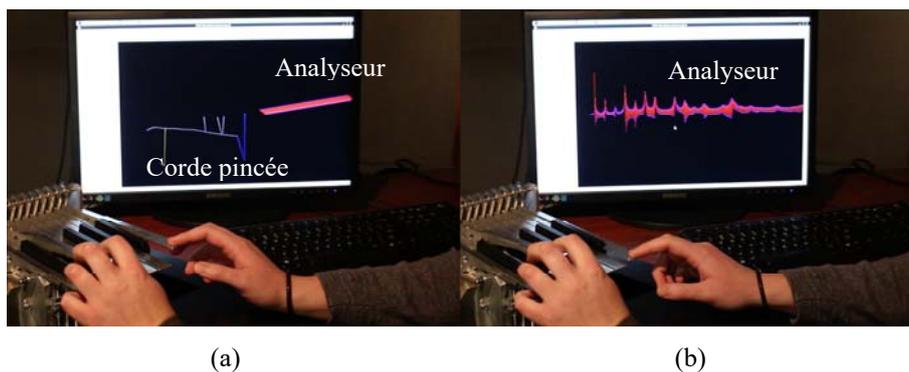


Figure 10. Présentation du contexte d'utilisation temps-réel de l'outil d'analyse. a) vue du modèle de corde couplé à l'analyseur, b) zoom sur le modèle d'analyse

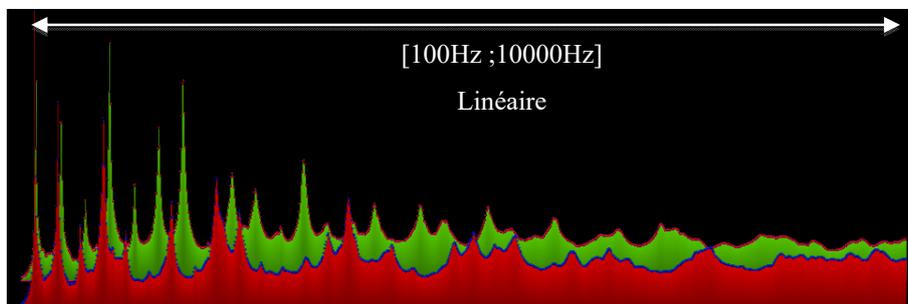


Figure 11. Modèle de décomposition en fréquence. Spectre de la corde au repos en bas, en rouge. Spectre de la corde tendue, en haut, en vert

6. Conclusion et perspectives

L'informatique et le traitement du signal sont deux disciplines fortement complémentaires et nécessaires l'une à l'autre, aussi bien par leurs aspects technologiques que par leurs aspects théoriques. La simulation numérique est un exemple emblématique de la fécondité de leur combinaison. À travers l'exemple de la simulation par modèle physique pour la création sonore et musicale, nous pouvons expérimenter cette complémentarité. Il est en effet tout à fait déterminant de s'attacher à la création du signal sonore en s'appuyant sur la modélisation physique de ses causes : la simulation permet de créer le signal et procure une nouvelle forme de sa compréhension, l'analyse du signal permet de guider la création des modèles. C'est une boucle entre la simulation pour connaître et la connaissance pour simuler qui s'instaure.

En ayant introduit, d'une part, le principe de l'analyse des phénomènes sonores à l'aide de la modélisation d'outils d'analyse, et d'autre part, l'implémentation de ces outils d'analyse dans le même « temps-réel » et le même « espace virtuel » incluant la manipulation gestuelle et le retour haptique, nous abordons maintenant de nouvelles fonctionnalités et de nouvelles conditions, inédites, pour le processus de création du son (musical en particulier) et pour celui de son analyse, ainsi qu'un bouclage intime des premières avec les secondes.

Nous avons montré ici, à partir de quelques éléments et d'un premier exemple applicatif, les fondements théoriques et techniques de cette approche. Des généralisations sont d'ores et déjà envisageables, comme en particulier la construction d'un environnement reposant sur le principe décrit dans ce texte et implémentant des fonctionnalités de traitement de signal afin d'obtenir une série de résonateurs calibrés en amplitude et en bande passante. Un tel environnement permettrait également un traitement de l'information écrite par chaque résonateur dans le temps. En effet, le signal à fréquence audio, contrepartie filtrée du signal original, que produit chaque résonateur, peut être traité, et ce indépendamment de

toute considération de résolution spectrale, afin d'obtenir une description fine des propriétés dynamiques du signal et de ses composantes au cours du temps.

Il sera également particulièrement intéressant d'appliquer la conjonction des deux méthodes, modale et fréquentielle en temps-réel pour l'analyse et la construction de structures vibrantes non linéaires complexes dans l'environnement GENESIS, dont on peut attendre de nombreuses propriétés intéressantes pour la création musicale.

Bibliographie

- Cadoz C., Luciani A., Florens J.L. (1981). Synthèse Musicale par Simulation des Mécanismes Instrumentaux. Transducteurs Gestuels Rétroactifs pour l'Etude du Jeu Instrumental. *Revue d'Acoustique* n° 59.
- Cadoz C., Luciani A., Florens J.L. (1993). CORDIS-ANIMA: A Modeling and Simulation System for Sound and Image Synthesis: The General Formalism. *Computer Music Journal*, vol. 17, n° 1. p. 19-29.
- Castagné N., Cadoz C., Allaoui A., Tache O. (2009). G3: GENESIS Software Environment Update. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'09)*, p. 407-410.
- Castagne N., Cadoz C. (2002). GENESIS: A Friendly Musician-Oriented Environment for Mass-Interaction Physical Modelling. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'02)*, Gothenburg, Sweden.
- Djoharian P. (1993). Generating Models for Modal Synthesis. *Computer Music Journal*, vol. 17, n° 1, p. 57-65.
- Fletcher N.H., Rossing T.D. (1991). *The Physics of Musical Instruments*, 2nd ed, Springer-Verlag, New York.
- Florens J.L., Luciani A., Castagne N., Cadoz C. (2004). ERGOS: a Multi-degrees of Freedom and Versatile Force Feedback Panoply. *Proceedings of Eurohaptics 2004*, Germany, p. 356-360.
- Helmholtz H.L.F. (1863). *On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music*. Dover Publications, 2nd edition.
- Incerti E. (1996). *Synthèse de Sons par Modélisation Physique de Structure Vibrantes. Applications pour la Création Musicale par Ordinateur*. Thèse de doctorat, Grenoble INP.
- Incerti E., Cadoz C. (1995). Time-Frequency Decomposition by means of Physical Model. *International Symposium on Musical Acoustics 1995*, Dourdan, France.
- Kontogeorgakopoulos A., Cadoz C. (2007). Cordis Anima Physical Modeling and Simulation System Analysis. *Sound and Music Computing Conference 2007*, Lefkada, Greece.
- Lascaux P., Theodor R. (1998). *Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur*. Dunod.
- Leonard J., Castagné N., Cadoz C., Florens J.L. (2013). Interactive Physical Design and Haptic Playing of Virtual Musical Instruments. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'13)*, Perth, Australia.

- Touzé C., Thomas O., Chaigne A. (2003). Non-linear oscillations of continuous systems with quadratic and cubic non-linearities using non-linear normal modes. *Proceedings of Second MIT Conference on computational fluid and solid mechanics*, Boston.
- Touzé C., Bilbao S., Longo-Mucciante L., Cadot O. (2010). Vibrations chaotiques de plaques minces: application aux instruments de type cymbale. *Proceedings of CFA 2010*, 10^e Congrès Français d'Acoustique, Lyon.
- Villeneuve J., Cadoz C. (2014). Understanding and Tuning Mass-Interaction Networks Through Their Modal Representation. *Proceedings of 40th International Computer Music Conference / 11th Sound and Music Computing Conference*, Athènes, Greece.

Article soumis le 27/02/2015

Accepté le 17/09/2015